

Περιεχόμενα Λύσεων

23.Κανόνας De L' Hospital	3	-	24
24.Θεώρημα Rolle	25	-	88
25.Θεώρημα Μέσης Τιμής	89	-	136
26.Συνέπειες Θ.Μ.Τ. – Σταθερή συνάρτηση	137	-	191
27.Μονοτονία συνάρτησης	192	-	280
28.Ακρότατα συνάρτησης	281	-	346
29.Προβλήματα ακροτάτων	347	-	378
Διαγωνίσματα έως τα ακρότατα	379	-	393
30.Κυρτότητα- Σημεία καμπής	394	-	438
31.Ασύμπτωτες	439	-	483
32.Μελέτη – γραφική παράσταση συνάρτησης	484	-	514
33.Συνδυαστικές επαναληπτικές ασκήσεις			
Επίπεδο Β θέματος	515	-	542
Επίπεδο Γ θέματος	543	-	598
Επίπεδο Δ θέματος	599	-	681
34.Επαναληπτικά διαγωνίσματα	682	-	698
35.Αρχική συνάρτηση	699	-	717
36.Ορισμένο ολοκλήρωμα	718	-	762
37.Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος	763	-	781
38.Ανισοτικές σχέσεις ολοκληρωμάτων	782	-	817
39.Το ορισμένο ολοκλήρωμα και τα θεωρήματα του διαφορικού λογισμού	818	-	830
40.Εμβαδόν επίπεδου χωρίου	831	-	873
41.Διαγωνίσματα στα ολοκληρώματα	874	-	880
42.Συνδυαστικά θέματα σε όλη την ύλη			
Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος	881	-	927
Επίπεδο δυσκολίας Γ Θέματος	928	-	977
Επίπεδο δυσκολίας Δ Θέματος	978	-	1038
43.Επαναληπτικά διαγωνίσματα	1039	-	1088

23.

Κανόνας De L' Hospital

Απροσδιοριστία 0/0 ή $\pm\infty/\pm\infty$

13.α) Ψευδής

β) i) Έστω $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1} = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$.

ii) Έστω $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$ τότε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{-\frac{1}{x}} \right) = 0$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}} \right) \stackrel{-\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} (e^u) = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x^2 e^{-\frac{1}{x}} \right) = 0$.

Άρα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ όμως δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του

DLH γιατί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι της μορφής $\left(\frac{0}{+\infty} \right)$.

γ) Έστω $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε είναι

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$.

14.α) Η διαδικασία είναι λάθος γιατί για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του de L'Hospital πρέπει να έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0} \right)$ ή $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$, ενώ εδώ

έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{\infty} \right)$ άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας.

β) Παρόλο που η διαδικασία δεν είναι σωστή, το αποτέλεσμα είναι σωστό,

αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$.

15.α) Είναι λάθος ο ισχυρισμός.

Για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του de L'Hospital πρέπει να έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$ ή $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ και επιπλέον οι συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 . Εδώ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$, όμως δεν ξέρουμε αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 (ξέρουμε ότι είναι παραγωγίσιμες μόνο στο x_0) άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = 1.$$

Παρόλο που η διαδικασία δεν είναι σωστή, το αποτέλεσμα είναι σωστό.

16.α) Είναι λάθος ο ισχυρισμός.

Για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του de L'Hospital πρέπει να έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$ ή $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ και επιπλέον οι συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0 . Εδώ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$,

όμως δεν ξέρουμε αν υπάρχει το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{1}$ επειδή δεν

γνωρίζουμε ότι η f' είναι συνεχής. Άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας.

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x) - f(x-h) + f(x)}{h} \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \right) = f'(x) + f'(x) = 2f'(x). \end{aligned}$$

Παρόλο που η διαδικασία δεν είναι σωστή, το αποτέλεσμα είναι σωστό.

17. Το πρόβλημα της απόδειξης είναι η εφαρμογή του κανόνα De L' Hospital.

Δεν γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Η πρόταση θα ισχύει, αν γνωρίζαμε

ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός

$$18. \alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^8 - 2x + 1}{x^4 - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1} \frac{8x^7 - 2}{4x^3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - \sigma \nu x}{6e^x - 6x - 4x^2 - x^3 - 6} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{2x + \eta \mu x}{6e^x - 6 - 8x - 3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sigma \nu x}{6e^x - 8 - 6x} = -\frac{3}{2}.$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x - x^3}{x^2 + x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu x - 3x^2}{2x + 1} = 1.$$

$$\sigma \tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\eta \mu x - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sigma \nu x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-\eta \mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-\sigma \nu x} = -2$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{\eta \mu^2 x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{2\eta \mu x \sigma \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2}x(e^{x^2} - 1)}{\cancel{2}\eta \mu x \sigma \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\frac{\eta \mu x}{x} \sigma \nu x} = 0$$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{\eta \mu 2x - 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{2e^{2x} - 2e^{-2x}}{2\sigma \nu 2x - 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{4}e^{2x} + \cancel{4}e^{-2x}}{-\cancel{4}\eta \mu 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(-e^{2x} - e^{-2x})}{\eta \mu 2x} \right] = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-e^{2x} - e^{-2x}) = -2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta \mu 2x} = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu 2x = 0 \text{ και } \eta \mu 2x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \sigma \nu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\eta \mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sigma \nu x} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$19. \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - e^x}{x^2 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + e^x} - \frac{e^x}{x^2 + e^x} \right) = -1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{1}{2x + e^x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x + e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2 + e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sigma\nu\nu x}{\eta\mu x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sigma\nu\nu x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\nu\nu x}{\eta\mu x} = 1.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\eta\mu x) \right) \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+, \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = 0.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\varepsilon\phi x)}{\ln(\eta\mu x)} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon\phi x} \cdot \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x}}{\frac{1}{\eta\mu x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\eta\mu x \sigma\nu\nu x}}{\frac{1}{\sigma\nu\nu x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\nu\nu^2 x} = 1.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\varepsilon\phi x) \right) \stackrel{k=\varepsilon\phi x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+, \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty, \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(\eta\mu x) \right) \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+, \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty.$$

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = +\infty.$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x + 1}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) \right) \stackrel{u=e^x+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty.$$

20.α) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - x + 1) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

Για $x = 1$ είναι $0 \leq f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο 1.

$$\beta) \text{ Για } x > 1 \text{ είναι: } 0 \leq f(x) \leq \ln x - x + 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{\ln x - x + 1}{x-1}.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1} = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} = 0 \quad (1). \text{ Για } 0 < x < 1 \text{ είναι } 0 \leq f(x) \leq \ln x - x + 1 \Leftrightarrow$$

$$0 \geq \frac{f(x)}{x - 1} \geq \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}.$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x - x + 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x} - 1}{1} = 0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1} = 0 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} = 0$, άρα η f είναι

παραγωγίσιμη στο 1 με παράγωγο $f'(1) = 0$.

21.Είναι :α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - 3}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1} \frac{3^x \ln 3}{1} = 3 \ln 3 = f(1)$ άρα η f είναι

συνεχής στο $x = 1$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3^x - 3}{x - 1} - 3 \ln 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x - 3 - 3 \ln 3 \cdot x + 3 \ln 3}{(x - 1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x \ln 3 - 3 \ln 3}{2(x - 1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1} \frac{3^x \ln^2 3}{2} = \frac{3 \ln^2 3}{2}, \text{ άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } 1 \text{ με}$$

$$\text{παράγωγο } f'(1) = \frac{3 \ln^2 3}{2}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη για $x \neq 1$ με $f'(x) = \frac{3^x \ln 3 \cdot (x - 1) - 3^x + 3}{(x - 1)^2}$ άρα είναι

$$\text{παραγωγίσιμη στο } 1 \text{ με παράγωγο } f'(x) = \begin{cases} \frac{3^x \ln 3 \cdot (x - 1) - 3^x + 3}{(x - 1)^2}, & x \neq 1 \\ \frac{3 \ln^2 3}{2}, & x = 1 \end{cases}.$$

22. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) = \frac{\varepsilon\varphi x - x}{x - \eta\mu x}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x - x}{x - \eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin^2 x} - 1}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x}}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{(1 - \sin x)} (1 + \sin x)}{\sin^2 x \cancel{(1 - \sin x)}} = 2 \text{ και επειδή η } f$$

είναι συνεχής, ισχύει: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

23. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ είναι :

• συνεχής στο 0, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (ae^x + x - 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4\eta\mu x + \beta x - 2) = \alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha - 1 = -2 \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) (1).$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^x + x + 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^x + 1}{1} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4\eta\mu x + \beta x - 2 + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4 \frac{\eta\mu x}{x} + \beta \right) = 4 + \beta \text{ οπότε από}$$

τη σχέση (1) έχουμε $4 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -4$

$$24. \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{xf''(x)}{f'(x)} \right) = 1 + 3 = 4,$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x) + xf^{(3)}(x)}{f''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{xf^{(3)}(x)}{f''(x)} \right) = 3.$$

Αυξημένης δυσκολίας

25.α) Θα αποδείξουμε ότι το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός

$$\text{αριθμός. Έχουμε } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ αφού } f \text{ συνεχής}}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\substack{0 \\ \text{αφού } f \text{ συνεχής}}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο $f'(x_0) = \ell$.

β) Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$.

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\substack{0 \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = \ell \Leftrightarrow \ell_1 = \ell \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = \ell \Leftrightarrow \ell_2 = \ell.$$

Επομένως $\ell_1 = \ell_2$ άτοπο.

26.α) Επειδή η f είναι περιττή ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

$$\text{β) Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} \stackrel{\substack{0 \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{f'(x)}{x^2} \right) = 0 \text{ γιατί για κάθε } x \neq 0 \text{ είναι}$$

$$|f'(x)| \leq 1 - \sin x^2 \Leftrightarrow -1 + \sin x^2 \leq f'(x) \leq 1 - \sin x^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-1 + \sin x^2}{x^2} \leq \frac{f'(x)}{x^2} \leq \frac{1 - \sin x^2}{x^2}. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x^2}{x^2} \stackrel{\substack{0 \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x^2 \cdot \cancel{2x}}{\cancel{2x}} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \sin x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \sin x^2)}{x^2} = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^2} = 0$.

$$\text{27. Έστω } f(x) = \frac{e^x + \alpha \eta \mu 2x - \beta \sigma \nu 2x - x}{x^2}, x \neq 0. \text{ Τότε}$$

$$f(x) \cdot x^2 = e^x + \alpha \eta \mu 2x - \beta \sigma \nu 2x - x \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \alpha \eta \mu 2x - \beta \sigma \nu 2x - x) \Leftrightarrow 0 = 1 - \beta \Leftrightarrow \beta = 1.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \alpha x \eta \mu 2x - \sigma \nu \nu 2x - x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \alpha \eta \mu 2x + 2\alpha x \sigma \nu \nu 2x + 2\eta \mu 2x - 1}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2\alpha \sigma \nu \nu 2x + 2\alpha \sigma \nu \nu 2x - 4\alpha \eta \mu 2x + 4\sigma \nu \nu 2x}{2} = \frac{4\alpha + 5}{2}. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha + 5}{2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

$$28. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x} - \eta \mu x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x} - \sigma \nu \nu x}{2x}.$$

$$\text{Έστω } f(x) = \frac{\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x} - \sigma \nu \nu x}{2x}, x \neq 0, \text{ τότε } 2xf(x) = \alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x} - \sigma \nu \nu x$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} (2xf(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (\alpha e^{\alpha x} - \beta e^{\beta x} - \sigma \nu \nu x) \Leftrightarrow 0 = \alpha - \beta - 1 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 1 \quad (1).$$

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha e^{\alpha x} - (\alpha - 1)e^{(\alpha - 1)x} - \sigma \nu \nu x}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^2 e^{\alpha x} - (\alpha - 1)^2 e^{(\alpha - 1)x} + \eta \mu x}{2} =$$

$$\frac{\alpha^2 - (\alpha - 1)^2}{2} = \frac{2\alpha - 1}{2}. \text{ Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2\alpha - 1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $\beta = 2 - 1 = 1$.

29. Στη σχέση $f^3(x) + 2f(x) = \eta \mu^2 x + 2\sigma \nu \nu x - 2 \quad (1)$, για $x = 0$ προκύπτει:

$$f^3(0) + 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)[f^2(0) + 2] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0. \text{ Η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο 0

επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$. Άρα, το ζητούμενο όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}$ είναι της

$$\text{μορφής } \left(\frac{0}{0}\right) \text{ οπότε είναι ίσο με } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{4x^3} \quad (2). \text{ Από την (1),}$$

παραγωγίζοντας κατά μέλη, έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 2f'(x) = 2\eta \mu x \sigma \nu \nu x - 2\eta \mu x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)[3f^2(x) + 2] = 2\eta \mu x(\sigma \nu \nu x - 1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2\eta \mu x(\sigma \nu \nu x - 1)}{3f^2(x) + 2} \quad (3).$$

Οπότε, η (2) με βάση την (3), γίνεται:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{4x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{3f^2(x) + 2}}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)}{x^3} \cdot \frac{2}{4(3f^2(x) + 2)} \right] = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x^2} \cdot \frac{2}{4(3f^2(x) + 2)} \right] = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x + 1)}{x^2(\sigma\upsilon\nu x + 1)} \cdot \frac{2}{4(3f^2(x) + 2)} \right] = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - 1}{x^2(\sigma\upsilon\nu x + 1)} \cdot \frac{2}{4(3f^2(x) + 2)} \right] = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \left(-\frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x + 1} \cdot \frac{2}{4(3f^2(x) + 2)} \right] = -\frac{1}{8}.\end{aligned}$$

30. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2}$. Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} = \frac{1}{2} g''(0) = 8.$$

31. Θετούμε $-h = u$ οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x - h)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x + u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x + u) - f'(x)}{u} = f''(x)$$

32. Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - 2h) + f(x + 2h) - 2f(x)}{4h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2f'(x - 2h) + 2f'(x + 2h)}{8h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f'(x - 2h) + f'(x + 2h)}{4h} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f'(x - 2h) + 2f''(x + 2h)}{4} = \frac{2f''(x) + 2f''(x)}{4} = f''(x).$$

33. Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-2h) - 2f(x) + f(x+2h)}{h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2f'(x-2h) + 2f'(x+2h)}{2h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-2h) + f'(x+2h) - f'(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[-\frac{f'(x-2h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x+2h) - f'(x)}{h} \right] = -(-2f''(x)) + 2f''(x) = 4f''(x)$$

γιατί $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+kh) - f'(x)}{h} \stackrel{kh=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{\frac{u}{k}} = kf''(x) \text{ για κάθε } x \neq 0.$

34. Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{(x - x_0)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) - f(x) + f(x_0)}{(x - x_0)(f(x) - f(x_0))} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - f'(x)}{f(x) - f(x_0) + (x - x_0)f'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0) - f'(x)}{f(x) - f(x_0) + (x - x_0)f'(x)} =$$

$$-\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{-f''(x_0)}{f'(x_0) + f'(x_0)} = \frac{4}{1+1} = 2$$

35. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + f(x)}{xf'(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + f'(x)}{f'(x) + xf''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{f'(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\frac{f'(x)}{x} + f''(x) \right)} =$

$$\frac{2 + f''(0)}{f''(0) + f''(0)} = \frac{4}{4} = 1 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = f''(0) = 2.$$

36.α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln f(x) - e^x + e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln f(x)}{x - 1} - \frac{e^x - e}{x - 1} \right).$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{1} = e.$ Έστω η συνάρτηση $h(x) = \ln f(x), x \in \mathbb{R}.$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x-1} = h'(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = f'(1), \text{ επομένως}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = f'(1) - e$. Επειδή η g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι συνεχής και στο $x = 1$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) \Leftrightarrow f'(1) - e = 1 - e \Leftrightarrow f'(1) = 1$

$$\beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\ln f(x) - e^x + e}{x-1} - (1-e)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln f(x) - e^x + e - (1-e)(x-1)}{(x-1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)} - e^x - 1 + e}{2(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\frac{f'(x)}{f(x)} - 1}{2(x-1)} - \frac{e^x - e}{2(x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2f(x)} \frac{f'(x) - f(x)}{x-1} - \frac{e^x - e}{2(x-1)} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2f(x)} \left(\frac{f'(x) - 1}{x-1} - \frac{f(x) - 1}{x-1} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - e}{x-1} \right] = \frac{1}{2f(1)} (f''(1) - f'(1)) - \frac{1}{2} e = -\frac{e}{2}$$

$$37.a) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + f'(x)}{1} = 2.$$

$\beta)$ Έστω $f(x) + f'(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = g(x) - f(x)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - f(x)] = 2 - 2 = 0$$

$$38.a) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + xf'(x)}{1} = 6$$

$\beta)$ Έστω $f(x) + xf'(x) = g(x) \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{g(x) - f(x)}{x}$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(g(x) - f(x)) \frac{1}{x} \right] = 0 \cdot 0 = 0.$$

39. Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)e^x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) \cancel{e^x} + f(x) \cancel{e^x}}{-\cancel{e^x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = \beta + \alpha \Leftrightarrow \beta = \beta + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ άτοπο.}$$

40. Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$

- οπότε είναι συνεχής στο 0 άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο οπότε

($f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$) ή ($f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$).

α) Έστω ότι $C_2 \equiv C_{f'}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$.

Αν $f(0) = 0$ τότε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \right) = +\infty \text{ ή } -\infty \text{ άτοπο.}$$

Αν $f(0) \neq 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \right) = (-\infty) \frac{1}{f(0)} = +\infty \text{ ή } -\infty$

άτοπο. Άρα η C_1 παριστάνει την f' .

β) Από τη γραφική παράσταση της f' έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.

$$\text{Αν } f(0) = 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{f(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x)}{f'(x)} = \ell_1$$

$$\text{Αν } \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = 0 \text{ τότε } L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x)}{f'(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{(3)}(x)}{f''(x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f^{(3)}(x) \cdot \frac{1}{f''(x)} \right) = +\infty \text{ ή } -\infty \text{ γιατί } f''(x) < 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(3)}(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}^* \text{ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) \neq 0$ τότε $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f''(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} \right) = +\infty$ ή $-\infty$ γιατί $f'(x) < 0$

για κάθε $x > 0$ οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Αρα $f(0) \neq 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \right) = 0 \cdot \frac{1}{f(0)} = 0$.

γ) Από τη γραφική παράσταση της f' έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = -\infty$.

Έστω $A = \lim_{x \rightarrow 0} (f'(x)f''(x))$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(3)}(x) = 0$ με $f^{(3)}(x) > 0$

για κάθε $x > 0$. Είναι $A = \lim_{x \rightarrow 0} (f'(x)f''(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\frac{1}{f'(x)}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(3)}(x)}{\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}} =$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(3)}(x)(f'(x))^2}{f''(x)} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(f^{(3)}(x)(f'(x))^2 \cdot \frac{1}{f''(x)} \right) = 0, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f^{(3)}(x)(f'(x))^2] = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f''(x)} = 0.$$

$$\text{Ομως } A = \lim_{x \rightarrow 0} (f'(x)f''(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\frac{1}{f''(x)}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{\frac{f^{(3)}(x)}{(f''(x))^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(f''(x))^3}{f^{(3)}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-(f''(x))^3 \cdot \frac{1}{f^{(3)}(x)} \right) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Αρα το όριο που παριστάνει η παράσταση A είναι ίσο με δύο διαφορετικές τιμές άτοπο.

41. Έχουμε :

- Αν οι $C_f, C_{f'}$ είχαν αντίστοιχα γραφικές παραστάσεις τις C_2, C_3 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty.$$

- Αν οι $C_f, C_{f'}$ είχαν αντίστοιχα γραφικές παραστάσεις τις C_3, C_2 τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x < 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) = xg(x)$ οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xg(x)]$.

- Αν $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}^*$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xg(x)] \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \ell < 0 \text{ απορρίπτεται} \\ -\infty, & \text{αν } \ell > 0 \end{cases}.$$

Άρα για $\ell > 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ επομένως $C_f \equiv C_3$ και $C_{f'} \equiv C_2$.

$$\text{Τότε } L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \text{ άτοπο αφού } L \neq 0.$$

- Αν $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [xg(x)] \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } L = -\infty \text{ απορρίπτεται} \\ -\infty, & L = +\infty \end{cases}.$$

Άρα για $L = +\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ επομένως $C_f \equiv C_3$ και $C_{f'} \equiv C_2$.

$$\text{Τότε } L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \text{ άτοπο αφού } L \neq 0.$$

Απροσδιοριστία $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$, 0^0 , 0^∞ , 1^∞

$$42. \alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{1}{x^2}=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{\frac{1}{u^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x \cdot (e^x - 1)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x \cdot (e^x - 1)}{\eta \mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta \mu x (e^x - 1) + e^x \sin x}{\sin x} = 1$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln x \ln(\ln x)] \stackrel{\ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-u) = 0.$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{-e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

$$\begin{aligned}
\zeta) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \ln(x+1)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \\
\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x+1} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \right) &= 0 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{2 \ln x}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x) = 0 \\
\eta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot (\eta\mu x - x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln x \cdot \frac{\eta\mu x - x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln x \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) \right) = 0 \text{ γιατί} \\
\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και} \\
\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) &= 1 - 1 = 0 \\
43. \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - x^2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 \right) \right] = (+\infty) \cdot (+\infty - 0 - 1) = +\infty, \\
\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty. \\
\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \right] = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0. \\
\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\eta\mu x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \eta\mu x}{x\eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x} + \sigma\upsilon\nu x} = 0. \\
\delta) \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1)\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{x \ln x + x-1} =
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x \ln x + x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1 - \sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sin x - x^2}{x(1 - \sin x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x - 2x}{1 - \sin x + x \eta \mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 2}{\eta \mu x + \eta \mu x + x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(\sin x - 2) \frac{1}{2\eta \mu x + x \sin x} \right] = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x - 2) = -1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\eta \mu x + x \sin x} = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2\eta \mu x + x \sin x) = 0 \text{ και } 2\eta \mu x + x \sin x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x + 1) - \ln e^x] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x + 1}{e^x} \stackrel{u = \frac{e^x + 1}{e^x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, u \rightarrow 1}} \ln u = 0 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{\cancel{e^x} + 1}{\cancel{e^x}} = 1.$$

$$44.a) \text{ Για κάθε } x > 1 \text{ είναι } (x-1)^{x-1} = e^{\ln(x-1)^{x-1}} = e^{(x-1)\ln(x-1)}. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{\cancel{x-1}}{\frac{1}{\cancel{(x-1)}^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x+1) = 0, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{(x-1)\ln(x-1)} \stackrel{\theta = (x-1)\ln(x-1)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1, \\ \theta \rightarrow 0}} e^\theta = 1.$$

$$\beta) \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{x}{1} = 0,$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{k = \frac{\ln x}{x}}{=} e^0 = 1.$$

$$\gamma) \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln[(\ln x)^{\frac{1}{x}}]} = e^{\frac{1}{x} \ln(\ln x)} = e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}}. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(\ln x)}{x}} \stackrel{m = \frac{\ln(\ln x)}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ m \rightarrow 0}} e^m = e^0 = 1.$$

δ) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $(\eta\mu x)^x = e^{\ln(\eta\mu x)^x} = e^{x \ln(\eta\mu x)}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\eta\mu x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \right) = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta\mu x)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(\eta\mu x)} \stackrel{\substack{x \ln(\eta\mu x) = u \\ u \rightarrow 0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$$

ε) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $(x+1)^{\frac{1}{\eta\mu x}} = e^{\ln(x+1)^{\frac{1}{\eta\mu x}}} = e^{\frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x}}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\sigma\upsilon\nu x} = 1, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^{\frac{1}{\eta\mu x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x}} \stackrel{\substack{u = \frac{\ln(x+1)}{\eta\mu x} \\ x \rightarrow 0^+, \quad u \rightarrow 1}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} e^u = e.$$

στ) Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > x$, οπότε $(e^x - x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln(e^x - x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln(e^x - x)}{x}}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) \right] = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$.

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

ζ) Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $(\epsilon\phi x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\ln(\epsilon\phi x)^{\frac{1}{\ln x}}} = e^{\frac{\ln(\epsilon\phi x)}{\ln x}}$. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\epsilon\phi x)}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\epsilon\phi x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\epsilon\phi x \sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{\eta\mu x}{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}} \cancel{\sigma\upsilon\nu}^Z x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} = 1, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\epsilon\phi x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(\epsilon\phi x)}{\ln x}} \stackrel{u = \frac{\ln(\epsilon\phi x)}{\ln x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+, \\ u \rightarrow 1}} e^u = e.$$

η) Για κάθε $x > 0$ είναι $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \stackrel{u = 1 + \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow 1}} \ln u = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \stackrel{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{DLH}{=} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(\cancel{-\frac{1}{x^2}} \right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \stackrel{k = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ k \rightarrow 1}} e^k = e.$$

Αυξημένης δυσκολίας

45. Θέτουμε $\frac{1}{x} = u \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$. Όταν $x \rightarrow 0^-$ τότε $u \rightarrow -\infty$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) - \frac{1}{x} \right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{u}-1}\right) - u \right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1-u}{u}}\right) - u \right) =$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{u}{1-u}\right) - u \right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\ln\left(\frac{1-\cancel{u}+\cancel{u}}{1-u}\right) - u \right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} (-\ln(1-u) - u) =$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \left(-u \left(\frac{\ln(1-u)}{u} + 1 \right) \right) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-u)}{u} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{1-u}}{1} = 0$$

$$46. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^x - 1) \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{e^x - 1}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)^2}{-x e^x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(e^x - 1) \cdot e^x}{-e^x - x e^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(e^x - 1)}{-1 - x} = 0.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln x \cdot \ln(\ln x)] \stackrel{u = \ln x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+, u \rightarrow 0^+}} (u \ln u) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{-1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-u) = 0$$

$$47. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sigma \phi x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{\sigma \nu \nu x}{\frac{\eta \mu x}{\frac{1}{x^2}}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2 \sigma \nu \nu x}{\eta \mu x} - 1 \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x^2} \left(\frac{x \sigma \nu \nu x}{\frac{\eta \mu x}{x}} - 1 \right) \right] = +\infty \left(\frac{0}{1} - 1 \right) = -\infty$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\varepsilon \phi x - \frac{1}{\pi - 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\pi - 2x} \left(\frac{\eta \mu x}{\frac{\sigma \nu \nu x}{\frac{1}{\pi - 2x}}} - 1 \right) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\pi - 2x} \left(\frac{\pi - 2x}{\sigma \nu \nu x} \eta \mu x - 1 \right) \right] = +\infty (2 \cdot 1 - 1) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\sigma \nu \nu x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2}{-\eta \mu x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2}{-1} = 2.$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Είναι $x f(x) \geq \eta \mu x$ (1).

- Για $x > 0$ από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) \geq \frac{\eta\mu x}{x}$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(0) \geq 1 \quad (2).$$

Για $x < 0$ από τη σχέση (1) $f(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x}$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(0) \leq 1 \quad (3). \text{ Από (2),(3) είναι } f(0) = 1$$

- Για $x > 0$ από τη σχέση (1) έχουμε είναι

$$f(x) \geq \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq \frac{\eta\mu x}{x} - 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq \frac{\eta\mu x - x}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x^2} \geq \frac{\eta\mu x - x}{x^3}$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x^2} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x - x}{x^3} \Leftrightarrow \frac{f''(0)}{2} \geq -\frac{1}{6} \Leftrightarrow f''(0) \geq -\frac{1}{3} \quad (4) \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x - x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{3x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\eta\mu x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Για $x < 0$ από τη σχέση (1) έχουμε θα είναι

$$f(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) - 1 \leq \frac{\eta\mu x}{x} - 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \leq \frac{\eta\mu x - x}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x^2} \leq \frac{\eta\mu x - x}{x^3}$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x - x}{x^3} \Leftrightarrow \frac{f''(0)}{2} \leq -\frac{1}{6} \Leftrightarrow f''(0) \leq -\frac{1}{3} \quad (5) \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu x - x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{3x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\eta\mu x}{6x} = -\frac{1}{6}. \text{ Από (4),(5) είναι}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{3}. \text{ Σωστή απάντηση Α.}$$

2. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \kappa - \ln x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{(x-1)^2} (x + \kappa - \ln x) \right]$$

με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x + \kappa - \ln x) = 1 + \kappa$.

- Αν $1 + \kappa > 0 \Leftrightarrow \kappa > -1$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ (άτοπο),
- Αν $1 + \kappa < 0 \Leftrightarrow \kappa < -1$ τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ (άτοπο).

Άρα $\kappa = -1$.

$$\text{Τότε } \lambda = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{2(\cancel{x-1})} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$$

Σωστή απάντηση Γ.

3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Για $x > 0$ έχουμε $f(x) > \frac{e^x - 1}{x}$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1} = 1$

δηλαδή $f(0) \geq 1$. Αν $x < 0$ έχουμε $f(x) < \frac{e^x - 1}{x}$ άρα

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{1} = 1$ δηλαδή $f(0) \leq 1$. Από (1),(2) θα είναι

$$f(0) = 1. \text{ Επίσης, } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x}. \text{ Για } x > 0 \text{ είναι}$$

$$f(x) > \frac{e^x - 1}{x} \Leftrightarrow f(x) - 1 > \frac{e^x - 1}{x} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x) - 1}{x} > \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2}$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$. Οπότε $f'(0) \geq \frac{1}{2}$

Σωστή απάντηση Δ.

4. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

οπότε $f'(0) = 0$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x)}{2x^2 - 1 + f(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf''(x) + f'(x)}{4x + f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \left(f''(x) + \frac{f'(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(4 + \frac{f'(x)}{x} \right)} = \frac{4+4}{4+4} = 1$$

γιατί $f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 4$. **Σωστή απάντηση Α.**

5. Στη σχέση (1) $f^5(x) + f^3(x) + f(x) = x - \eta\mu x$ για $x=0$ έχουμε

$$f^5(0) + f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) \left(\underbrace{f^4(0) + f^2(0) + 1}_{>0} \right) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε και στο 0 επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$. Παραγωγίζοντας στη σχέση (1) έχουμε

$$5f^4(x)f'(x) + 3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \left(\underbrace{5f^4(x) + 3f^2(x) + 1}_{>0} \right) = 1 - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{5f^4(x) + 3f^2(x) + 1} \quad (2)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{3x^2} \stackrel{(2)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\frac{5f^4(x) + 3f^2(x) + 1}{3x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{3x^2} \cdot \frac{1}{5f^4(x) + 3f^2(x) + 1} \right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{0+0+1} = \frac{1}{6} \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{3x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{6x} = \frac{1}{6}. \quad \text{Σωστή απάντηση Β.}$$

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Σ	2. Λ	3. Λ	4. Λ	5. Λ	6. Σ	7. Σ	8. Λ	9. Λ	10. Λ
11. Σ	12. Λ	13. Σ							

24

Θεώρημα Rolle

24.α) Ηf είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}. \text{ Επειδή } f(0) = f(3) = 0, \text{ ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 3) : f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}$ δεκτό.

β) Ηf είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με παράγωγο

$$f'(x) = 2x - 6. \text{ Επειδή } f(2) = f(4) = 0, \text{ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει } \xi \in (2, 4) : f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 6 = 0 \Leftrightarrow \xi = 3.$$

γ) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$ σαν πολυωνυμική. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 4) = -4 = f(0),$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^3 - 4) = -4, \text{ οπότε η f είναι συνεχής στο 0, άρα είναι}$$

συνεχής στο $[-1, 1]$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4 + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3 - 4 + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2) = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 0]$ και στο $(0, 1)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ -3x^2, & x > 0 \end{cases}. \text{ Επειδή } f(-1) = -3 \text{ και } f(1) = -5, \text{ δεν εφαρμόζεται για}$$

την f το Θ.Rolle στο $[-1, 1]$.

Αν $\xi \in (-1, 0]$, τότε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -2\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0.$

Αν $\xi \in (0, 1)$, τότε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ που απορρίπτεται στη περίπτωση αυτή.

δ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 8x) = -12$ και $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x - 10) = -4,$ η f δεν είναι συνεχής στο $[1, 3]$, οπότε δεν εφαρμόζεται το Θ.Rolle στο διάστημα αυτό.

25. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα :

- η f είναι συνεχής στο 0 οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = \beta = 1,$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^2 + 4x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \gamma x + 1 - 1}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \gamma x}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(\alpha x + 4)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}(x + \gamma)}{\cancel{x}} \Leftrightarrow \gamma = 4.$$

$$\bullet \quad f(-1) = f(1) \Leftrightarrow \alpha - 3 = 6 \Leftrightarrow \alpha = 9$$

26. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα :

$$\bullet \quad \eta \ f \ \text{είναι συνεχής στο } 1 \ \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (9 - \kappa x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 - \lambda x + \mu) = f(1) \Leftrightarrow 9 - \kappa = 2 - \lambda + \mu = f(1) \Leftrightarrow$$

$$\lambda - \kappa - \mu = -7 \quad (1),$$

$$\bullet \quad \eta \ f \ \text{είναι παραγωγίσιμη στο } 1 \ \text{οπότε} : \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{9} - \kappa x - \cancel{9} + \kappa}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - \lambda x + \mu - 2 + \lambda - \mu}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\kappa(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 - 1) - \lambda(x - 1)}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$-\kappa = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(\cancel{x-1})(x+1) - \lambda(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} \Leftrightarrow -\kappa = 4 - \lambda \Leftrightarrow \kappa = \lambda - 4 \quad (2).$$

$$\bullet \quad f(-3) = f(5) \Leftrightarrow 9 + 3\kappa = 50 - 5\lambda + \mu \Leftrightarrow 3\kappa + 5\lambda - \mu = 41 \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1),(3) μέσω της (2) έχουμε:

$$\begin{cases} \lambda - (\lambda - 4) - \mu = -7 \\ 3(\lambda - 4) + 5\lambda - \mu = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - \lambda + 4 - \mu = -7 \\ 3\lambda - 12 + 5\lambda - \mu = 41 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4 - \mu = -7 \\ 8\lambda - \mu = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 11 \\ 8\lambda - 11 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 11 \\ 8\lambda = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 11 \\ \lambda = 8 \end{cases}.$$

Τέλος από τη σχέση (2) προκύπτει: $\kappa = 8 - 4 \Leftrightarrow \kappa = 4$.

Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Rolle

27. Είναι $f(-1) = f(1) = 0$, η f συνεχής στο $[-1, 1]$ ως γινόμενο συνεχών

συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με παράγωγο

$$f'(x) = e^x (x^2 - 1) \eta \mu x + 2x e^x \eta \mu x + e^x (x^2 - 1) \sigma \eta \nu x \quad \text{άρα ισχύουν οι υποθέσεις}$$

του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της

C_f είναι παράλληλη στον $x''x$.

28. Είναι $f(0) = f(1) = 0$, f συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $f'(x) = 3(\alpha - \beta)x^2 + 2(2\alpha + \beta)x - 3\alpha$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (0,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Εφαρμογή του θεωρήματος Rolle σε γνωστή συνάρτηση

29.α) Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = \frac{e^x (f'(x) - f(x))}{e^{2x}} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} \dots \text{Όμως}$$

$g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{e^\alpha} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha} = 1, g(\beta) = \frac{f(\beta)}{e^\beta} = \frac{e^\beta}{e^\beta} = 1$ οπότε $g(\alpha) = g(\beta)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi) - f(\xi)}{e^\xi} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = f(\xi).$$

$$\mathbf{30.α)} \text{ Είναι } 3f(2) = 2f(3) \Leftrightarrow f(2) = \frac{2f(3)}{3}.$$

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με παράγωγο $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Όμως

$$g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{\cancel{2} \frac{f(3)}{3}}{\cancel{2}} = \frac{f(3)}{3} = g(3) \text{ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος Rolle.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (2,3)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\xi - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\xi = f(\xi).$$

31.α) Η g είναι συνεχής, στο $[0, \alpha]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με παράγωγο $g'(x) = f(x) + (x - \alpha)f'(x)$.

Επειδή $g(0) = g(\alpha) = 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$

τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + (\xi - \alpha)f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = (\alpha - \xi)f'(\xi)$

$$\text{Υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) : \Pi(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$$

32.α) Έστω $g(x) = f(x) - x^5 + x^4 - x$, $x \in [1, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 5x^4 + 4x^3 - 1$. Είναι $g(1) = f(1) - 1 = 0$,

$g(2) = f(2) - 32 + 16 - 2 = 18 - 18 = 0 = g(1)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 5\xi^4 + 4\xi^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 5\xi^4 - 4\xi^3 + 1.$$

β) Έστω $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} - x + x^3$, $x \in [1, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο

$$g'(x) = f'(x) - x - 1 + 3x^2. \text{ Είναι } g(1) = f(1) - \frac{1}{2} = 0,$$

$g(2) = f(2) - 2 - 2 + 8 = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \xi + 1 - 3\xi^2$.

γ) Είναι $\xi f'(\xi) = 4\xi^4 - 2\xi^2 + \xi \Leftrightarrow f'(\xi) = 4\xi^3 - 2\xi + 1$.

Έστω $g(x) = f(x) - x^4 + x^2 - x$, $x \in [1, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 4x^3 + 2x - 1$. Είναι $g(1) = f(1) - 1 = 2$,

$g(2) = f(2) - 16 + 4 - 2 = 16 - 14 = 2 = g(1)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 4\xi^3 - 2\xi + 1.$$

δ) Έστω $g(x) = f(x) - x^3 + 2x^2 - 2x$, $x \in [1, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο

$$g'(x) = f'(x) - 3x^2 + 4x - 2. \text{ Είναι } g(1) = f(1) - 1,$$

$g(2) = f(2) - 8 + 8 - 4 = f(1) + 3 - 4 = f(1) - 1 = g(1)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$, τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 3\xi^2 - 4\xi + 2.$$

33. Έστω $g(x) = f(x) - x^2 - \ln x$, $x \in [1, e]$. Η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με παράγωγο

$$g'(x) = f'(x) - 2x - \frac{1}{x}. \text{ Είναι } g(1) = f(1) - 1 = 0, g(e) = f(e) - e^2 - 1 = 0, \text{ οπότε}$$

$g(1) = g(e)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως
υπάρχει $\xi \in (1, e)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2\xi + \frac{1}{\xi}$.

34. Έστω $g(x) = f(x) + 3\sin x - 2\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$. Η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $g(0) = f(0) + 3 = 0$, $g(\pi) = f(\pi) - 3 = 0$, οπότε $g(0) = g(\pi)$, $g(1) = g(e)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$, τέτοιο, ώστε:
 $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 3\eta\mu\xi + 2\sigma\upsilon\nu\xi$.

35.α) Έστω $g(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x - 4x^2$, $x \in [-2, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) + \eta\mu x - 8x$. Είναι $g(-2) = f(-2) - \sigma\upsilon\nu(-2) - 16 \overset{f \text{ άρτια}}{=} f(2) - \sigma\upsilon\nu 2 - 16 = g(2)$, οπότε $g(-2) = g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$, τέτοιο, ώστε:
 $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + \eta\mu\xi = 8\xi$.

β) Έστω $g(x) = f(x) - e^{x^2}$, $x \in [-2, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2}$. Είναι $g(-2) = f(-2) - e^4 = f(2) - e^4 = g(2)$, οπότε $g(-2) = g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2\xi e^{\xi^2}$.

γ) Έστω $g(x) = f(x) - x\eta\mu x$, $x \in [-2, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $g(-2) = f(-2) + 2\eta\mu(-2) = f(2) - 2\eta\mu 2 = g(2)$, οπότε $g(-2) = g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \eta\mu\xi - \xi\sigma\upsilon\nu\xi = 0$.

δ) Είναι $\sqrt{\xi^2 + 1} \cdot f'(\xi) = \xi \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = 0$.

Έστω $g(x) = f(x) - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in [-2, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με παράγωγο

$g'(x) = f'(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Είναι $g(-2) = f(-2) - \sqrt{5} = f(2) - \sqrt{5} = g(2)$, οπότε

$g(-2) = g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$, τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\xi^2+1} \cdot f'(\xi) = \xi.$$

ε) Είναι $f'(x) = \frac{2x}{x^2-3} \Leftrightarrow f'(x) - (\ln|x^2-3|)' = 0.$

Έστω $g(x) = f(x) - \ln(x^2+3)$, $x \in [-2, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με παράγωγο

$g'(x) = f'(x) - \frac{2x}{x^2+3}$. Είναι $g(-2) = f(-2) - \ln 7 = f(2) - \ln 7 = g(2)$, οπότε

$g(-2) = g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως

υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$, τέτοιο ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{2\xi}{\xi^2-3}.$

στ) Έστω $g(x) = \eta\mu f(x) - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [-2, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x) + \eta\mu x$. Είναι $g(-2) = \eta\mu f(-2) - \sigma\upsilon\nu(-2) = \eta\mu f(2) - \sigma\upsilon\nu 2 = g(2)$, οπότε $g(-2) = g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$, τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\sigma\upsilon\nu f(\xi) + \eta\mu \xi = 0.$$

36. Έστω $f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x - 2$, $x \in [x_1, x_2]$, όπου x_1, x_2 ρίζες της f .

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $f'(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x - e^x \eta\mu x$.

Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \sigma\upsilon\nu x - e^x \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

37.α) Έστω $g(x) = xf(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως

γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$$g'(x) = f(x) + xf'(x).$$

Επειδή $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

β) Έστω $g(x) = x^v f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x) = x^v f'(x) + vx^{v-1} f(x)$. Επειδή $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^v f'(\xi) + v\xi^{v-1} f(\xi) = 0.$$

γ) Έστω $g(x) = f(x)\eta\mu x$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x) = f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\eta\mu\xi + f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = 0.$$

δ) Έστω $g(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x) = f'(x)\sigma\upsilon\nu x - f(x)\eta\mu x$. Επειδή $g(\alpha) = g(\beta) = 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi - f(\xi)\eta\mu\xi = 0.$$

Αυξημένης δυσκολίας

38.α) Έστω $h(x) = g(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως

διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο $h'(x) = g'(x) - x$. Είναι $h(0) = g(0)$,

$$h(1) = g(1) - \frac{1}{2} = g(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = g(0) = h(0), \text{ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = \xi$$

β) Έστω $\varphi(x) = g'(x) - 2x$, $x \in [0, \xi]$. Είναι $\varphi(0) = g'(0) > 0$,

$$\varphi(\xi) = g'(\xi) - 2\xi = \xi - 2\xi = -\xi < 0, \text{ οπότε } \varphi(0)\varphi(\xi) < 0.$$

Η φ είναι συνεχής στο $[0, \xi]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho \in (0, \xi) \subseteq (0, 1)$, τέτοιο ώστε $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow g'(\rho) = 2\rho$.

39. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)\epsilon\phi x + f(x) = 0$ έχει λύση στο (α, β) .

Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$f'(x) \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow (f(x)\eta\mu x)' = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x)\eta\mu x$.

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, ως γινόμενο συνεχών.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , με παράγωγο

$$g'(x) = f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x.$$

- Είναι $g(\alpha) = f(\alpha)\eta\mu\alpha = \beta\eta\mu\alpha$ και $g(\beta) = f(\beta)\eta\mu\beta = \alpha\eta\mu\beta$.

Όμως, από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε $\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\eta\mu\beta = \beta\eta\mu\alpha$, οπότε

$g(\alpha) = g(\beta)$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\eta\mu\xi + f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = 0$

(1). Επειδή $\xi \in (\alpha, \beta) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sigma\upsilon\nu\xi \neq 0$ οπότε από την (1) έχουμε:

$$f'(\xi)\frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi} + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\epsilon\phi\xi + f(\xi) = 0.$$

40. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ ως πηλίκο

συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}. \text{ Επειδή } g(0) = f(0) = 2f\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ και}$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = 2f\left(\frac{\pi}{3}\right) = g(0) \text{ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle}$$

οπότε υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi + f(\xi)\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow$

$$f'(\xi) + f(\xi)\frac{\eta\mu\xi}{\sigma\upsilon\nu\xi} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi)\epsilon\phi\xi = 0.$$

41. Είναι $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) - 2x = 0 \Rightarrow (xf(x) - x^2)' = 0$

Έστω $g(x) = xf(x) - x^2$, $x \in [0, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο

$g'(x) = f(x) + xf'(x) - 2x$. Επειδή $g(0) = 0$, $g(1) = f(1) - 1 = 0 = g(0)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(x) + xf'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}, \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (0, 1).$$

42. Είναι $f'(x) = \frac{2xf(x)}{1-x^2} \Leftrightarrow (1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = 0$.

Έστω $g(x) = (1-x^2)f(x)$, $x \in [-1, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με παράγωγο

$$g'(x) = (1-x^2)f'(x) - 2xf(x). \text{ Επειδή } g(-1) = 0 = g(1) \text{ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x^2)f'(x) -$$

$$2xf(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2xf(x)}{1-x^2}, \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (-1, 1).$$

43. Η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων όταν

$$-f(\xi) = f'(\xi)(-\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0.$$

Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [1, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως ηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}. \text{ Επειδή } g(1) = \frac{f(1)}{1} = f(1),$$

$$g(2) = \frac{f(2)}{2} = \frac{2f(1)}{2} = f(1) = g(1) \text{ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος}$$

Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0$.

44. Η εφαπτομένη στο M είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Για να διέρχεται από το $A(0, x_0^2)$, πρέπει: $x_0^2 - f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow$

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) + x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} + 1 = 0$$

Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x} + x$, $x \in [1, 3]$. Είναι $g(1) = f(1) + 1$,

$$g(3) = \frac{f(3)}{3} + 3 = \frac{3f(1) - 6}{3} + 3 = f(1) + 1 = g(1) \text{ αφού}$$

$3f(1) = f(3) + 6 \Leftrightarrow f(3) = 3f(1) - 6$. Η g είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ με παράγωγο

$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} + 1$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle
 οπότε υπάρχει $x_0 \in (1,3)$, τέτοιο, ώστε, $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} + 1 = 0$.

45. Είναι $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)} \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0. \text{ Έστω } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in [\alpha, \beta]. \text{ Η } h \text{ είναι συνεχής}$$

στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκιο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$\text{παράγωγο } h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Είναι $h(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)} = h(\beta)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος

Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε : $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

46. Είναι $f'(\xi) \ln \xi^\xi + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) \ln \xi + f(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$f'(\xi) \ln \xi + \frac{1}{\xi} f(\xi) = 0. \text{ Έστω } g(x) = f(x) \ln x, \quad x \in [2, 4]. \text{ Η } g \text{ είναι συνεχής}$$

στο $[2, 4]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με

$$\text{παράγωγο } g'(x) = f'(x) \ln x + \frac{1}{x} f(x). \text{ Είναι } g(2) = f(2) \ln 2 = 2f(4) \ln 2,$$

$$g(4) = f(4) \ln 4 = f(4) \ln 2^2 = 2f(4) \ln 2 = g(2), \text{ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις}$$

του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$f'(\xi) \ln \xi^\xi + f(\xi) = 0.$$

47.α) Αν στη σχέση $f'(\xi_1) = 2\xi_1$, αντικαταστήσουμε όπου ξ_1 το x έχουμε:

$$f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x) - 2x = 0 \text{ ή } (f(x) - x^2)' = 0. \text{ Έστω } g(x) = f(x) - x^2,$$

$$x \in [0,1]. \text{ Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [0,1] \text{ και παραγωγίσιμη στο } (0,1) \text{ με}$$

$$\text{παράγωγο } g'(x) = f'(x) - 2x. \text{ Είναι } g(0) = f(0) \text{ και } g(1) = f(1) - 1 = f(0),$$

$$\text{δηλαδή } g(0) = g(1). \text{ Άρα } g(1) = g(e), \text{ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος}$$

Rolle οπότε, υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = 2\xi_1.$$

β) Αν στη σχέση $f'(\xi_2) = -\frac{f(1)-1-f(\xi_2)}{\xi_2-1}$ αντικαταστήσουμε όπου ξ_2 το x

$$\text{έχουμε: } f'(x) = -\frac{f(1)-1-f(x)}{x-1} \Leftrightarrow f'(x)(x-1) + f(x) + 1 - f(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x)(x-1) + (1-f(1))x)' = 0.$$

Έστω $h(x) = f(x)(x-1) + (1-f(1))x$, $x \in [0,1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$$h'(x) = f'(x)(x-1) + f(x) + 1 - f(1). \text{ Είναι } h(0) = -f(0) \text{ και}$$

$$h(1) = f(1)(1-1) + (1-f(1)) = 1-f(1) = -f(0) = h(0) \text{ αφού}$$

$f(1)-f(0)=1 \Leftrightarrow f(1)-1=-f(0)$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow$

$$f'(\xi_2)(\xi_2-1) + f(\xi_2) + 1 - f(1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2) = -\frac{f(1)-1-f(\xi_2)}{\xi_2-1}.$$

48.α) Έστω $g(x) = \frac{1}{f(x)} + x^2$, $x \in [-1,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως

πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} + 2x. \text{ Είναι } g(-1) = \frac{1}{f(-1)} + 1 = \frac{1}{f(1)} + 1 = g(1), \text{ οπότε}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε: } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} + 2\xi = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 2\xi.$$

β) Είναι $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = 8x^3 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 4x^3 \Leftrightarrow (\sqrt{f(x)} - x^4)' = 0$. Έστω

$$g(x) = \sqrt{f(x)} - x^4, x \in [-1,1]. \text{ Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [-1,1] \text{ ως άθροισμα}$$

συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} - 4x^3. \text{ Είναι } g(-1) = \sqrt{f(-1)} - 1 = \sqrt{f(1)} - 1 = g(1) \text{ οπότε}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1,1)$, τέτοιο,

$$\text{ώστε: } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{2\sqrt{f(\xi)}} = 4\xi^3 \Leftrightarrow f'(\xi) = 8\xi^3 \sqrt{f(\xi)}$$

γ) Είναι $f'(x) = 6x^5 e^{-f(x)} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - x^6)' = 0$

Έστω $g(x) = e^{f(x)} - x^6$, $x \in [-1, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x)e^{f(x)} - 6x^5$,
 $g(-1) = e^{f(-1)} - 1 = e^{f(1)} - 1 = g(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 6\xi^5 e^{-f(\xi)}$.

δ) Είναι $f'(x) = \frac{2x}{3f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) - 2x = 0$. Έστω

$g(x) = f^3(x) - x^2$, $x \in [-1, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με παράγωγο

$g'(x) = 3f^2(x)f'(x) - 2x$, $g(-1) = f^3(-1) - 1 = f^3(1) - 1 = g(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3f^2(\xi)f'(\xi) - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{2\xi}{3f^2(\xi)}$

ε) Είναι $f'(x)\text{συν}f(x) = 2x^3 \Leftrightarrow \left(\eta\mu f(x) - \frac{1}{2}x^4\right)' = 0$.

Έστω $g(x) = \eta\mu f(x) - \frac{x^4}{2}$, $x \in [-1, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με παράγωγο

$g'(x) = f'(x)\text{συν}f(x) - 2x^3$, $g(-1) = \eta\mu f(-1) - \frac{1}{2} = \eta\mu f(1) - \frac{1}{2} = g(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$, τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\text{συν}f(\xi) = 2\xi^3$

στ) Είναι $f'(x)e^{f^2(x)} = \frac{x}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x)e^{f^2(x)} - x = 0 \Leftrightarrow$

$2f(x)f'(x)e^{f^2(x)} - 2x = 0 \Rightarrow \left(e^{f^2(x)} - x^2\right)' = 0$.

Έστω $g(x) = e^{f^2(x)} - x^2$, $x \in [-1, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με παράγωγο

$g'(x) = 2f(x)f'(x)e^{f^2(x)} - 2x$. Είναι $g(-1) = e^{f^2(-1)} - 1 = e^{f^2(1)} - 1 = g(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$, τέτοιο,

$$\text{ώστε: } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)e^{f^2(\xi)} = \frac{\xi}{f(\xi)}.$$

$$\mathbf{49. \alpha)} f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x f(x))' = 0$$

Έστω $g(x) = e^x f(x)$, $x \in [-a, a]$. Η g είναι συνεχής στο $[-a, a]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ με παράγωγο

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x). \text{ Είναι } g(-a) = e^{-a} f(-a) = 0,$$

$g(a) = e^a f(a) = 0 = g(-a)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-a, a)$, τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi f(\xi) + f'(\xi)e^\xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

$$\mathbf{\beta)} f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = 0$$

Έστω $g(x) = e^{-x} f(x)$, $x \in [-a, a]$. Η g είναι συνεχής στο $[-a, a]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ με παράγωγο

$$g'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x). \text{ Είναι } g(-a) = e^a f(-a) = 0,$$

$g(a) = e^{-a} f(a) = 0 = g(-a)$ οπότε $g(1) = g(e)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (-a, a)$, τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)e^{-\xi} - e^{-\xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - f(\xi) = 0.$$

$$\mathbf{\gamma)} f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{-2x} f(x))' = 0. \text{ Έστω}$$

$g(x) = e^{-2x} f(x)$, $x \in [-a, a]$. Η g είναι συνεχής στο $[-a, a]$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ με $g'(x) = e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x)$,

$g(a) = e^{-2a} f(a) = 0 = g(-a)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (-a, a)$, τέτοιο ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$

$$\mathbf{\delta)} \text{ Είναι } f'(x) + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + 2xe^{x^2} f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{x^2} f(x))' = 0$$

Έστω $g(x) = e^{x^2} f(x)$, $x \in [-a, a]$. Η g είναι συνεχής στο $[-a, a]$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ με παράγωγο

$$g'(x) = e^{x^2} f'(x) + 2xe^{x^2} f(x). \text{ Είναι } g(-a) = e^{a^2} f(-a) = 0,$$

$g(a) = e^{a^2} f(a) = 0 = g(-a)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

οπότε υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$, τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi^2} f'(\xi) + 2\xi e^{\xi^2} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + 2\xi f(\xi) = 0.$$

ε) Είναι $f'(x) - (2x-1)f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-x^2} f'(x) + (1-2x)e^{x-x^2} f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(e^{x-x^2} f(x) \right)' = 0. \text{ Έστω } g(x) = e^{x-x^2} f(x), x \in [-\alpha, \alpha]. \text{ Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [-\alpha, \alpha] \text{ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο $(-\alpha, \alpha)$ με παράγωγο

$$g'(x) = e^{x-x^2} f'(x) + (1-2x)e^{x-x^2} f(x), \quad g(\alpha) = e^{\alpha-\alpha^2} f(\alpha) = 0 = g(-\alpha), \text{ οπότε}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (-\alpha, \alpha)$, τέτοιο ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + (1-2\xi)f(\xi) = 0.$

50.α) Είναι $\kappa f'(x) + \lambda f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + \frac{\lambda}{\kappa} f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f'(x) + \frac{\lambda}{\kappa} e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f(x) \right)' = 0. \text{ Έστω } g(x) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f(x), x \in [\alpha, \beta]$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f'(x) + \frac{\lambda}{\kappa} e^{\frac{\lambda}{\kappa} x} f(x)$. Είναι

$$g(\alpha) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} \alpha} f(\alpha) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} \alpha} e^{\frac{\lambda}{\kappa} (\beta-\alpha)} f(\beta) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} \alpha + \frac{\lambda}{\kappa} (\beta-\alpha)} f(\beta) = e^{\frac{\lambda}{\kappa} \beta} f(\beta) = g(\beta), \text{ οπότε}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο

ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \kappa f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\lambda}{\kappa} \xi} f'(\xi) + \frac{\lambda}{\kappa} e^{\frac{\lambda}{\kappa} \xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\kappa f'(\xi) + \lambda f(\xi) = 0.$$

β) Είναι $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2f(x) \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-2x} f(x) \right)' = 0. \text{ Έστω } g(x) = e^{-2x} f(x), x \in [\alpha, \beta].$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο $g'(x) = e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x)$. Είναι

$$g(\alpha) = e^{-2\alpha} f(\alpha) = 0, g(\beta) = e^{-2\beta} f(\beta) = 0 = g(\alpha), \text{ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις}$$

του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{-2\xi} f'(\xi) - 2e^{-2\xi} f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2f(\xi) \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = 2.$$

γ) Είναι $f'(x) + f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{g(x)}f'(x) + g'(x)e^{g(x)}f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(e^{g(x)}f(x))' = 0.$$

Έστω ρ_1, ρ_2 ρίζες της f . Έστω $h(x) = e^{g(x)}f(x)$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$. Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $h'(x) = e^{g(x)}f'(x) + g'(x)e^{g(x)}f(x)$. Είναι

$$h(\rho_1) = e^{g(\rho_1)}f(\rho_1) = 0, h(\rho_2) = e^{g(\rho_2)}f(\rho_2) = 0 = h(\rho_1), \text{ οπότε ισχύουν οι}$$

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{g(\xi)}f'(\xi) + g'(\xi)e^{g(\xi)}f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$$

51. Είναι $f'(x)[g(\beta) - g(\alpha)] - g'(x)[f(\beta) - f(\alpha)] = 0 \Leftrightarrow$

$$(f(x)[g(\beta) - g(\alpha)] - g(x)[f(\beta) - f(\alpha)])' = 0$$

Έστω $h(x) = f(x)[g(\beta) - g(\alpha)] - g(x)[f(\beta) - f(\alpha)]$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο (α, β)

με $h'(x) = f'(x)[g(\beta) - g(\alpha)] - g'(x)[f(\beta) - f(\alpha)]$.

Είναι $h(\alpha) = f(\alpha)[g(\beta) - g(\alpha)] - g(\alpha)[f(\beta) - f(\alpha)] =$

$$f(\alpha)g(\beta) - \cancel{f(\alpha)g(\alpha)} - g(\alpha)f(\beta) + \cancel{g(\alpha)f(\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$h(\alpha) = f(\alpha)g(\beta) - g(\alpha)f(\beta),$$

$$h(\beta) = f(\beta)[g(\beta) - g(\alpha)] - g(\beta)[f(\beta) - f(\alpha)] =$$

$$= \cancel{f(\beta)g(\beta)} - f(\beta)g(\alpha) - \cancel{g(\beta)f(\beta)} + g(\beta)f(\alpha) = f(\alpha)g(\beta) - g(\alpha)f(\beta) \text{ Άρα}$$

$h(\alpha) = h(\beta)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$.

β) Προφανώς είναι $g(\alpha) \neq g(\beta)$, διαφορετικά από το θεώρημα Rolle για την g στο $[\alpha, \beta]$ θα υπήρχε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$, πράγμα άτοπο. Άρα

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}.$$

Η εξίσωση $f'(x)=0$ ή $f'''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα

52. Η f είναι συνεχής στο $[2, 6]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 6)$ και $f(2) = f(6)$,

οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi_1 \in (2, 6)$

τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

Η f' είναι συνεχής στα $[2, \xi_1]$, $[\xi_1, 6]$, παραγωγίσιμη στα $(2, \xi_1)$, $(\xi_1, 6)$ και $f'(0) = f'(\xi_1)$, $f'(\xi_1) = f'(6)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχουν $\xi_2 \in (2, \xi_1)$ και $\xi_3 \in (\xi_1, 6)$ τέτοια, ώστε

$$f''(\xi_2) = f''(\xi_3) = 0.$$

Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_2, \xi_3]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_2, ξ_3) και

$f''(\xi_2) = f''(\xi_3)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

53.α) Η h είναι συνεχής στα $[4, x_0]$, $[x_0, 5]$ και παραγωγίσιμη στα $(4, x_0)$, $(x_0, 5)$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - \kappa(x-4) - \kappa(x-5)$.

Είναι $h(4) = f(4) = 0$, $h(5) = f(5) = 0$, οπότε $h(4) = h(x_0)$, $h(x_0) = h(5)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_2 \in (2, \xi_1)$ και $\xi_3 \in (\xi_1, 6)$ τέτοια, ώστε $h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$.

Η h' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με παράγωγο $h''(x) = f''(x) - 2\kappa$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 0$.

β) Είναι $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \kappa(x_0 - 4)(x_0 - 5) \Leftrightarrow \kappa = \frac{f(x_0)}{(x_0 - 4)(x_0 - 5)}$,

$$h''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 2\kappa \Leftrightarrow \frac{1}{2}f''(\xi) = \kappa = \frac{f(x_0)}{(x_0 - 4)(x_0 - 5)} \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x_0 - 4)(x_0 - 5).$$

54. Είναι $f''(x) + 6x = e^x \Rightarrow (f'(x) + 3x^2 - e^x)' = 0 \Rightarrow (f(x) + x^3 - e^x)'' = 0$.

Έστω $g(x) = f(x) + x^3 - e^x$.

Η g είναι συνεχής στα $[0, 1]$, $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στα $(0, 1)$, $(1, 2)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) + 3x^2 - e^x$.

Επίσης $g(0) = f(0) - 1 = 0$, $g(1) = f(1) + 1 - e = 0$, $g(2) = f(2) + 8 - e^3 = 0$ οπότε $g(0) = g(1)$, $g(1) = g(2)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_1 \in (0, 1)$ και $x_2 \in (1, 2)$ τέτοια, ώστε

$g'(x_1) = g'(x_2) = 0$. Η g' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα

υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + 6\xi = e^\xi$.

$$55. \text{Είναι } f''(x) - \frac{1}{x^2} - 2 = \left(f'(x) + \frac{1}{x} - 2x \right)' = (f(x) + \ln x - x^2)''.$$

Έστω $g(x) = f(x) + \ln x - x^2$. Η g είναι συνεχής στα $[1, 2], [2, e]$, παραγωγίσιμη

στα $(1, 2), (2, e)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) + \frac{1}{x} - 2x$.

Είναι $g(1) = f(1) - 1 = 0, g(2) = f(2) + \ln 2 - 4 = 0, g(e) = f(e) + 1 - e^2 = 0$ οπότε

$g(1) = g(2), g(2) = g(e)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_1 \in (1, 2)$ και $x_2 \in (2, e)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$.

Η g' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο

$g''(x) = f''(x) - \frac{1}{x^2} - 2$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, e)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) - \frac{1}{\xi^2} - 2 = 0$.

56. Αρκεί να υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 1$.

Έστω $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \in [-2, 2]$. Η g είναι συνεχής στα $[-2, 0], [0, 2]$,

παραγωγίσιμη στα $(-2, 0), (0, 2)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - x$.

Είναι $g(-2) = f(-2) - 2 = f(0) + 2 - 2 = 0 = f(0)$,

$g(2) = f(2) - 2 = f(0) + 2 - 2 = f(0) = g(0)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-2, 0)$ και $x_2 \in (0, 2)$ τέτοια, ώστε $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$.

Η g' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο

$g''(x) = f''(x) - 1$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 1$.

57.α) Είναι $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -f(\alpha)$, οπότε $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)f(\alpha) = -f^2(\alpha) \leq 0$

Αν $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)f(\alpha) < 0$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\alpha}{2}, \alpha\right]$ ισχύουν οι

υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1 \in \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right)$ τέτοιο ώστε

$f(x_1) = 0$. Αν $f\left(\frac{a}{2}\right)f(a) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ ή $f(a) = 0$ τότε η f έχει ρίζα το

$\frac{a}{2}$ ή το a . Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left[\frac{a}{2}, a\right]$.

β) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-x_1) = f(x_1) = 0$ με $-a \leq -x_1 \leq -\frac{a}{2}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-x_1, x_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-x_1, x_1)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-x_1, x_1)$, οπότε και στο $(-a, a)$.

2ος τρόπος: Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-a, a]$, παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ και $f(-a) = f(a)$ αφού είναι άρτια, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-a, a)$.

58. Έστω $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$ οι ρίζες της f . Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, $[\rho_3, \rho_4]$ και παραγωγίσιμη στα (ρ_1, ρ_2) , (ρ_2, ρ_3) , (ρ_3, ρ_4) με παράγωγο $f'(x) = 6f(1)x^2 + 6f(2)\ln x + f(2)$.

Είναι $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$, $g(\rho_2) = g(\rho_3) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$, $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$, $\xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$ και $f'(\xi_3) = 0$. Η f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_3]$ και παραγωγίσιμη στα

(ξ_1, ξ_2) , (ξ_2, ξ_3) με παράγωγο $f''(x) = 12f(1)x + 6f(2) \cdot \frac{1}{x}$. Επειδή

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$, $f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχουν $\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_5 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοια, ώστε

$f''(\xi_4) = 0$ και $f''(\xi_5) = 0$. Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12f(1)x + 6f(2) \cdot \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$$12x^2 f(1) + 6f(2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{f(2)}{2f(1)} \quad (1)$$

Η εξίσωση (1) έχει ρίζες τα x_1, x_2 , τα οποία είναι μοναδικά αφού έχει το πολύ

δύο ρίζες. Άρα $-\frac{f(2)}{2f(1)} > 0 \Leftrightarrow f(1)f(2) < 0$, η f συνεχής στο $[1, 2]$ οπότε

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

2ος τρόπος: Είναι $f(x) = 2f(1)x^3 + 6xf(2)\ln x - 5f(2)x + 4$, $x > 0$ (Α).

Από τη σχέση (Α) έχουμε,

• για $x = 1$: $f(1) = 2f(1) - 5f(2) + 4 \Leftrightarrow f(1) = 5f(2) - 4$ (B)

• για $x = 1$: $f(2) = 16f(1) + 12f(2)\ln 2 - 10f(2) + 4 \stackrel{(A)}{\Leftrightarrow}$

$$f(2) = 16(5f(2) - 4) + 12f(2)\ln 2 - 10f(2) + 4 \Leftrightarrow$$

$$f(2) = 80f(2) - 64 + 12f(2)\ln 2 - 10f(2) + 4 \Leftrightarrow 69f(2) + 12f(2)\ln 2 = 60 \Leftrightarrow$$

$$\left(\underbrace{69 + 12\ln 2}_{>0} \right) f(2) = 60 \Leftrightarrow f(2) = \frac{60}{69 + 12\ln 2} \quad (\Gamma) > 0$$

Από τη σχέση (B) μέσω της (Γ) έχουμε

$$f(1) = 5 \frac{60}{69 + 12\ln 2} - 4 = \frac{300 - 276 - 48\ln 2}{69 + 12\ln 2} = \frac{24 - 48\ln 2}{69 + 12\ln 2} \Leftrightarrow$$

$$f(1) = \frac{24(1 - 2\ln 2)}{69 + 12\ln 2} \Leftrightarrow f(1) = \underbrace{\frac{24}{69 + 12\ln 2}}_{>0} \underbrace{(\ln e - \ln 4)}_{<0} < 0.$$

Άρα $f(1) \cdot f(2) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

Στον τρόπο αυτό δεν χρειάζεται η δεύτερη υπόθεση.

Το θεώρημα Rolle στα προβλήματα

59.α) Έστω $S_1(t), S_2(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των δύο αθλητών,

$S'_1(t) = u_1(t), S'_2(t) = u_2(t)$ οι ταχύτητές τους αντίστοιχα και $u'_1(t) = \alpha_1(t),$

$u'_2(t) = \alpha_2(t)$ οι επιταχύνσεις αντίστοιχα.

i) Έστω η συνάρτηση $f(t) = S_1(t) - S_2(t)$, $t \in [0, t_1]$, όπου t_1 η χρονική στιγμή του τερματισμού. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, t_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, t_1)$ με παράγωγο $f'(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Είναι $f(0) = S_1(0) - S_2(0) = 0$ και $f(t_1) = S_1(t_1) - S_2(t_1) = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπήρξε χρονική στιγμή $t_0 \in (0, t_1)$ τέτοια, ώστε

$$f'(t_0) = 0 \Leftrightarrow u_1(t_0) - u_2(t_0) = 0 \Leftrightarrow u_1(t_0) = u_2(t_0).$$

ii) Έστω η συνάρτηση $g(t) = u_1(t) - u_2(t)$, $t \in [0, t_0]$, όπου t_0 η χρονική στιγμή του προηγούμενου ερωτήματος με $u_1(t_0) = u_2(t_0)$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, t_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, t_0)$ με παράγωγο

$$g'(t) = \alpha_1(t) - \alpha_2(t). \text{ Είναι } g(0) = u_1(0) - u_2(0) = 0 \text{ και}$$

$g(t_0) = u_1(t_0) - u_2(t_0) = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπήρξε χρονική στιγμή $t_2 \in (0, t_0)$ τέτοια, ώστε

$$g'(t_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(t_2) - \alpha_2(t_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1(t_2) = \alpha_2(t_2).$$

β) Έστω $S_1(t), S_2(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των δύο αθλητών, $S'_1(t) = u_1(t)$, $S'_2(t) = u_2(t)$ οι ταχύτητές τους αντίστοιχα.

($S_1(t)$ η συνάρτηση θέσης του αθλητή που τερμάτισε σε λιγότερο χρόνο).

Αν t_0 είναι η χρονική στιγμή που τερμάτισε ο ένας τότε ο άλλος τερμάτισε την χρονική στιγμή $2t_0$. Άρα είναι $S_1(0) = S_2(0)$ και $S_1(t_0) = S_2(2t_0)$.

Αρκεί να δείξουμε ότι έχει λύση στο $[0, t_0]$ η εξίσωση

$$u_1(t) = 2u_2(2t) \Leftrightarrow u_1(t) - 2u_2(2t) = 0 \Leftrightarrow (S_1(t) - S_2(2t))' = 0$$

Έστω η συνάρτηση $h(t) = S_1(t) - S_2(2t)$, $t \in [0, t_0]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, t_0]$, παραγωγίσιμη στο $(0, t_0)$ με παράγωγο $h'(t) = u_1(t) - 2u_2(2t)$ και $h(0) = h(t_0)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπήρξε χρονική στιγμή $t_3 \in (0, t_0)$ τέτοιο, ώστε $h'(t_3) = 0 \Leftrightarrow u_1(t_3) - 2u_2(2t_3) = 0 \Leftrightarrow u_1(t_3) = 2u_2(2t_3)$.

60. Έστω $\Lambda(t), X(t)$ οι συναρτήσεις θέσης του λαγού και της χελώνας αντίστοιχα. Τότε η μεταξύ τους απόσταση μέχρι να ξεκινήσει ο λαγός είναι $d(t) = |X(t) - \Lambda(t)| = X(t) - \Lambda(t)$, αφού η χελώνα προηγείται.

Αρκεί να δείξουμε ότι έχει λύση στο $(0, t_0)$ η εξίσωση $d'(t) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d'(t) - 1 = 0 \Leftrightarrow (d(t) - t)' = 0 \Leftrightarrow (X(t) - \Lambda(t) - t)' = 0.$$

Έστω η συνάρτηση $f(t) = X(t) - \Lambda(t) - t$, $t \in [0, t_0]$. Η f είναι συνεχής στο $[0, t_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, t_0)$ με παράγωγο $f'(t) = d'(t) - 1$. Είναι $f(0) = X(0) - \Lambda(0) - 0 = 0$ και $f(t_0) = X(t_0) - \Lambda(t_0) - t_0 = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $t_1 \in (0, t_0)$ τέτοιο ώστε $f'(t_1) = 0 \Leftrightarrow d'(t_1) - 1 = 0 \Leftrightarrow d'(t_1) = 1$.

61. Έστω $h_A(t)$ και $h_B(t)$ το ύψος των ελατηρίων A και B αντίστοιχα κάθε χρονική στιγμή. Η διαφορά του ρυθμού μεταβολής του ύψους του ελατηρίου B από τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του ελατηρίου A είναι $h'_A(t) - h'_B(t)$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$h'_A(t) - h'_B(t) = \frac{1}{t_0} \Leftrightarrow h'_A(t) - h'_B(t) - \frac{1}{t_0} = 0 \Leftrightarrow \left(h_A(t) - h_B(t) - \frac{t}{t_0} \right)' = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, t_0)$.

Έστω η συνάρτηση $f(t) = h_A(t) - h_B(t) - \frac{t}{t_0}$, $t \in [0, t_0]$. Η f είναι συνεχής

στο $[0, t_0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, t_0)$ με παράγωγο

$$f'(t) = h_A'(t) - h_B'(t) - \frac{1}{t_0}.$$

Είναι $f(0) = h_A(0) - h_B(0) = 2 - 3 = -1$ και $f(t_0) = h_A(t_0) - h_B(t_0) - \frac{t_0}{t_0} = -1$

αφού $h_A(t_0) = h_B(t_0)$.

Άρα $f(0) = f(t_0)$, επομένως από το θεώρημα Rolle υπάρχει $t_1 \in (0, t_0)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(t_1) = 0 \Leftrightarrow h_A'(t) - h_B'(t) - \frac{1}{t_0} = 0 \Leftrightarrow h_A'(t) - h_B'(t) = \frac{1}{t_0}$$

62. Έστω $K(t)$ χιλιάδες ευρώ το κέρδος της εταιρείας συναρτήσει του χρόνου t σε μήνες. Είναι $K(1) = 0$ και $K(2) = 7$ χιλιάδες ευρώ.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(t) = K(t) - t^3$, $t \in [1, 2]$. Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f'(t) = K'(t) - 3t^2$.

Είναι $f(1) = 0 - 1 = -1$ και $f(2) = 7 - 8 = -1 = f(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε

$$f'(t_0) = 0 \Leftrightarrow K'(t_0) - 3t_0^2 = 0 \Leftrightarrow K'(t_0) = 3t_0^2 \text{ χιλιάδες ευρώ.}$$

Θεώρημα Rolle και γραφική παράσταση

63.α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο $[0, 1]$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι $f(0) < f(3) < f(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών, άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$f(x_0) = f(3)(1)$. Αν η f ήταν 1-1, τότε από την (1) θα είχαμε ότι $x_0 = 3$ που είναι άτοπο, άρα η f δεν είναι 1-1.

2ος τρόπος

Από το σχήμα βλέπουμε ότι η οριζόντια ευθεία $y = f(3)$ τέμνει τη c_f σε δύο σημεία άρα η f δεν είναι 1-1.

β) Επειδή $f(x_0) = f(3)$, η f είναι συνεχής στο $[x_0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 3)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

γ) Αν $A(x, f(x))$, τότε για να είναι η χορδή AB παράλληλη στον $x'x$ και να έχει μήκος 1, το B θα έχει συντεταγμένες $(x+1, f(x+1))$. Είναι $0 \leq x \leq 3$ και

$0 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$, άρα $x \in [0, 2]$. Επομένως αρκεί να υπάρχει $x \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε $f(x+1) = f(x)$. Έστω $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in [0, 2]$. Είναι $g(0) = f(1) - f(0) > 0$, $g(2) = f(3) - f(2) < 0$ όπως φαίνεται από το σχήμα,

δηλαδή $g(0)g(2) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho+1) = f(\rho)$.

64. Η f είναι συνεχής στα $[\alpha, 0]$, $[0, \beta]$ και παραγωγίσιμη στα $(\alpha, 0)$, $(0, \beta)$. Επειδή $f(\alpha) = f(\beta) = f(0)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, 0)$, $\xi_2 \in (0, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

65. Η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, παραγωγίσιμη στα $(1, 3)$ και $f(1) = f(3) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f άρα υπάρχει $\xi_1 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = 0$. Η f' είναι συνεχής στα $[1, \xi_1]$, $[\xi_1, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(1, \xi_1)$, $(\xi_1, 3)$ και $f'(1) = f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_1) = f'(3) = 0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχουν $\xi_2 \in (1, \xi_1)$ και $\xi_3 \in (\xi_1, 3)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_2) = f''(\xi_3) = 0$. Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

66. Η εφαπτομένη στο M είναι: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει: $-f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$. Έστω

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ορισμένη στο $[1, 2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και

παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Είναι

$g(1) = f(1) = 2$, $g(2) = \frac{f(2)}{2} = 2 = g(1)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

67. Είναι $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$. Η εφαπτομένη στο $M(\xi f(\xi))$ είναι: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει:

$$-f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0. \text{ Έστω}$$

$g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in \mathbb{R}^+.$ Η g είναι συνεχής στα $[1, 2], [2, 3], [3, 4]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}. \text{ Επειδή } g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0, \text{ ισχύουν οι}$$

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα η εξίσωση

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα}$$

σε καθένα από τα διαστήματα $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$, οπότε η εξίσωση

$$xf'(x) - f(x) = 0 \text{ έχει τουλάχιστον 3 ρίζες.}$$

Επομένως υπάρχουν τουλάχιστον 3 εφαιπτόμενες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

68. Είναι $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0.$

Έστω $h(x) = f(x)g(x), x \in [\alpha, \beta].$ Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο

συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \text{ Είναι } h(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha) = 0,$$

$$h(\beta) = f(\beta)g(\beta) = 0 = h(\alpha), \text{ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle}$$

άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0.$

69.α) Έστω ότι $f(0) = f(3).$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, πράγμα που δεν ισχύει σύμφωνα με την γραφική παράσταση.

β) Έστω ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_1 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < 3$ τότε $f(x_1) = 0 = f(3).$

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1, 3)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[x_1, 3]$ οπότε θα υπάρχει $\xi \in (x_1, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, πράγμα που δεν ισχύει σύμφωνα με την γραφική παράσταση.

Ομοίως αν $x_1 > 3$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο για $x = 3$.

γ) Είναι $g(3) = \frac{f(3)}{3} = 0.$ Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις πρέπει

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$ πράγμα άτοπο από β) ερώτημα. Άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ) Είναι $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$, $x \neq 0$ άρα

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0. \text{ Από το σχήμα για κάθε}$$

$x \in (0, 3]$ είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow xf'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -xf'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) \leq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 3$. Άρα είναι $g'(3) = 0$.

70.α) Είναι $f(0) = \frac{0}{-\alpha} = 0$ και $f(2) = \frac{4-4}{4-\alpha} = 0$ οπότε $f(0) = f(2)$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ημίκυκλο παραγωγίσιμων

$$\begin{aligned} \text{συναρτήσεων με παράγωγο: } f'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2-\alpha) - 2x(x^2-2x)}{(x^2-\alpha)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2x^3} - 2\alpha x - 2x^2 + 2\alpha - \cancel{2x^3} + 4x^2}{(x^2-\alpha)^2} = \frac{2(x^2 - \alpha x + \alpha)}{(x^2-\alpha)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - \alpha x + \alpha)}{(x^2-\alpha)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + \alpha = 0$$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = \alpha^2 - 4\alpha = \alpha(\alpha - 4)$.

Αν $\alpha \in (0, 4) \Leftrightarrow \Delta < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

$$\text{Αν } \alpha < 0 \Leftrightarrow -\alpha > 0 \Leftrightarrow \Delta > 0 \text{ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες } x_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha}}{2}$$

και $D_f = \mathbb{R}$ αφού $x^2 - \alpha > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) i) Αν η f' παριστάνεται από την C_1 τότε $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Η f ορίζεται

όταν $x^2 - \alpha \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq \alpha$. Αν το $\alpha < 0$ η f θα είχε πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

άτοπο, άρα $\alpha \in (0, 4)$ οπότε η εξίσωση $x^2 = \alpha$ έχει ρίζες το 1 και το -1

επομένως $\alpha = 1$. Η f δεν ορίζεται σε όλα τα σημεία του διαστήματος $[0, 2]$,

άρα δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα αυτό.

ii) Αν η f' παριστάνεται από την C_2 τότε από β) ερώτημα η εξίσωση

$$f'(x) = 0 \text{ έχει ρίζες οπότε } \alpha < 0. \text{ Τότε } D_f = \mathbb{R}.$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, $f(0) = f(2)$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει (μοναδικό από το σχήμα) $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Άρα $\xi < 2$.

71. Η f είναι συνεχής και στα διαστήματα $[0, 2], [2, 4]$.

Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και στα διαστήματα $(0, 2), (2, 4)$.

Επίσης $f(0) = f(2) = f(4)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_3) = 0$. Η f'' είναι γνησίως μονότονη οπότε το ξ_3 είναι μοναδικό.

Επίσης τα ξ_1, ξ_2 είναι μοναδικά, διαφορετικά θα υπήρχε και δεύτερη ρίζα της $f''(x) = 0$ από το θεώρημα Rolle άτοπο

- Σύμφωνα με τα παραπάνω η f' έχει δύο ακριβώς κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ με τετμημένες θετικές.

Οι (Δ), (Ε) και (ΣΤ) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ οπότε δεν μπορούν να είναι γραφικές παραστάσεις της $C_{f'}$.

Η (Α) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $O(0,0)$ άρα δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της $C_{f'}$.

Η (Γ) τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ακριβώς δύο σημεία με αρνητικές τετμημένες οπότε δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της $C_{f'}$.

Επομένως η f' παριστάνεται από την (Β), η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ακριβώς δύο σημεία με θετικές τετμημένες.

- Σύμφωνα με τα παραπάνω η f'' έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το οποίο έχει τετμημένη θετική.

Οι (Α), (Β) και (Γ) έχουν δύο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ οπότε δεν μπορούν να είναι γραφικές παραστάσεις της $C_{f''}$.

Η (Ε) έχει μοναδικό σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ το $O(0,0)$ άρα δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της $C_{f''}$.

Η (ΣΤ) έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη, άρα δεν μπορεί να είναι η γραφική παράσταση της $C_{f''}$.

Επομένως η f'' παριστάνεται από την (Δ) η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο με θετική τετμημένη.

72. Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο $x_0 = 1$ είναι

$$(ε) : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = f'(1)x + f(1) - f'(1)$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι η (ε) τέμνει την γραφική παράσταση της f και σε δεύτερο σημείο $(x_1, f(x_1))$ με $x_1 < 0$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f'(1)x - f(1) + f'(1)$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $g'(x) = f'(x) - f'(1)$.

Αν η f παριστάνεται από την C_1 τότε $g(1) = 0$ και $g(x_1) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = f'(1) \Leftrightarrow \xi = 1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα η f παριστάνεται από την C_2 . Η εφαπτομένη είναι της μορφής $y = ax + b$ με $b = f(1) - f'(1)$. Η (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με αρνητική τεταγμένη άρα $b < 0 \Leftrightarrow f(1) - f'(1) < 0 \Leftrightarrow f(1) < f'(1)$.

Χρήση εις άτοπο απαγωγής

73. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = 4(\lambda^2 + 1)x^3 + 6(\lambda + \mu)x^2 + 6(\mu^2 + 1)x + 4 \text{ και δευτέρα παράγωγο}$$

$$f''(x) = 6[2(\lambda^2 + 1)x^2 + 2(\lambda + \mu)x + (\mu^2 + 1)]. \text{ Έστω ότι η } f \text{ έχει τρείς}$$

εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους στα σημεία

$$A(\rho_1, f(\rho_1)), B(\rho_2, f(\rho_2)), \Gamma(\rho_3, f(\rho_3)) \text{ με } \rho_1 < \rho_2 < \rho_3.$$

Τότε $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = f'(\rho_3)$.

Η f' συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα

$(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα

υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$.

Όμως το τριώνυμο $2(\lambda^2 + 1)x^2 + 2(\lambda + \mu)x + (\mu^2 + 1)$ η f'' έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4(\lambda + \mu)^2 - 8(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1) = 4(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2)8(\lambda^2 + 1)(\mu^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4(\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - 2\lambda^2\mu^2 - 2\lambda^2 - 2\mu^2 - 2) = 4(-\lambda^2 + 2\lambda\mu - \mu^2 - 2\lambda^2\mu^2 - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4(-(\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2) - 2\lambda^2\mu^2 - 2) \Leftrightarrow \Delta = 4(-(\lambda - \mu) - 2\lambda^2\mu^2 - 2) < 0 \text{ οπότε η}$$

$$\text{εξίσωση } 2(\lambda^2 + 1)x^2 + 2(\lambda + \mu)x + (\mu^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 0 \text{ είναι αδύνατη.}$$

Άρα η C_f δεν μπορεί να έχει 3 εφαπτομένες παράλληλες μεταξύ τους.

74. Αν η f δεν ήταν 1-1, θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

75. Είναι $6xf(x) \neq (3x^2 - 12)f'(x)$ (1).

α) Από τη σχέση (1) για $x = 2$, $x = -2$ προκύπτει αντίστοιχα $f(-2) \neq 0$ και $f(2) \neq 0$.

β) Έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Τότε από α) ερώτημα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [-2, 2]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{3x^2 - 12}{f(x)}$, $x \in [-2, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ σαν πηλίκo συνεχών συναρτήσεων και είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{6xf(x) - (3x^2 - 12)f'(x)}{f^2(x)}$.

Είναι $g(-2) = g(2) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{6\xi f(\xi) - (3\xi^2 - 12)f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow 6\xi f(\xi) = (3\xi^2 - 12)f'(\xi) \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f στο $(-2, 2)$.

76. Είναι $(2x - 1)f(x) \neq (x^2 - x)f'(x)$ (1).

α) Από τη σχέση (1) για $x = 0$, $x = 1$ προκύπτει αντίστοιχα $f(0) \neq 0$ και $f(1) \neq 0$.

β) Έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Τότε από α) ερώτημα $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2 - x}{f(x)}$, $x \in [0, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ σαν πηλίκo συνεχών συναρτήσεων και είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$

$$\text{με παράγωγο } f'(x) = \frac{(2x - 1)f(x) - (x^2 - x)f'(x)}{f^2(x)} = 0.$$

Είναι $g(0) = g(1) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{(2\xi-1)f(\xi)-(\xi^2-\xi)f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0 \Leftrightarrow (2\xi-1)f(\xi)=(\xi^2-\xi)f'(\xi) \text{ που είναι}$$

άτοπο. Άρα η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

77. Έστω $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$. Από τη σχέση (1) για $x = \rho_1, x = \rho_2$ προκύπτει αντίστοιχα $g(\rho_1) \neq 0$ και $g(\rho_2) \neq 0$ οπότε $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\rho_1, \rho_2]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$. Η h είναι συνεχής στο

$[\rho_1, \rho_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \text{ Επειδή } h(\rho_1) = \frac{f(\rho_1)}{g(\rho_1)} = 0 \text{ και}$$

$$h(\rho_2) = \frac{f(\rho_2)}{g(\rho_2)} = 0 = h(\rho_1), \text{ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος}$$

Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0 \text{ που είναι άτοπο. Άρα}$$

η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Έστω $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $g(x)=0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\rho_1, \rho_2)$. Από τη σχέση (1) για $x = \rho_1, x = \rho_2$ προκύπτει αντίστοιχα $f(\rho_1) \neq 0$ και $f(\rho_2) \neq 0$ οπότε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\rho_1, \rho_2]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$.

Η φ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $\varphi'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}$. Επειδή

$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε

$$\xi_1 \in (x_1, x_2) \text{ τέτοιο, ώστε } \varphi'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi_1)f(\xi_1) - g(\xi_1)f'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1)g(\xi_1) - f(\xi_1)g'(\xi_1) = 0 \text{ που είναι άτοπο. Άρα η εξίσωση } f(x) = 0 \text{ έχει}$$

τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Τουλάχιστον μία ρίζα

78. Έστω $f(x) = \frac{\alpha}{4}x^4 + \frac{\beta}{3}x^3 + \frac{\gamma}{2}x^2 + \delta x$, $x \in [0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$

ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Είναι $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0 = f(0)$, άρα ικανοποιούνται οι

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0 \text{ έχει}$$

τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

79. Έστω $f(x) = \alpha x^5 + \beta x^4 - 2\alpha x^3 - \beta x^2 + \alpha x$, $x \in [0,1]$. Η f είναι συνεχής στο

$[0,1]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$$f'(x) = 5\alpha x^4 + 4\beta x^3 - 6\alpha x^2 - 2\beta x + \alpha. \text{ Είναι } f(0) = 0,$$

$$f(1) = \alpha + \beta - 2\alpha - \beta + \alpha = 0 = f(0), \text{ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$5\alpha x^4 + 4\beta x^3 - 6\alpha x^2 - 2\beta x + \alpha = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (0,1).$$

80. Έστω $f(x) = e^x - \frac{\alpha x^2}{2} + \beta x$, $x \in [0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως

άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$$f'(x) = e^x - \alpha x + \beta. \text{ Είναι } f(0) = 1, f(1) = e - \frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{2e - \alpha + 2\beta}{2}.$$

Όμως $\alpha - 2\beta = 2e - 2 \Leftrightarrow \alpha = 2\beta + 2e - 2$, άρα

$$f(1) = \frac{2e - 2\beta - 2e + 2 + 2\beta}{2} = 1 = f(0). \text{ Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος Rolle οπότε εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - \alpha x + \beta = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

81.α) Έστω $f(x) = (x-1)\eta\mu x$, $x \in [0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως

γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \eta\mu x + (x-1)\sigma\upsilon\nu x. \text{ Επειδή } f(0) = f(1) = 0 \text{ ικανοποιούνται οι}$$

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + (x-1)\sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (0,1).$$

β) Είναι $(2x-1)\eta\mu x = (x-x^2)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (x^2-x)' \eta\mu x + (x^2-x)(\eta\mu x)' = 0.$

Έστω $f(x) = (x^2 - x)\eta\mu x$, $x \in [0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο $f'(x) = (2x-1)\eta\mu x + (x^2 - x)\sigma\upsilon\nu x$. Επειδή $f(0) = f(1) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)\eta\mu x = (x-x^2)\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Αυξημένης δυσκολίας

82.α) Είναι $f(-1) = 1 + 10 - 15 + 1 + 2 = -1 < 0$, $f(0) = 2 > 0$ και $f(1) = -23 < 0$, οπότε $f(-1)f(0) < 0$ και $f(0)f(1) < 0$.

Η f είναι συνεχής, στα διαστήματα $[-1,0]$, $[0,1]$ σαν πολυωνυμική άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, υπάρχουν $x_1 \in (-1,0)$, $x_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$.

β) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ σαν πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2) με παράγωγο

$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 - 30x - 1$. Επειδή $f(x_1) = f(x_2)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 - 30x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_1, x_2) \subseteq (-1,1)$.

83. Η f είναι συνεχής, στα διαστήματα $[3,4]$, $[4,5]$ σαν πολυωνυμική.

Είναι $f(3)f(4) < 0$ και $f(4)f(5) < 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, υπάρχουν $x_1 \in (3,4)$ και $x_2 \in (4,5)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ σαν πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2) άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

84. Είναι $f(1) + f(2) = f(3) + f(4)$ (1).

• Έστω $f(1) \neq f(2), f(3) \neq f(4)$. Τότε $\frac{f(1)+f(2)}{2}$

Επίσης $\frac{f(3)+f(4)}{2}$ βρίσκεται μεταξύ των $f(3), f(4)$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2], [3,4]$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$,

$$x_2 \in (3,4) \text{ τέτοια, ώστε } f(x_2) = \frac{f(3)+f(4)}{2} \text{ και } f(x_1) = \frac{f(1)+f(2)}{2} = f(x_2).$$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ σαν πολωνυμική και παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2) άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$: $f'(x_0) = 0$.

- Έστω $f(1) = f(2)$.

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$

- Έστω $f(3) = f(4)$. Η f είναι συνεχής στο $[3,4]$, παραγωγίσιμη στο $(3,4)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_2 \in (3,4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,4)$.

85. Είναι $f(0)f(1) = f(2)f(3)$.

- Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής, οπότε υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0,1]$. Επιπλέον είναι $f(x) > 0$ οπότε $m > 0$ άρα $0 < m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0,3]$.

Επομένως $m \leq f(0) \leq M$, $m \leq f(1) \leq M$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των 2 σχέσεων προκύπτει ότι:

$$m^2 \leq f(0)f(1) \leq M^2 \Leftrightarrow m \leq \sqrt{f(0)f(1)} \leq M. \text{ Επειδή ο}$$

αριθμός $\sqrt{f(0)f(1)}$ ανήκει στο $[m, M]$, υπάρχει $x_1 \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_1) = \sqrt{f(0)f(1)}.$$

- Επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,3]$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής, οπότε υπάρχουν $m_1, M_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [2,3]$. Επιπλέον είναι $f(x) > 0$ οπότε

- $m_1 > 0$ άρα $0 < m_1 \leq f(x) \leq M_1$ για κάθε $x \in [2, 3]$.

Επομένως $m_1 \leq f(2) \leq M_1$, $m_1 \leq f(4) \leq M_1$.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των 2 σχέσεων προκύπτει ότι:

$$m_1^2 \leq f(0)f(1) \leq M_1^2 \Leftrightarrow m_1 \leq \sqrt{f(2)f(3)} \leq M_1. \text{ Επειδή ο αριθμός } \sqrt{f(2)f(3)}$$

ανήκει στο $[m_1, M_1]$, υπάρχει $x_2 \in [2, 3]$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \sqrt{f(2)f(3)}$.

Από τη σχέση (1) είναι $\sqrt{f(0)f(1)} = \sqrt{f(2)f(3)} \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) ,

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει

$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Το πολύ κ ρίζες

86. Έστω $g(x) = \ln x - 2 + x$, $x > 0$, και ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες

x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$. Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$,

$g(x_1) = g(x_2) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} + 1 = 0 \Leftrightarrow \xi = -1$ άτοπο.

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 2 + x = 0$ δεν έχει δύο ρίζες οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

87. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2 < p$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , $f(x_1) = f(x_2) = 0$

οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει

$\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ άτοπο αφού το p είναι η μικρότερη ρίζα της

f' . Επομένως η f δεν έχει 2 ρίζες άρα έχει το πολύ μία ρίζα.

88. Έστω ότι έχει η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) αφού είναι δύο

φορές παραγωγίσιμη άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$. Η σχέση $f(x)f''(x) > 0$

για $x = \xi$ γίνεται $f(\xi)f''(\xi) > 0 \Leftrightarrow 0 > 0$ άτοπο. Επομένως η f' δεν έχει 2 ρίζες

άρα έχει το πολύ μία ρίζα.

89.α) Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , $f(x_1) = f(x_2) = 0$ οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2) .

β) Έστω ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ που ανήκουν στο (ρ_1, ρ_2) , όπου ρ_1, ρ_2 διαδοχικές ρίζες της $f'(x) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού τα ρ_1, ρ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της $f'(x) = 0$.

90. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \lambda x e^x - e$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 3 πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$ με παράγωγο $f'(x) = \lambda e^x + \lambda x e^x = \lambda e^x (1+x)$, οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Όμως, η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda e^x (1+x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ έχει μοναδική λύση την $x = -1$, οπότε δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες ξ_1, ξ_2 . Άρα, η εξίσωση $\lambda x e^x = e$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

91. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3\alpha x + 2\beta$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες x_1, x_2, x_3 με $x_1 < x_2 < x_3$.

Η f είναι συνεχής στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ ως πολωνυμική και παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ με παράγωγο $f'(x) = 6x^5 - 3\alpha$. Επειδή $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = 0 \text{ και } f'(\xi_2) = 0. \text{ Είναι } f'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow 6\xi_1^5 = 3\alpha \Leftrightarrow \xi_1^5 = \frac{\alpha}{2} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow \xi_2^5 = \frac{\alpha}{2}. \text{ Αν } \alpha \geq 0 \text{ τότε } \xi_1 = \sqrt[5]{\frac{\alpha}{2}}, \xi_2 = \sqrt[5]{\frac{\alpha}{2}}, \text{ άρα } \xi_1 = \xi_2 \text{ άτοπο.}$$

Αν $\alpha < 0$ τότε $\xi_1 = -\sqrt[5]{-\frac{\alpha}{2}}$, $\xi_2 = -\sqrt[5]{-\frac{\alpha}{2}}$ άρα $\xi_1 = \xi_2$ άτοπο. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 - 3\alpha x + 2\beta = 0$ δεν έχει περισσότερες από δύο ρίζες.

92. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες $x_1 < x_2 < x_3$. Η f είναι συνεχής στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ με παράγωγο $f'(x) = 4x^3 + 2\alpha x + \beta$. Επειδή $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με παράγωγο $f''(x) = 12x^2 + 2\alpha$. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 12\xi^2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \xi^2 = -\frac{\alpha}{6} < 0$ αδύνατο. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει 3 ρίζες άρα έχει το πολύ δύο ρίζες.

93. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει 3 ρίζες $x_1 < x_2 < x_3$. Η g είναι συνεχής στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - e^x \cdot (x+1)$. Επειδή $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε $g'(\xi_1) = 0$ και $g'(\xi_2) = 0$. Η g' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με $g''(x) = f'(x) - e^x(x+2)$. Επειδή $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = e^\xi(\xi+2)$ άτοπο. Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = xe^x$ δεν έχει 3 ρίζες και έχει το πολύ δύο.

94. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x^2 + x - 2$. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τέσσερις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$.

Η f είναι συνεχής στα $[ρ_1, ρ_2], [ρ_2, ρ_3], [ρ_3, ρ_4]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(ρ_1, ρ_2), (ρ_2, ρ_3), (ρ_3, ρ_4)$ με παράγωγο $f'(x) = e^x - 2x + 1$.

Επειδή $f(ρ_1) = f(ρ_2) = f(ρ_3) = f(ρ_4) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $ξ_1 \in (ρ_1, ρ_2), ξ_2 \in (ρ_2, ρ_3), ξ_3 \in (ρ_3, ρ_4)$ τέτοια, ώστε $f'(ξ_1) = 0, f'(ξ_2) = 0, f'(ξ_3) = 0$.

Η f' είναι συνεχής στα $[ξ_1, ξ_2], [ξ_2, ξ_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(ξ_1, ξ_2), (ξ_2, ξ_3)$ με παράγωγο $f''(x) = e^x - 2$. Επειδή $f'(ξ_1) = f'(ξ_2) = f'(ξ_3) = 0$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $ξ_4 \in (ξ_1, ξ_2), ξ_5 \in (ξ_2, ξ_3)$ τέτοια, ώστε $f''(ξ_4) = 0$ και $f''(ξ_5) = 0$. Είναι $f''(ξ_4) = 0 \Leftrightarrow e^{ξ_4} = 2 \Leftrightarrow ξ_4 = \ln 2$ και $f''(ξ_5) = 0 \Leftrightarrow e^{ξ_5} = 2 \Leftrightarrow ξ_5 = \ln 2$, άρα $ξ_4 = ξ_5$ άτοπο. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - x^2 + x - 2 = 0$ δεν έχει 4 ρίζες άρα έχει το πολύ τρεις ρίζες.

Αυξημένης δυσκολίας

95.α) Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 3 ρίζες x_1, x_2, x_3 με $x_1 < x_2 < x_3$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$. Επειδή $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχουν $ξ_1 \in (x_1, x_2), ξ_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε $f'(ξ_1) = 0$ και $f'(ξ_2) = 0$. Η f' είναι συνεχής στο $[ξ_1, ξ_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(ξ_1, ξ_2)$. Επειδή $f'(ξ_1) = f'(ξ_2) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $ξ \in (ξ_1, ξ_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(ξ) = 0$ άτοπο. Επομένως η f δεν έχει 3 ρίζες άρα έχει το πολύ δύο ρίζες.

β) Έστω $f(x) = e^x - (e-1)x - 1$. Είναι $f(1) = f(0) = 0$.

Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = e^x - e + 1$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = e^x$.

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) \neq 0$, από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = (e-1)x + 1$ έχει το πολύ 2 ρίζες, άρα οι λύσεις $x = 0, x = 1$ είναι οι μοναδικές λύσεις της εξίσωσης.

96. Επειδή η C_f έχει με την C_φ τέσσερα κοινά σημεία, η εξίσωση

$f(x) = \varphi(x)$ έχει 4 ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$. Έστω

$$g(x) = f(x) - \varphi(x).$$

Η g είναι συνεχής στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], [\rho_3, \rho_4]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 6x - 5$. Επειδή $g(\rho_1) = g(\rho_2) = g(\rho_3) = g(\rho_4) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2), \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3), \xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοια, ώστε

$g'(\xi_1) = 0, g'(\xi_2) = 0, g'(\xi_3) = 0$. Η g' είναι συνεχής στα $[\xi_1, \xi_2], [\xi_2, \xi_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(\xi_1, \xi_2), (\xi_2, \xi_3)$ με παράγωγο $g''(x) = f''(x) - 6$. Επειδή $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = g'(\xi_3) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχουν $\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2), \xi_5 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοια, ώστε

$g''(\xi_4) = 0$ και $g''(\xi_5) = 0$. Η g'' είναι συνεχής στο $[\xi_4, \xi_5]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_4, ξ_5) με $g^{(3)}(x) = f^{(3)}(x)$. Επειδή $g''(\xi_4) = g''(\xi_5)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $g^{(3)}(x) = 0 \Leftrightarrow f^{(3)}(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

97. Έστω $f(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 - 12ax + 1, x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η f έχει 4 ρίζες, τις $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], [\rho_3, \rho_4]$ και παραγωγίσιμη στα

$$(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4) \text{ με παράγωγο } f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2ax - 12a \text{ και}$$

$f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = f(\rho_4) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2), \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ και $\xi_3 \in (\rho_3, \rho_4)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_2) = 0$ και $f'(\xi_3) = 0$. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2], [\xi_2, \xi_3]$ και παραγωγίσιμη στα (ξ_1, ξ_2)

$$(\xi_2, \xi_3) \text{ με παράγωγο } f''(x) = 12x^2 + 12x + 2a, f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$$

άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2)$ και $\xi_5 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοια, ώστε: $f''(\xi_4) = 0$ και $f''(\xi_5) = 0$.

Δηλαδή η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες. Όμως η f'' είναι 2^{ου} βαθμού οπότε έχει το πολύ 2 ρίζες. Άρα η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες οπότε $\Delta > 0 \Leftrightarrow 12^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2a > 0 \Leftrightarrow 144 - 96a > 0 \Leftrightarrow$

$$a < \frac{144}{96} = \frac{3}{2}. \text{ Επειδή } a \in \mathbb{N}^* \text{ και } a < \frac{3}{2} \text{ είναι } a = 1.$$

Ακριβώς μία ρίζα

98. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = xe^x + 1 - e^x, x \in \mathbb{R}$. Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x = 0$. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0, \rho]$ ή $[\rho, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$ με παράγωγο $f'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x, f(0) = f(\rho) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi e^\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ άτοπο. Επομένως η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

99.α) Έστω $f(x) = x^3 - 2 - 3 \ln x, x \in [1, 2]$. Είναι $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 3(2 - \ln 2) > 0$, άρα $f(1)f(2) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0^3 = 2 + 3 \ln x_0$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (1, 2)$ με $\rho_1 < \rho_2$. Τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο

$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3x^3 - 3}{x}$ και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (1, 2)$ τέτοιο, ώστε,

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\xi^3 - 3}{\xi} = 0 \Leftrightarrow 3\xi^3 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\xi^3 = 3 \Leftrightarrow \xi^3 = 1 \Leftrightarrow \xi = 1 \text{ άτοπο. Άρα}$$

το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(1, 2)$.

β) $x^4 - x^3 = 30 - 20x^2 \Leftrightarrow x^4 - x^3 + 20x^2 - 30 = 0$. Έστω

$f(x) = x^4 - x^3 + 20x^2 - 30, x \in [1, 2]$. Είναι $f(1) = -10 < 0, f(2) = 58 > 0$, οπότε $f(1)f(2) < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολωνυμική, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$. Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (1, 2)$ με $\rho_1 < \rho_2$. Η f είναι

συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 40x$ και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (1, 2)$ τέτοιο, ώστε, $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 4\xi^3 - 3\xi^2 + 40\xi = 0 \Leftrightarrow \xi(4\xi^2 - 3\xi + 40) = 0 \Leftrightarrow$

($\xi = 0$ απορρίπτεται) ή $4\xi^2 - 3\xi + 40 = 0$ η οποία δεν έχει πραγματικές λύσεις, αφού $\Delta < 0$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει δύο ρίζες στο $(1, 2)$ οπότε έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

Αυξημένης δυσκολίας

100.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \eta\mu x + x^3$. Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ η $x = 0$. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0, \rho]$ ή $[\rho, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$ με παράγωγο $f'(x) = 1 - \sin x + 3x^2$, $f(0) = f(\rho) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin \xi + 3\xi^2 = 0$ (1).

Όμως $1 - \sin \xi \geq 0$ και $3\xi^2 \geq 0$, οπότε η (1) αληθεύει μόνο αν $1 - \sin \xi = 0$ και $3\xi^2 = 0$, άρα $\xi = 0$ που είναι άτοπο. Επομένως η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x - e^{-x}$. Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ η $x = 0$. Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0, \rho]$ ή $[\rho, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $(0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$ με παράγωγο $f'(x) = e^x - 1 + e^{-x}$, $f(0) = f(\rho) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi - 1 + e^{-\xi} = 0 \Leftrightarrow$

$$e^\xi - 1 + \frac{1}{e^\xi} = 0 \Leftrightarrow (e^\xi)^2 - e^\xi + 1 = 0. \text{ Θέτουμε } e^\xi = \omega > 0 \text{ οπότε έχουμε την}$$

δευτεροβάθμια εξίσωση $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, η οποία άρα δεν έχει πραγματικές λύσεις αφού $\Delta < 0$. Επομένως η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

101. Έστω $f(x) = x^5 - x^3 + 15x - 1821$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το } \mathbb{R}.$$

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f , η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολωνυμική, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

παράγωγο $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 15$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 5\xi^4 - 3\xi^2 + 15 = 0.$$

Έστω $\xi^2 = \omega$ τότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $5\omega^2 - 3\omega + 15 = 0$, η οποία δεν έχει πραγματικές λύσεις αφού έχει $\Delta < 0$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει 2 ρίζες οπότε έχει ακριβώς μία ρίζα.

102. Έστω $f(x) = e^{3x} - 3e^{2x} + 15e^x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (0 - 0 + 0 - 2) = -2$, άρα υπάρχει $\alpha < 0$ τέτοιος ώστε

$$f(\alpha) < 0. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{e^x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, u \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (u^3 - 3u^2 + 15u - 2) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^3 = +\infty, \text{ άρα}$$

υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha)f(\beta) < 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) . Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} + 15e^x$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3e^{3\xi} - 6e^{2\xi} + 15e^\xi = 0 \Leftrightarrow 3e^\xi (e^{2\xi} - 2e^\xi + 5) = 0 \Leftrightarrow e^\xi = 0$ αδύνατο ή $e^{2\xi} - 2e^\xi + 5 = 0$. Θέτουμε $e^\xi = \omega > 0$ οπότε προκύπτει η δευτεροβάθμια εξίσωση $\omega^2 - 2\omega + 5 = 0$ με $\Delta = -16 < 0$ άρα δεν έχει πραγματικές λύσεις. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει δύο ρίζες, οπότε η ρίζα που προέκυψε από το θεώρημα Bolzano είναι μοναδική.

103. Έχουμε $\frac{1}{3} < f(x) < 1$ (1). Έστω $g(x) = f(x) - \frac{x}{3}$, $x \in [1, 3]$.

$$\text{Είναι } g(1) = f(1) - \frac{1}{3} < 0, g(3) = f(3) - \frac{1}{3} > 0.$$

(Από τη σχέση (1) για $x = 1, 3$ αντίστοιχα έχουμε $\frac{1}{3} < f(1) < 1 \Rightarrow f(1) - \frac{1}{3} < 0$

$$\text{και } \frac{1}{3} < f(3) < 1 \Rightarrow f(3) - \frac{1}{3} > 0)$$

Επομένως $g(1)g(3) < 0$, η g είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε

η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (α, β) . Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (1, 3)$ με $x_1 < x_2$. Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και

παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{3}$, άρα

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$

τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{1}{3}$ άτοπο.

Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν έχει δύο ρίζες οπότε η ρίζα από το θεώρημα

Bolzano είναι η μοναδική της ρίζα.

$$104. \alpha) \quad xf'(x) = f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως

πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}. \text{ Είναι } g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0, g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = 0 = g(\alpha), \text{ άρα}$$

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο, ώστε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) = f(x_0)$.

β) Έστω ότι η εξίσωση $h(x) = xf'(x) - f(x) = 0$ έχει και δεύτερη ρίζα

$x_1 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_0) με

παράγωγο $h'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x)$. Επειδή $h(x_1) = h(x_0) = 0$

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_0)$

τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \overset{\xi > 0}{\xi f''(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 0$ άτοπο. Επομένως το x_0

είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = f(x)$.

105. Έστω $g(x) = f(x) - x^4$, $x \in [-1, 1]$. Η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και

παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 4x^3$. Επειδή

$g(-1) = f(-1) - 1 = f(1) - 1 = g(1)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος

Rolle οπότε, η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα

στο $(-1, 1)$.

Έστω ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ με $x_1 < x_2$. Η g' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $g''(x) = f''(x) - 12x^2$. Επειδή $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 12\xi^2$ άτοπο. Άρα η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 1)$.

106. Έστω $g(x) = f(x) - \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$. Η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - \sigma \nu x$. Επειδή $g(0) = f(0) = f(\pi) = g(\pi)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \sigma \nu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 1)$. Έστω ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ με $x_1 < x_2$. Η g' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $g''(x) = f''(x) + \eta \mu x$. Επειδή $g'(x_1) = g'(x_2) = 0$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) + \eta \mu \xi = 0$ άτοπο. Άρα η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \sigma \nu x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, \pi)$.

107. Έστω $M(\xi, f(\xi))$. Η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση :

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi). \text{ Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει: } -f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \quad (1).$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}. \text{ Είναι } g(a) = \frac{f(a)}{a} = \frac{\kappa \alpha'}{\alpha'} = \kappa, g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{\kappa \beta'}{\beta'} = \kappa$$

οπότε $g(a) = g(\beta)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

επομένως η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, β) . Έστω ότι η εξίσωση $xf'(x) - f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες

$x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = xf'(x) - f(x)$.
 Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο
 $h'(x) = xf''(x)$. Επειδή $h(x_1) = h(x_2) = 0$, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του
 θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε
 $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 0$ άτοπο. Άρα η εξίσωση $xf'(x) - f(x) = 0$
 έχει μοναδική ρίζα στο (a, b) .

108. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$, $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f(0) = f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως

πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του

θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in (0, 1) \subseteq [-1821, 1821]$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 - (a+b+c) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4ax_0^3 + 3bx_0^2 + 2cx_0 = a+b+c.$$

Θα αποδείξουμε ότι η ρίζα είναι μοναδική. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c)$ έχει και δεύτερη ρίζα x_1 με $x_1 < x_0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_0]$ ως πολυωνυμική, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_0)

με παράγωγο $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$ και $f'(x_1) = f'(x_0) = 0$ άρα.

ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12ax^2 + 6bx + 2c = 0 \Leftrightarrow 6ax^2 + 3bx + c = 0$ (1) έχει τουλάχιστον
 μία ρίζα στο (x_1, x_2) .

Όμως η (1) είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 9b^2 - 24ac = 3(3b^2 - 8ac) < 0$ οπότε δεν
 έχει πραγματικές λύσεις, το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως, η εξίσωση $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$ έχει ακριβώς μία λύση στο
 διάστημα $[-1821, 1821]$.

Περισσότερες από μία ρίζες - Πλήθος ριζών εξίσωσης

109. α) Είναι $f(-\pi) = 2\pi^2 + 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$, $f(\pi) = 2\pi^2 - 1 > 0$

Είναι $f(-\pi)f(0) < 0$, $f(0)f(\pi) < 0$ και η f είναι συνεχής στα $[-\pi, 0]$, $[0, \pi]$,

οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα υπάρχουν

$x_1 \in (-\pi, 0)$, $x_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$.

β) Έστω ότι η f έχει και τρίτη ρίζα x_3 με $-\pi < x_1 < x_2 < x_3 < \pi$. Η f είναι συνεχής στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ με παράγωγο $f'(x) = 4x - \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = x(4 - \sigma\upsilon\nu x)$. Επειδή $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε $g'(\xi_1) = 0, g'(\xi_2) = 0$.
Είναι $g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow \xi_1(4 - \sigma\upsilon\nu \xi_1) = 0 \Leftrightarrow (\xi_1 = 0) \text{ ή } (\sigma\upsilon\nu \xi_1 = 4 \text{ αδύνατο})$.
Επίσης $g'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow \xi_2(4 - \sigma\upsilon\nu \xi_2) = 0 \Leftrightarrow (\xi_2 = 0) \text{ ή } (\sigma\upsilon\nu \xi_2 = 4 \text{ αδύνατο})$.
Άρα $\xi_1 = \xi_2$ που είναι αδύνατο. Επομένως η f δεν έχει 3 ρίζες άρα έχει ακριβώς 2 ρίζες στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

110. Είναι $f(-4) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f(2) = f(6) = 0$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[-4, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 2\right], [2, 6]$ σαν πολωνυμική,

παραγωγίσιμη στα διαστήματα $\left(-4, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 2\right), (2, 6)$ με παράγωγο

$$f'(x) = (x-2)^2(x-6)(12x^3 - 25x^2 - 68x + 148) \text{ άρα ικανοποιούνται οι}$$

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in \left(-4, \frac{1}{3}\right), \xi_2 \in \left(\frac{1}{3}, 2\right)$,

και $\xi_3 \in (2, 6)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$.

Επίσης $f'(2) = f'(6) = 0$.

Όμως η f' έχει τύπο πολώνυμο βου βαθμού άρα έχει το πολύ 6 ρίζες.

Επομένως έχει ακριβώς 6 ρίζες : διπλή ρίζα το 2, 6, ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Σύνθετες ασκήσεις

111. α) Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ σαν πολωνυμική και παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$. Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\rho_1 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε: $f'(\rho_1) = 0$.

β) Είναι $f(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ οπότε.

Από α) ερώτημα $f'(p_1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \alpha(p_1 - x_2)(p_1 - x_3) + \alpha(p_1 - x_1)(p_1 - x_3) + \alpha(p_1 - x_1)(p_1 - x_2) = 0 \stackrel{\alpha}{\Leftrightarrow} \\ & (p_1 - x_2)(p_1 - x_3) + (p_1 - x_1)(p_1 - x_3) + (p_1 - x_1)(p_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow \\ & (p_1 - x_1)(p_1 - x_2) = -(p_1 - x_2)(p_1 - x_3) - (p_1 - x_1)(p_1 - x_3) \Leftrightarrow \\ & (p_1 - x_1)(p_1 - x_2) = (p_1 - x_3)[-(p_1 - x_2) - (p_1 - x_1)] \Leftrightarrow \\ & (p_1 - x_1)(p_1 - x_2) = (p_1 - x_3)(x_1 + x_2 - 2p_1). \text{Είναι } p_1 - x_1 > 0, p_1 - x_2 < 0, \\ & p_1 - x_3 < 0, \text{ οπότε } x_1 + x_2 - 2p_1 > 0 \Leftrightarrow p_1 < \frac{x_1 + x_2}{2}, \end{aligned}$$

άρα το p_1 βρίσκεται πιο κοντά στο x_1 .

γ) Η f είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$ σαν πολυωνυμική και παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$. Είναι $f(x_2) = f(x_3) = 0$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $p_2 \in (x_2, x_3)$, τέτοιο, ώστε: $f'(p_2) = 0$.

Η f' έχει τύπο τριώνυμο άρα έχει το πολύ δύο ρίζες.

Επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες τις p_1, p_2 .

δ) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει 2 ρίζες, άρα

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 12\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 > 12\alpha\gamma \Leftrightarrow \beta^2 > 3\alpha\gamma.$$

ε) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6ax + 2\beta$.

Άρα $f''(p_1) + f''(p_2) = 6ap_1 + 6ap_2 = 6a(p_1 + p_2) + 4\beta$. Όμως, από τους τύπους

του Vieta είναι: $p_1 + p_2 = -\frac{2\beta}{3a}$, οπότε:

$$f''(p_1) + f''(p_2) = -6a\frac{2\beta}{3a} + 4\beta = -4\beta + 4\beta = 0.$$

112. α) Έστω $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, a \in \mathbb{R}^*, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(0) = \delta = 0$. Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

παράγωγο $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$, δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 6ax + 2\beta$ και τρίτη παράγωγο $f^{(3)}(x) = 6a$.

Είναι $f'(1) = 3 \Leftrightarrow 3a + 2\beta + \gamma = 3$ (1), $f''(1) = 6 \Leftrightarrow 6a + 2\beta = 6 \Leftrightarrow 3a + \beta = 3$ (2), $f^{(3)}(1) = 6 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1$. Επομένως από τη σχέση (2) $3 + \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = 0$ και

από τη σχέση $(1) 3 + \gamma = 3 \Leftrightarrow \gamma = 0$. Άρα ο τύπος της f είναι $f(x) = x^3$.

β) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A είναι :

$$(ε) : y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y - a^3 = 3a^2(x - a) \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3.$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής $(ε)$ και C_f λύνουμε την εξίσωση

$$f(x) = 3a^2x - 2a^3 \Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - a^2x - 2a^2x + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x^2 - a^2) - 2a^2(x - a) = 0 \Leftrightarrow x(x - a)(x + a) - 2a^2(x - a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - a)(x^2 + ax - 2a^2) = 0 \Leftrightarrow (x - a) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ή}$$

$$(x^2 + ax - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - a^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - a)(x + a) + a(x - a) = 0 \Leftrightarrow (x - a)(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -2a).$$

$$\text{Είναι } f(-2a) = (-2a)^3 = -8a^3.$$

Άρα έχουν και άλλο κοινό σημείο εκτός από το M το $N(-2a, -8a^3)$.

$$\text{ii. Είναι } f'(-2a) = 3(-2a)^2 = 3 \cdot 4a^2 = 4 \cdot 3a^2 = 4f'(a).$$

Άρα η κλίση της C_f στο N είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M

γ) Είναι $f(x) = 1 - x \Leftrightarrow x^3 + x - 1 = 0$. Έστω $\varphi(x) = x^3 + x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0) = -1, \varphi(1) = 1$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(1) < 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ σαν πολυωνυμική, άρα ικανοποιούνται οι

υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 - x \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (0, 1). \text{ Επομένως } \alpha = 0.$$

δ) i. Είναι $h(x) = (f(x) - 1)\eta\mu x = (x^3 - 1)\eta\mu x, x \in [0, 1]$.

Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο $h'(x) = 3x^2\eta\mu x + (x^3 - 1)\sigma\upsilon\nu x$. Είναι

$$h(0) = (0^3 - 1)\eta\mu 0 = 0, h(1) = (1^3 - 1)\eta\mu 1 = 0 \text{ άρα } h(0) = h(1),$$

οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως η εξίσωση

$$h'(x) = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (0, 1).$$

$$\text{ii. Για κάθε } x \in (0, 1) \text{ είναι: } \varepsilon\varphi x = \frac{1 - x^3}{3x^2} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - x^3}{3x^2} \Leftrightarrow$$

$$3x^2\eta\mu x = (1 - x^3)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 3x^2\eta\mu x - (1 - x^3)\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2\eta\mu x + (x^3 - 1)\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow h'(x) = 0 \text{ η οποία από το προηγούμενο ερώτημα}$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

$$113. \alpha) \text{ Είναι } x^2(f^2(x)-1)-1=0 \Leftrightarrow x^2(f^2(x)-1)=1 \Leftrightarrow f^2(x)-1=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)=1+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=0 \Leftrightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1 \text{ αδύνατο,}$$

άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \neq 0$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(1)=\sqrt{2} > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε

$$x > 0, \text{ οπότε η (1) γίνεται: } f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

$$\beta) \text{ Για κάθε } x_1, x_2 \in (0, +\infty) \text{ με } x_1 < x_2 \text{ είναι } x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow$$

$$1+\frac{1}{x_1^2} > 1+\frac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x_1^2}} > \sqrt{1+\frac{1}{x_2^2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x_1^2+1}{x_1^2}} > \sqrt{\frac{x_2^2+1}{x_2^2}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x_1^2+1}}{x_1} > \frac{\sqrt{x_2^2+1}}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (0, +\infty).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι}$$

συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Είναι $A_{f^{-1}} = f((0, +\infty)) = (1, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ και $y > 1$ είναι

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=y \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=y \Leftrightarrow \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=y \Leftrightarrow 1+\frac{1}{x^2}=y^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2}=y^2-1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y^2-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, \text{ άρα } f^{-1}(y)=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, y > 1, \text{ οπότε}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1.$$

δ) Αρκεί η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ να έχει ακριβώς μια ρίζα.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-1) = x^2 \Leftrightarrow x^4-1 = x^2 \Leftrightarrow x^4-x^2-1 = 0$.

Θέτουμε $x^2 = \omega > 0$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - \omega - 1 = 0$ με ρίζες

$$\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ απορρίπτεται ή } \omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow \infty} [x(f(x) - \lambda)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \lambda x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) \right)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) = 1 - \lambda$, οπότε

- Αν $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} [x(f(x) - \lambda)] = +\infty$ απορρίπτεται.

- Αν $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} [x(f(x) - \lambda)] = -\infty$ απορρίπτεται.

Οπότε για να είναι $\lim_{x \rightarrow \infty} [x(f(x) - \lambda)] = 0$ πρέπει $1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [x(f(x) - \lambda)] = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \right) = 0.$$

114.α) Έστω ότι η f' δεν αντιστρέφεται επομένως δεν είναι 1-1.

Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$

και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του

θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$ άτοπο αφού

$f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμοια αν $x_1 > x_2$. Άρα η f' αντιστρέφεται.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$. Επίσης $f(0) = f(1)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0,1) : f'(\xi_1) = 0$.

γ) Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ είχε τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $x_3 \in (\rho_1, \rho_2), x_4 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(x_3) = f'(x_4) = 0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_3, x_4]$, παραγωγίσιμη στο (x_3, x_4) άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\eta \in (x_3, x_4)$ τέτοιο ώστε $f''(\eta) = 0$ άτοπο αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο το πολύ ρίζες.

δ) Είναι $f'(x) + (2x-1)f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-x}f'(x) + e^{x^2-x}(2x-1)f(x) = 0$
 $(e^{x^2-x} \cdot f(x))' = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{x^2-x}f(x)$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = e^{x^2-x}f'(x) + e^{x^2-x}(2x-1)f(x)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi^2-\xi}f'(\xi) + e^{\xi^2-\xi}(2\xi-1)f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + (2\xi-1)f(\xi) = 0$.

115. α) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, είναι $2^{x_1} < 2^{x_2}$ (1) και $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 - 1 < x_2^3 - 1$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1),(2) έχουμε

$$2^{x_1} + x_1^3 - 1 < 2^{x_2} + x_2^3 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0$ και για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$.

Επίσης $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0)$ ή $(x^2 - x + 2 = 0)$ η οποία έχει $\Delta < 0$ άρα δεν έχει πραγματικές λύσεις.

Επειδή $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $g(x) = x(x^2 - x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $g(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

β) Είναι $g(0) = 0 < g(1) = 2$ οπότε η g δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\gamma) \text{ Είναι: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3 - x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x(x^2 - x + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2 - x + 2} = \frac{f'(0)}{2}. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με παράγωγο}$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 3x^2, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{2} = \frac{\ln 2}{2}.$$

δ) Παρατηρούμε ότι $f(0) = g(0) = 0$ και $f(1) = g(1) = 2$, οπότε οι C_f, C_g έχουν κοινά σημεία τα O, A . Έστω ότι οι C_f, C_g έχουν τρία κοινά σημεία με τετμημένες ρ_1, ρ_2, ρ_3 (δύο από τα οποία είναι τα 0 και 1) με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$.

Η h είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$. Επειδή $h(\rho_1) = h(\rho_2) = h(\rho_3) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε $h'(\xi_1) = 0$ και $h'(\xi_2) = 0$. Η h' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με παράγωγο $h''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2$. Επειδή $h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{2^{\xi} \ln^2 2}_{>0} = -2$ που είναι άτοπο,

άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τους αριθμούς 0 και 1 και οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

ε) Επειδή η h έχει μοναδικές ρίζες τα $x = 0$ και $x = 1$, είναι $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $h(2) = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$, άρα $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ για κάθε $x > 1$.

$$116. \alpha) \text{ i. Είναι } \frac{e^{f(f(x))}}{e^{f(x)}} = e^{g(f(x))} \Leftrightarrow \ln \frac{e^{f(f(x))}}{e^{f(x)}} = \ln e^{g(f(x))} \Leftrightarrow$$

$$\ln e^{f(f(x))} - \ln e^{f(x)} = g(f(x)) \Leftrightarrow f(f(x)) - f(x) = g(f(x)) \quad (1).$$

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στην (1) οπότε :

$$f(f(f^{-1}(x))) - f(f^{-1}(x)) = g(f(f^{-1}(x))) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x$$

ii. Είναι $f(x) - g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = g(x) + x$. Η f είναι συνεχής στο $[p_1, p_2]$, $f(p_1) \cdot f(p_2) = (g(p_1) + p_1)(g(p_2) + p_2) = p_1 \cdot p_2 < 0$ αφού p_1, p_2 ρίζες της εξίσωσης $g(x) = 0$ και ετερόσημες..

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (p_1, p_2) .

β) Είναι $f(x) - g(x) = x \Leftrightarrow g(x) = f(x) - x$.

Πρέπει $f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow f'(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = 0$. Η g είναι συνεχής στο $[p_1, p_2]$, παραγωγίσιμη στο (p_1, p_2) , $g(p_1) = g(p_2) = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (p_1, p_2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1$. Άρα υπάρχει σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (p_1, p_2)$, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στο A να είναι παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

117.α) Είναι $x[f'(x) - 2x] = f(x) - x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - 2x^2 = f(x) - x^2 \Leftrightarrow$

$$xf'(x) - f(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} - x \right)' = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x} - x$.

Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο. Επίσης $g(1) = f(1) - 1$,

$$g(2) = \frac{f(2)}{2} - 2 = \frac{f(2) - 2 - 2}{2} = \frac{f(2) - 4}{2} = f(1) - 1 = g(1) \text{ άρα ισχύουν οι}$$

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) - \xi^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xi f'(\xi) - f(\xi) - 2\xi^2 + \xi^2 = 0 \Leftrightarrow \xi(f'(\xi) - 2\xi) = f(\xi) - \xi^2.$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = xf'(x) - f(x) - x^2$.

Έστω ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει και δεύτερη ρίζα $\xi_1 \in (1, 2)$ με $\xi_1 < \xi$.

Η h είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ) με

$$\text{παράγωγος } h'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) - 2x = xf''(x) - 2x = x(f''(x) - 2).$$

Επειδή $h(\xi_1) = h(\xi) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x(f''(x) - 2) = 0 \Leftrightarrow f''(x) = 2 \quad \text{από το } f''(x) \neq 2 \text{ για κάθε } x \in (1, 2). \text{ Επομένως το } \xi \text{ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης } h(x) = 0.$$

γ). Η εφαπτομένη στο $M(\xi, g(\xi))$ έχει εξίσωση : $y - k(\xi) = k'(\xi)(x - \xi)$.

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει:

$$-k(\xi) = -\xi k'(\xi) \Leftrightarrow -f(\xi) + \xi^2 = -\xi(f'(\xi) - 2\xi) \Leftrightarrow \xi(f'(\xi) - 2\xi) = f(\xi) - \xi^2, \text{ ισχύει από α) ερώτημα.}$$

$$\mathbf{118. \alpha)} \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2\eta\mu^3 x + \alpha x + 1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \alpha = f(0).$$

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ και αυτό συμβαίνει όταν

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\mathbf{\beta)} \text{ Είναι } f(x) = \begin{cases} 2\eta\mu^3 x + x + 1, & x < 0 \\ 2\eta\mu^2 x - x^2 + x + 1, & x \geq 0 \end{cases},$$

$$f(-\pi) = 2\eta\mu^3(-\pi) - \pi + 1 = 1 - \pi < 0, \quad f(0) = 1 \text{ οπότε } f(-\pi)f(0) < 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

γ) Είναι $f(\pi) = 2\eta\mu^2\pi - \pi^2 + \pi + 1 = -\pi^2 + \pi + 1$. Επειδή $f(-\pi) \neq f(\pi)$ δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-\pi, \pi]$.

$$\mathbf{\delta)} \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\eta\mu^3 x + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2\eta\mu^2 x + \frac{\eta\mu x}{x} + 1 \right) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu^2 x - x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\eta\mu x - \frac{\eta\mu x}{x} - x + 1 \right) = 1$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, 0)$ με παράγωγο

$f'(x) = 6\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x + 1$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο

$f'(x) = 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2x + 1$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi, \pi)$.

Είναι $f(\pi) = 2\eta\mu^2 \pi - \pi^2 + \pi + 1 = -\pi^2 + \pi + 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$ δηλαδή

$f(\pi)f(0) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_2 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και

$f(x_1) = f(x_2) = 0$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (-\pi, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-4, 0]$ ως σύνθεση συνεχών,

είναι παραγωγίσιμη στο $(-4, 0)$ με $f'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}$ και

$f(-4) = f(0) = \sqrt{5}$, οπότε σύμφωνα με το θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (-4, 0)$ τέτοιο,

ώστε: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\xi+4}{2\sqrt{\xi^2+4\xi+5}} = 0 \Leftrightarrow 2\xi+4 = 0 \Leftrightarrow \xi = -2$.

Σωστή απάντηση Γ.

2. Πρέπει $f(-1) = f(1) \Leftrightarrow 1 + \beta = 1 + \alpha + \gamma + 3 \Leftrightarrow \beta = \gamma + \alpha + 3$ (1). Η f θα είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, οπότε θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \alpha \eta\mu(\pi x) + \beta) = \beta = f(0)$$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + \gamma x + \alpha + 3) = \alpha + 3$ οπότε $\beta = \alpha + 3$ (2). Από (1), (2) θα είναι $\gamma = 0$. Επίσης η f θα είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, οπότε θα είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \alpha \eta\mu(\pi x) + \beta - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \alpha \pi \frac{\eta\mu(\pi x)}{\pi x} \right) = \alpha \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + \gamma x + \alpha + 3 - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + \gamma) = \gamma \text{ οπότε}$$

$\alpha \pi = \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και από την (1) θα είναι $\beta = 3$ **Σωστή απάντηση Γ.**

3. Είναι $f(x_1) = f(x_2) = 0$, η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ με $f'(x) = 2\alpha x + \beta$. Συνεπώς, από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha\xi + \beta = 0 \Leftrightarrow \xi = -\frac{\beta}{2\alpha}. \text{ Σωστή απάντηση Γ.}$$

4. Η Α. $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ απορρίπτεται γιατί δεν ξέρουμε το πρόσημο των α, β , οπότε δεν ορίζεται αν $x \in [\alpha, \beta]$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η Β. $g(x) = \frac{x}{f(x)}$ απορρίπτεται γιατί δεν ξέρουμε αν $f(x) \neq 0$ στο $[\alpha, \beta]$.

Η Γ. $g(x) = xf(x)$ απορρίπτεται γιατί δεν ισχύει $g(\alpha) = g(\beta) \Leftrightarrow \alpha f(\alpha) = \beta f(\beta)$.

Η Δ. $g(x) = \frac{x}{f(x) - x}$ είναι σωστή γιατί ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$ και $g(\alpha) = g(\beta) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{f(\alpha) - \alpha} = \frac{\beta}{f(\beta) - \beta} \Leftrightarrow \alpha f(\beta) - \alpha\beta = \beta f(\alpha) - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha f(\beta) = \beta f(\alpha) \text{ και}$$

$$g'(x) = \frac{f(x) - x - x(f'(x) - 1)}{(x - f(x))^2} = \frac{f(x) - xf'(x)}{(x - f(x))^2}. \text{ Σωστή απάντηση Δ.}$$

5. Στη σχέση $f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\xi)}{\xi - \beta}$ αν θέσουμε όπου ξ το x τότε η σχέση γίνεται

$$f'(x) = \frac{f(\alpha) - f(x)}{x - \beta} \Leftrightarrow f'(x)(x - \beta) = f(\alpha) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)(x - \beta) + f(x) - f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow [f(x)(x - \beta) - f(\alpha)x]' = 0$$

Άρα εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την συνάρτηση $g(x) = (x - \beta)f(x) - f(\alpha)x$ αφού $g(\alpha) = f(\alpha)(\alpha - \beta) - \alpha f(\alpha) = -\beta f(\alpha)$ και $g(\beta) = -\beta f(\alpha)$ οπότε $g(\alpha) = g(\beta)$. Σωστή απάντηση Α.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	2. Σ	3. Σ	4. Λ	5. Σ	6. Λ	7. Σ	8. Λ	9. Σ	10. Λ
11. Σ	12. Λ	13. Λ							

1ο Κριτήριο αξιολόγησης έως και το Θεώρημα Rolle

Θέμα Α

A1.α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

A2. α) $f'(-1) = g'(-1) = \varepsilon \varphi 60^\circ = \sqrt{3}$

β) Επειδή διέρχεται από το $(1,0)$ η (ε) έχει εξίσωση:

$$y = \sqrt{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}.$$

γ) Το σημείο $A(-1, f(-1)) \equiv A(-1, g(-1))$ ανήκει στην (ε) οπότε

$$f(-1) = \sqrt{3} \cdot (-1) - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3} = g(-1).$$

δ) Είναι $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ άρα

$$(f \cdot g)'(1) = f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) = -12.$$

Θέμα Β

B1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ τότε είναι :

• συνεχής σ' αυτό, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + \alpha x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 2) = 2 \Leftrightarrow \beta = 2.$$

• Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, ισχύει ότι:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + \alpha x + \beta - 2}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 2 - 2}{x} \Leftrightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}(x + \alpha)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} \Leftrightarrow f'(0) = \alpha = 2.$$

B2. Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$. Για κάθε $x < 0$ είναι

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1.$$

$$\text{Είναι } (x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(-1).$$

Για $x \geq 0$ είναι $2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$. Άρα $f(x) \geq f(-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f έχει ελάχιστο το 1 στο $x = -1$.

B3. ε: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 2 = 2x \Leftrightarrow y = 2x + 2$. Για $x < 0$ η f είναι

παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2x + 2$. Η ε δέχεται εφαπτομένη

παράλληλη στην ε , αν και μόνο αν υπάρχει $x_1 < 0$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_1) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow 2x_1 + 2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ αδύνατο. Άρα η } C_\varepsilon \text{ δεν δέχεται}$$

εφαπτομένη παράλληλη στην ε στο $(-\infty, 0)$.

B4. Έστω $M(x(t), y(t))$ όπου το χρονός σε sec με $t \geq 0$. Επειδή το M κινείται

επί της C_f και βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο, είναι $y(t) = 2x(t) + 2$, με

$$x'(t) = 0,5 \text{ μ.μ. / sec} .$$

α) Το τρίγωνο OAM έχει εμβαδόν:

$$E(t) = \frac{1}{2}(OA)(BM) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x(t) = x(t) ,$$

Είναι $E'(t) = x'(t) = 0,5 \text{ μ.μ.}^2 / \text{sec}$, οπότε το εμβαδόν

του

τριγώνου OAM αυξάνεται με σταθερό ρυθμό.

β) Έστω $MOx = \theta$, τότε

$$\varepsilon\phi\theta(t) = \frac{M\Gamma}{O\Gamma} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{2x(t)+2}{x(t)} = 2 + \frac{2}{x(t)} . \text{ Είναι}$$

$$(\varepsilon\phi\theta(t))' = \left(2 + \frac{2}{x(t)}\right)' \Rightarrow \frac{1}{\sin^2\theta(t)}\theta'(t) = -\frac{2x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t) = -\frac{2x'(t)}{x^2(t)}\sin^2\theta(t) . \text{ Έστω } t_0 \text{ η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από}$$

το K, τότε: $x(t_0) = 2, y(t_0) = 6$ και

$$OM = d(t_0) = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} .$$

$$\text{Είναι } \theta'(t_0) = -\frac{2x'(t_0)}{x^2(t_0)}\sin^2\theta(t_0) = -\frac{2 \cdot 0,5}{4} \left(\frac{2}{2\sqrt{10}}\right)^2 = -\frac{1}{40} \text{ rad / sec} .$$

B5. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $[0, +\infty)$ ως πολυωνυμική. Επειδή είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x + 2$. Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

1ο διάστημα

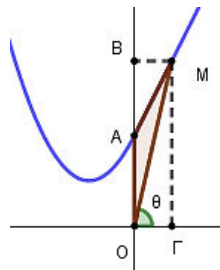
Για $x = -2$ είναι $f(-2) = 2$ και $f(0) = 2$. Στο διάστημα $[-2, 0]$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f.

2ο διάστημα

Είναι $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 = 5$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε $x_1 < 0$ με $f(x_1) = 5$.

Είναι: $x_1^2 + 2x_1 + 2 = 5 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 - 3 = 0$. Είναι $\Delta = 4 + 12 = 16$ και

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 2, x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3 . \text{ Όμως } x_1 < 0, \text{ άρα } x_1 = -3 .$$



Στο διάστημα $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f .

3ο διάστημα

Είναι $f(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε $x_1 < 0$ με $f(x_1) = 4$.

Είναι: $x_1^2 + 2x_1 + 2 = 4 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 - 2 = 0$. Είναι $\Delta = 4 + 8 = 12$ και

$$x_1 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}. \text{ Όμως } x_1 < 0, \text{ άρα } x_1 = -1 - \sqrt{3}. \text{ Στο διάστημα}$$

$[-1 - \sqrt{3}, 1]$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f .

Θέμα Γ

Γ1. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$ να έχει τουλάχιστον μια λύση.

Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 1 - x^3$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1 - x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$, οπότε υπάρχει $\gamma < 0$

τέτοιο, ώστε $h(\gamma) > 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1 - x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$,

οπότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $h(\delta) < 0$. Άρα $h(\gamma)h(\delta) < 0$, η h είναι

συνεχής στο $[\gamma, \delta]$ ως πολωνυμική οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του

θεωρήματος Bolzano, επομένως υπάρχει $x_0 \in (\gamma, \delta)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0).$$

Γ2. Είναι $h(0) = 1$, $h(1) = 1 + 1 - 1 = 1$, $h(2) = 4 + 1 - 8 = -3$. Επειδή

$h(1)h(2) < 0$ και η h είναι συνεχής, στο $[1, 2]$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του

θεωρήματος Rolle Bolzano οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία

ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$. Άρα $\alpha = 1$.

Γ3. Για κάθε $x \leq 0$ είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 1$, ενώ

$x^3 \leq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0$, οπότε $f(x) > g(x)$. Όταν $0 < x \leq 1$ είναι

$0 < x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 < x^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow 1 < f(x) \leq 2$ και $0 < x^3 \leq 1 \Leftrightarrow 0 < g(x) \leq 1$,

οπότε και πάλι $f(x) > g(x)$. Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με

$x_1 < x_2$. Τότε η h είναι συνεχής στο

$[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο $h'(x) = 2x - 3x^2$ και

$h(x_1) = h(x_2) = 0$, άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

οπότε, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow \xi(2 - 3\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi = 0 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } (2 - 3\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{2}{3} \text{ που απορρίπτεται}).$ Άρα η h δεν έχει 2 ρίζες στο $(1, +\infty)$ οπότε έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

Γ4.

Γ5. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα $f'(x) = 2x$ και $g'(x) = 3x^2$.

Η εφαπτομένη της C_g στο B είναι η ευθεία

$$\varepsilon_1: y - g(\rho) = g'(\rho)(x - \rho) \Leftrightarrow y - \rho^3 = 3\rho^2(x - \rho) \Leftrightarrow$$

$y = 3\rho^2x - 2\rho^3(1)$. Έστω σημείο $\Gamma(\rho_1, f(\rho_1))$. Η εφαπτομένη της C_f στο Γ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_2: y - f(\rho_1) = f'(\rho_1)(x - \rho_1) \Leftrightarrow y - \rho_1^2 - 1 = 2\rho_1(x - \rho_1) \Leftrightarrow y = 2\rho_1x - \rho_1^2 + 1$$

Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη πρέπει να υπάρχουν τιμές των ρ, ρ_1 για τις οποίες οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν

$$\begin{cases} 3\rho^2 = 2\rho_1 \\ -2\rho^3 = -\rho_1^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -2\rho^3 = -\left(\frac{3\rho^2}{2}\right)^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -2\rho^3 = -\frac{9\rho^4}{4} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ -8\rho^3 = -9\rho^4 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\rho^2}{2} = \rho_1 \\ 9\rho^4 - 8\rho^3 - 4 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$\varphi(x) = 9x^4 - 8x^3 - 4, x \leq 0$. Έστω $x_1 < x_2 \leq 0$, τότε $x_1^4 > x_2^4 \Leftrightarrow 9x_1^4 > 9x_2^4$

(4) και $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -8x_1^3 > -8x_2^3 \Leftrightarrow -8x_1^3 - 4 > -8x_2^3 - 4$ (5)

Με πρόσθεση των σχέσεων (4), (5) έχουμε

$$9x_1^4 - 8x_1^3 - 4 > 9x_2^4 - 8x_2^3 - 4 \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2) \text{ άρα η } \varphi \text{ είναι γνησίως}$$

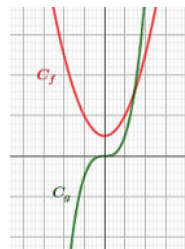
φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 9x^4 = +\infty$ και $\varphi(0) = -4$. Επειδή η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta = (-\infty, 0]$ έχει σύνολο τιμών το

$$\varphi(\Delta) = \left[\varphi(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \right) = [-4, +\infty). \text{ Επειδή } 0 \in \varphi(\Delta), \text{ υπάρχει μοναδικό}$$

$\rho \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho) = 0$. Είναι $\varphi(-1) = 13 > 0, \varphi(0) = -4 < 0$ οπότε

$\varphi(-1)\varphi(0) < 0$. Η φ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ άρα ικανοποιούνται οι



υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi) = 0$. Επειδή το ξ είναι μοναδικό, το ξ ταυτίζεται με το ρ άρα το ζητούμενο διάστημα είναι το $(-1, 0)$.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(x+1) - g(x) = (g \circ g)(x) \Leftrightarrow f(x+1) = g(x) + (g \circ g)(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2) = 1$, τότε $g(g(x_1)) = g(g(x_2)) = 2$. Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$$g(g(x_1)) + g(x_1) = g(g(x_2)) + g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1+1) = f(x_2+1) \Leftrightarrow x_1+1 = x_2+1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ άρα η } g \text{ είναι 1-1.}$$

Δ2. $g(g(x^2)) + g(x^2) = g(1) + g(g(1)) \Leftrightarrow f(x^2+1) = f(1+1) \Leftrightarrow x^2+1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Δ3. Είναι $g^{-1}(x) = f^{-1}(g(x) + x) - 1 \Leftrightarrow g^{-1}(x) + 1 = f^{-1}(g(x) + x) \Leftrightarrow f(g^{-1}(x) + 1) = g(x) + x$ (1). Θέτουμε $g^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = g(u)$, στην (1) οπότε έχουμε $f(u+1) = g(g(u)) + g(u)$, $u \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\Delta 4.a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(g(x)) + g(x)] \stackrel{g(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ u \rightarrow +\infty}} (g(u) + u) = +\infty.$$

Θέτουμε $x+1 = t$ οπότε έχουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. Όμοια και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

β) Έστω ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$ είναι $g(x_1 - 1) < g(x_2 - 1)$ (3) και $g(g(x_1 - 1)) < g(g(x_2 - 1))$ (4). Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4) έχουμε, $g(g(x_1 - 1)) + g(x_1 - 1) < g(g(x_2 - 1)) + g(x_2 - 1) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Όμοια αν η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ5. Είναι $g(x) = x - 2$ και $g(g(x)) = g(x) - 2 = x - 4$, οπότε:

$$f(x+1) = g(g(x)) + g(x) = x - 4 + x - 2 = 2x - 6.$$

Θέτουμε $x+1 = u \Leftrightarrow x = u - 1$, οπότε τότε $f(u) = 2(u - 1) - 6 = 2u - 8$, $u \in \mathbb{R}$, άρα $f(x) = 2x - 8$, $x \in \mathbb{R}$.

2ο Κριτήριο αξιολόγησης έως και το Θεώρημα Rolle

Θέμα Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f . Η νιοστή παράγωγος της f με $n \geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(n)}$ και είναι:

$$f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$$

A2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .

A3. α) Ψευδής

β) Έστω ότι $f(0) = f(3)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 3)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος άρα υπάρχει $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, πράγμα που δεν ισχύει όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της f' .

A4. α) β β) Δ γ) Δ δ) Δ ϵ) Σ

Θέμα Β

B1. Είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x > 0 / x \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty) = A_h$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{x \ln x} = e^{\ln x^x} = x^x = h(x)$$

B2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = h(x) \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = h(x)(\ln x + 1)$$

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$h''(x) = (h(x)(\ln x + 1))' = h'(x)(\ln x + 1) + h(x) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$h''(x) = h(x)(\ln x + 1)(\ln x + 1) + h(x) \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$h''(x) = h(x) \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right] = h(x) \left(\ln^2 x + 2 \ln x + 1 + \frac{1}{x} \right)$$

B3. Είναι $f'(x) = e^x$ και $f'(0) = 1 = f(0)$.

Η (ε) έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x + 1$

Για $y = 0$ είναι $x = -1$ και για $x = 0$ είναι $y = 1$, δηλαδή η (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία $B(-1,0)$ και $\Gamma(0,1)$. Επειδή $(OB) = (OG)$ το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος

Το τρίγωνο $OB\Gamma$ που σχηματίζει η (ε) με τους άξονες είναι ορθογώνιο. Επειδή $\lambda_\varepsilon = 1$ είναι $\varepsilon\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$, δηλαδή το ορθογώνιο τρίγωνο $OB\Gamma$ έχει μια γωνία 45° , οπότε και η άλλη οξεία γωνία του είναι 45° άρα είναι ισοσκελές.

B4. Αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_1 > 0$ τέτοιο, ώστε $g'(x_1) = \lambda_\varepsilon = 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = \ln x + 1$, οπότε $g'(x_1) = 1 \Leftrightarrow \ln x_1 + 1 = 1 \Leftrightarrow \ln x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Η εφαπτομένη της C_g στο $x_1 = 1$ έχει εξίσωση $y - g(x_1) = g'(x_1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$, η οποία δεν είναι η εξίσωση της (ε) . Άρα η (ε) δεν εφάπτεται της C_g .

B5. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty(+\infty) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln x} \stackrel{x \ln x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty$$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(-1) = \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{3} + \beta - \gamma + 1 = \frac{5}{4} + \beta - \frac{\alpha}{3} - \gamma$, $f(0) = 1$ και

$$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{3} + \beta + \gamma + 1 = \frac{5}{4} + \beta + \frac{\alpha}{3} + \gamma.$$

Είναι $\beta + \frac{5}{4} < \frac{\alpha}{3} + \gamma \Leftrightarrow \beta + \frac{5}{4} - \frac{\alpha}{3} - \gamma < 0 \Leftrightarrow f(-1) < 0$ και

$$\frac{\alpha}{3} + \gamma < -\beta - \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3} + \gamma + \beta + \frac{5}{4} < 0 \Leftrightarrow f(1) < 0.$$

Επειδή $f(-1)f(0) < 0$, $f(1)f(0) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως πολωνυμική, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (-1, 0)$ και $\xi_2 \in (0, 1)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1) = 0$ και $f(\xi_2) = 0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = x^3 + \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, οπότε αρκεί η εξίσωση $f'(x) = 0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με παράγωγο $f'(x) = x^3 + \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$. Επειδή $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(\xi_1, \xi_2) \subseteq (-1, 1)$.

Γ3. α) Επειδή η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$, είναι $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = f'(\rho_3) = 0$. Η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στα (ρ_1, ρ_2) , (ρ_2, ρ_3) με παράγωγο $f''(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 2\beta$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε, η εξίσωση $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2\alpha x + 2\beta = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) και τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_2, ρ_3) . Όμως η $f''(x) = 0$ είναι εξίσωση 2ου βαθμού και έχει το πολύ δύο ρίζες, άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 .

β) Επειδή η εξίσωση $3x^2 + 2\alpha x + 2\beta = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , είναι $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2\alpha)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2\beta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 24\beta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 > 24\beta \Leftrightarrow \alpha^2 > 6\beta$

γ) Είναι $f^{(3)}(x) = 6x + 2\alpha$, οπότε

$$f^{(3)}(x_1) + f^{(3)}(x_2) = 6x_1 + 2\alpha + 6x_2 + 2\alpha = 6(x_1 + x_2) + 4\alpha$$

Επειδή τα x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 + 2\alpha x + 2\beta = 0$, από τους τύπους Vieta ισχύει ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{2\alpha}{3}, \text{ οπότε } f^{(3)}(x_1) + f^{(3)}(x_2) = 6\left(-\frac{2\alpha}{3}\right) + 4\alpha = -4\alpha + 4\alpha = 0$$

Θέμα Δ

$$\Delta 1. f(x) = \alpha^{|x|} + \beta^{|x|} - 2, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \alpha^{-x} + \beta^{-x} - 2, & x < 0 \\ \alpha^x + \beta^x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$. Για κάθε $x_1, x_2 < 0$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2$, είναι $\alpha^{-x_1} > \alpha^{-x_2}$ (1) και $\beta^{-x_1} > \beta^{-x_2} \Leftrightarrow \beta^{-x_1} - 2 > \beta^{-x_2} - 2$ (2)

Με πρόσθεση των σχέσεων (1), (2) έχουμε $f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, 0)$

.Επειδή f συνεχής και $f \searrow (-\infty, 0)$ είναι

$$f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

Για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$ με $x_1 < x_2$, είναι $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$ (3) και

$\beta^{x_1} < \beta^{x_2} \Rightarrow \beta^{x_1} - 2 < \beta^{x_2} - 2$ (4). Με πρόσθεση των σχέσεων (3), (4) έχουμε

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow [0, +\infty). \text{ Άρα για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0.$$

Επομένως $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Είναι $g(x) = (\gamma^{|x|})^2 - \gamma^{|x|} = \gamma^{|x|}(\gamma^{|x|} - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \gamma^{|x|}(\gamma^{|x|} - 1) = 0 \Leftrightarrow (\gamma^{|x|} = 0 \text{ αδύνατη}) \text{ ή}$$

$$(\gamma^{|x|} - 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0),$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \gamma^{|x|}(\gamma^{|x|} - 1) > 0 \stackrel{\gamma^{|x|} > 0}{\Leftrightarrow} \gamma^{|x|} - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Άρα $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. α) Αφού τα $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με γ να είναι η υποτείνουσα και α, β οι δύο κάθετες πλευρές, τότε σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα είναι $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

$$f(x) + g(x) = (\gamma^{|x|})^2 - 2 \Leftrightarrow \alpha^{|x|} + \beta^{|x|} - \cancel{2} + (\cancel{\gamma^{|x|}})^{\cancel{2}} - \gamma^{|x|} = (\cancel{\gamma^{|x|}})^{\cancel{2}} - \cancel{2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{|x|} + \beta^{|x|} = \gamma^{|x|} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{|x|} + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{|x|} - 1 = 0. \text{ Έστω η συνάρτηση}$$

$$h(x) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{|x|} + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{|x|} - 1, x \in \mathbb{R}. \text{ Για } x \geq 0 \text{ είναι } h(x) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x - 1$$

$$\text{οπότε } h(2) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 - 1 = 1 - 1 = 0. \text{ Για } x < 0 \text{ είναι}$$

$$h(x) = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^x - 1 \text{ και είναι } h(-2) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτές οι δύο ρίζες είναι μοναδικές.

1^{ος} τρόπος: Η h είναι παραγωγίσιμη για $x < 0$ με παράγωγο

$$h'(x) = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^x \ln \frac{\gamma}{\alpha} + \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^x \ln \frac{\gamma}{\beta} > 0 \text{ γιατί } \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma}{\beta} > 1 \text{ άρα } \ln \frac{\gamma}{\alpha}, \ln \frac{\gamma}{\beta} > 0. \text{ Έστω η}$$

$$h(x) = 0 \text{ έχει ρίζα } \rho_1 < -2 \text{ στο } (-\infty, 0), \text{ τότε είναι } h(\rho_1) = h(-2) = 0.$$

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, -2]$, παραγωγίσιμη στο $(\rho_1, -2)$ άρα ικανοποιούνται

οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, -2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \text{ άτοπο. Όμοια αν } \rho_1 > -2 \text{ Η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη για } x > 0 \text{ με}$$

$$\text{παράγωγο } h'(x) = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x \ln \frac{\alpha}{\gamma} + \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x \ln \frac{\beta}{\gamma} < 0 \text{ γιατί } \frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma} < 1 \text{ άρα } \ln \frac{\gamma}{\alpha}, \ln \frac{\gamma}{\beta} < 0.$$

Έστω η $h(x) = 0$ έχει ρίζα $\rho_2 < 2$ στο $(0, +\infty)$, τότε είναι $h(\rho_2) = h(2) = 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[\rho_2, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(\rho_2, 2)$ άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\rho_2, 2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$ Άτοπο.

Όμοια αν $\rho_1 > 2$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 < 0$ με $x_1 < x_2$ είναι $\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{x_1} < \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{x_2}$ (1) ,

$$\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x_1} < \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x_2} \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x_1} - 1 < \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{x_2} - 1 \quad (2) .$$

Από (1),(2) προκύπτει ότι $h(x_1) < h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ επομένως το -2 μοναδική ρίζα.

Για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$ με $x_1 < x_2$ είναι $\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{x_1} > \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{x_2}$ (3) ,

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x_1} > \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x_2} \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x_1} - 1 > \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{x_2} - 1 \quad (4) .$$

Από (3),(4) προκύπτει ότι $h(x_1) > h(x_2)$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ επομένως το 2 μοναδική ρίζα.

β) $\alpha U_K(t) = \beta U_\Lambda(t) \Leftrightarrow \alpha S'_K(t) = \beta S'_\Lambda(t) \Leftrightarrow \alpha S'_K(t) - \beta S'_\Lambda(t) = 0$ με $S_K(t), S_\Lambda(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των κινητών K, Λ αντίστοιχα.

Έστω η συνάρτηση $\varphi(t) = \alpha S_K(t) - \beta S_\Lambda(t)$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο $\varphi'(t) = \beta S'_K(t) - \alpha S'_\Lambda(t)$.

Την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $S_K(0) = \beta$ και $S_\Lambda(0) = \alpha$ αφού το K απέχει β από το Γ και το Λ απέχει α από το Γ. Επομένως είναι $\varphi(0) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0$

Έστω t_1 η χρονική στιγμή που τερματίζουν (ταυτόχρονα).

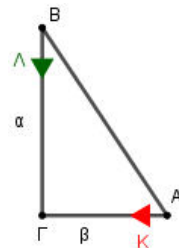
Την χρονική στιγμή $t = t_1$ είναι $S_K(t_1) = S_\Lambda(t_1) = 0$ αφού το K απέχει 0 από το Γ και το Λ απέχει 0 από το Γ. Επομένως είναι $\varphi(t_1) = 0$.

Από θεώρημα Rolle υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, t_1)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha U_K(t_0) = \beta U_\Lambda(t_0)$$

γ) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και στο μηδέν

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} . \text{ Είναι}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha^{-x} + \beta^{-x} - 2}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\alpha^{-x} \ln \alpha - \beta^{-x} \ln \beta}{1} = -\ln \alpha - \ln \beta. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^x + \beta^x - 2}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta}{1} = \ln \alpha + \ln \beta$$

2ος τρόπος

Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $\varphi_1(x) = \alpha^{-x}$, $\varphi_2(x) = \beta^{-x}$, με

$$\varphi_1'(x) = -\alpha^{-x} \ln \alpha, \varphi_2'(x) = -\beta^{-x} \ln \beta \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha^{-x} + \beta^{-x} - 2}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\varphi_1(x) - \varphi_1(0)}{x} + \frac{\varphi_2(x) - \varphi_2(0)}{x} \right) =$$

$$\varphi_1'(0) + \varphi_2'(0) = \ln \alpha + \ln \beta. \text{ Όμοια τα υπόλοιπα.}$$

$$\text{Άρα είναι } -\ln \alpha - \ln \beta = \ln \alpha + \ln \beta \Leftrightarrow 2 \ln \alpha = -2 \ln \beta \Leftrightarrow \ln \alpha = \ln \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\beta}$$

επομένως οι α, β είναι αντίστροφοι.

$$\text{Είναι } \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\beta^2} + \beta^2 = \gamma^2 \Leftrightarrow 1 + \beta^4 = \beta^2 \gamma^2 \Leftrightarrow \beta^4 - \beta^2 \gamma^2 + 1 = 0$$

Θέτουμε $\beta^2 = \omega$ οπότε προκύπτει το τριώνυμο $\omega^2 - \omega \gamma^2 + 1 = 0$. Επειδή η

$$\text{εξίσωση έχει λύση, είναι } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \gamma^4 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \gamma^4 \geq 4 \Leftrightarrow \gamma^2 \geq 2 \stackrel{\gamma > 0}{\Leftrightarrow} \gamma \geq \sqrt{2}.$$

25

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

Άμεση εφαρμογή του Θ.Μ.Τ.- Γεωμετρική ερμηνεία

23.α) Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο $f'(x) = 1 - 2x$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = f(2) - f(1) \Leftrightarrow 1 - 2\xi = -2 - 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 1.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1), (1, 2]$ σαν πολυωνυμική οπότε είναι συνεχής στο

$$[0, 2]. \text{ Επίσης } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x-2)(x-1)}{x-1} = 1 \text{ άρα είναι}$$

παραγωγίσιμη στο 1, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & 0 < x < 1 \\ -2x + 3, & 1 < x < 2 \end{cases} \text{ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα}$$

υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = f(2) - f(0) = 0$.

Για $\xi \in (0, 1]$ είναι $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\xi = 1 \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$ δεκτό.

Για $\xi \in (1, 2)$ είναι $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -2\xi + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\xi = 3 \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{2}$ δεκτό.

24. Η ευθεία ε είναι η $y=x$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f οπότε υπάρχει

$$\xi \in (1, 5) : f'(\xi) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{9 - 5}{4} = 1 = \lambda_\varepsilon, \text{ οπότε υπάρχει εφαπτομένη της}$$

C_f παράλληλη στην ε .

25. Η ε διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και από το σημείο $(1, 5)$, οπότε έχει εξίσωση $\varepsilon : y = 5x$

Η f δέχεται εφαπτομένη ε_1 κάθετη στην ε , αν και μόνο αν υπάρχει σημείο της

$$C_f \text{ με τετμημένη } \xi \text{ στο } (1, 6) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) \cdot \lambda_\varepsilon = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{1}{5}.$$

Η f είναι συνεχής στο $[1, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$, επομένως ισχύουν οι

υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 6)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{3 - 4}{5} = -\frac{1}{5}. \text{ Η εφαπτομένη ευθεία της } C_f \text{ στο σημείο}$$

$M(\xi, f(\xi))$ είναι κάθετη στην ε , οπότε υπάρχει σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην (ε) .

26. Έστω $S(t)$ η συνάρτηση θέσης του αυτοκινήτου και $u(t)$ η συνάρτηση της ταχύτητας, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $S(t)$ στο $[0, 3]$ οπότε υπάρχει

$$t_0 \in (0, 3) \text{ τέτοιο ώστε } S'(t_0) = \frac{S(3) - S(0)}{3 - 0} \Leftrightarrow u(t_0) = \frac{300}{3} = 100 \text{ km/h}$$

Αυξημένης δυσκολίας

27. Η ευθεία ε_1 είναι παράλληλη στον x' άρα έχει εξίσωση $y=1$ με συντελεστή

διεύθυνσης $\lambda_1 = 0$. Επειδή εφαπτεται της C_f στο B , είναι $f'(2) = \lambda_1 = 0$. Η

ευθεία ε_2 διέρχεται από τα σημεία O και $(1, 1)$ άρα έχει εξίσωση $y = x$ με

συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_2 = 1$. Εφαπτεται της C_f στο O οπότε είναι

$f'(0) = \lambda_2 = 1$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0, 2]$ οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (0, 2) : f''(\xi) = \frac{f'(2) - f'(0)}{2 - 0} = -\frac{1}{2} < 0.$$

28. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, 1]$ οπότε υπάρχει

$$x_0 \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε } f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - f(0) = f'(\xi).$$

Έστω ότι η f' είναι γνησίως μονότονη. Τότε είναι 1-1 οπότε από τη σχέση

$$f'(\xi) = f'(x_0) \text{ έχουμε } \xi = x_0 \text{ άτοπο αφού } \xi \notin (\alpha, \beta).$$

29.α) Έστω u η συνάρτηση της ταχύτητας.

Τότε $u(t_1) = 20 \text{ km/h}$, $u(t_2) = 15 \text{ km/h}$ και $u(t_3) = 20 \text{ km/h}$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την u σε καθένα από τα διαστήματα

$[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ οπότε υπάρχουν $t_4 \in (t_1, t_2)$ και $t_5 \in (t_2, t_3)$ τέτοια ώστε

$$u'(t_4) = \frac{u(t_2) - u(t_1)}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow a(t_4) = -\frac{5}{t_2 - t_1} < 0 \text{ αφού } t_1 < t_2,$$

$$u'(t_5) = \frac{u(t_3) - u(t_2)}{t_3 - t_2} \Leftrightarrow a(t_5) = \frac{10}{t_3 - t_2} > 0 \text{ αφού } t_2 < t_3.$$

Άρα υπάρχουν χρονικές στιγμές t_4, t_5 κατά τις οποίες αντίστοιχα επιβραδύνει, επιταχύνει.

β) Η συνάρτηση της επιτάχυνσης $a(t) = u'(t)$ είναι συνεχής στο $[t_4, t_5]$
 $a(t_4) \cdot a(t_5) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα
 υπάρχει $t_6 \in (t_4, t_5)$ τέτοιο ώστε $a(t_6) = 0$.

Σχέσεις για τιμές συνάρτησης

30. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, 2]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (0, 2) : f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{f(2)}{2}. \text{ Είναι}$$

$$|f'(\xi)| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{f(2)}{2} \right| \leq 2 \Leftrightarrow |f(2)| \leq 4.$$

31. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2, 5]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (2, 5) : f'(\xi) = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{f(5) - 3}{3}. \text{ Είναι}$$

$$f'(\xi) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{f(5) - 3}{3} \leq 4 \Leftrightarrow f(5) - 3 \leq 12 \Leftrightarrow f(5) \leq 15.$$

Αυξημένης δυσκολίας

32. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0, 1], [1, 2]$ οπότε
 υπάρχουν $x_1 \in (0, 1), x_2 \in (1, 2)$, τέτοια, ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) \text{ και } f'(x_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 4 - f(1). \text{ Είναι}$$

$f'(x_1) \geq 2 \Leftrightarrow f(1) \geq 2$ (1) και $f'(x_2) \geq 2 \Leftrightarrow 4 - f(1) \geq 2 \Leftrightarrow f(1) \leq 2$ (2). Από
 τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(1) = 2$.

33. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για τις f, g στο διάστημα $[0, 1]$ οπότε
 υπάρχουν $x_1 \in (0, 1), x_2 \in (0, 1)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = f(1) - 1 \text{ και } g'(x_2) = \frac{g(1) - g(0)}{1} = 2 - g(0). \text{ Είναι}$$

$$2 \leq f'(x_1) \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq f(1) - 1 \leq 5 \Leftrightarrow 3 \leq f(1) \leq 6 \text{ (1),}$$

$$4 \leq g'(x_2) \leq 7 \Leftrightarrow 4 \leq 2 - g(0) \leq 7 \Leftrightarrow 2 \leq -g(0) \leq 5 \text{ (2). Με πρόσθεση των}$$

σχέσεων (1), (2) έχουμε $5 \leq f(1) - g(0) \leq 11$.

Διαμερισμός διαστήματος

34. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,3]$, $[3,6]$, $[6,9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,3)$, $\xi_2 \in (3,6)$, $\xi_3 \in (6,9)$ τέτοια,

$$\text{ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(3)-f(0)}{3} \quad (1), f'(\xi_2) = \frac{f(6)-f(3)}{3} \quad (2) \text{ και}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(9)-f(6)}{3} \quad (3). \text{ Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3),}$$

$$\text{προκύπτει: } f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + f'(\xi_3) = \frac{f(3)-f(0)+f(6)-f(3)+f(9)-f(6)}{3} = 0.$$

35. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,3)$ με $x_1 \neq x_2$, τέτοια, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = -6$. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in (1,2)$ και

$$x_2 \in (2,3), \text{ τέτοια ώστε: } f'(x_1) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)-9 \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = 3-f(2). \text{ Είναι:}$$

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(2)-9+3-f(2) = -6.$$

36. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[1,3]$, $[3,6]$, $[6,10]$ οπότε υπάρχουν

$$\xi_1 \in (1,3), \xi_2 \in (3,6), \xi_3 \in (6,10) \text{ τέτοια, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(3)-f(1)}{2} \Leftrightarrow$$

$$2f'(\xi_1) = f(3)-f(1) \quad (1), f'(\xi_2) = \frac{f(6)-f(3)}{3} \Leftrightarrow 3f'(\xi_2) = f(6)-f(3) \quad (2) \text{ και}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(10)-f(6)}{4} \Leftrightarrow 4f'(\xi_3) = f(10)-f(6) \quad (3). \text{ Προσθέτοντας κατά}$$

μέλη τις σχέσεις (1), (2), (3), προκύπτει:

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = \cancel{f(3)} - f(1) + \cancel{f(6)} - \cancel{f(3)} + f(10) - \cancel{f(6)} \Leftrightarrow$$

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = -4 + 9 = 5$$

37. Η f είναι συνεχής στα $[1,4]$, $[4,6]$ και παραγωγίσιμη στα $(1,4)$, $(4,6)$, οπότε

ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1,4)$, $\xi_2 \in (4,6)$ τέτοια,

$$\text{ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(4)-f(1)}{3} \Leftrightarrow 3f'(\xi_1) = f(4)-1 \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(6)-f(4)}{2} \Leftrightarrow 2f'(\xi_2) = 2-f(4) . \text{ Είναι}$$

$$3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = f(4)-1+2-f(4)=1 .$$

Αυξημένης δυσκολίας

38.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1) < 3 < f(1)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 3$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,\xi]$ και $[\xi,1]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (-1,\xi)$ και $\xi_2 \in (\xi,1)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\xi)-f(-1)}{\xi+1} = \frac{3-1}{\xi+1} = \frac{2}{\xi+1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{\xi+1}{2} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi} = \frac{5-3}{1-\xi} = \frac{2}{1-\xi} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{1-\xi}{2} .$$

$$\text{Οπότε } \frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{\xi+1}{2} + \frac{1-\xi}{2} = \frac{\xi+1+1-\xi}{2} = 1 .$$

γ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-1,0)$ και $x_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f(0)-f(-1)}{0+1} = f(0)-1 \text{ και } f'(x_2) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 5-f(0) . \text{ Είναι}$$

$-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ οπότε έχουμε:

$$f'(x_1) > f'(x_2) \Leftrightarrow f(0)-1 > 5-f(0) \Leftrightarrow 2f(0) > 6 \Leftrightarrow f(0) > 3 .$$

39.α) Η f είναι συνεχής στο $[1,9]$ και $f(1) < 6 < f(9)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_1 \in (1,9)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 6$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[x_1,9]$ και $f(x_1) < 10 < f(9)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_2 \in (x_1,9)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 10$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα

$[1, x_1], [x_1, x_2], [x_2, 10]$ άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2), \xi_3 \in (x_2, 10)$

$$\text{τέτοια, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(1)}{x_1 - 1} = \frac{4}{x_1 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{x_1 - 1}{4},$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{x_2 - x_1}{4} \text{ και}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(9) - f(x_2)}{9 - x_2} = \frac{4}{9 - x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_3)} = \frac{9 - x_2}{4}.$$

Με πρόσθεση των σχέσεων κατά μέλη, έχουμε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} + \frac{1}{f'(\xi_3)} = 2.$

γ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 5], [5, 9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_4 \in (1, 5)$ και $\xi_5 \in (5, 9)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_4) = \frac{f(5) - f(1)}{4} = \frac{f(5) - 2}{4} \text{ και } f'(\xi_5) = \frac{f(9) - f(5)}{4} = \frac{14 - f(5)}{4}. \text{Είναι}$$

$$\xi_4 < \xi_5 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_4) < f'(\xi_5) \Leftrightarrow \frac{f(5) - 2}{4} < \frac{14 - f(5)}{4} \Leftrightarrow$$

$$f(5) - 2 < 14 - f(5) \Leftrightarrow 2f(5) < 16 \Leftrightarrow f(5) < 8.$$

40.α) Η f είναι συνεχής στο $[0, 10]$ και $f(0) < 4 < f(10)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_1 \in (0, 10)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 4$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[x_1, 10]$ και $f(x_1) < 10 < f(10)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών άρα υπάρχει $x_2 \in (x_1, 10)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 10$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, 10]$ άρα υπάρχουν

$\xi_1 \in (0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_2), \xi_3 \in (x_2, 10)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} = \frac{4}{x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_1)} = \frac{x_1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{f'(\xi_1)} = \frac{x_1}{2},$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{6}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{x_2 - x_1}{6} \Leftrightarrow \frac{3}{f'(\xi_2)} = \frac{x_2 - x_1}{2} \text{ και}$$

$$f'(\xi_3) = \frac{f(10) - f(x_2)}{10 - x_2} = \frac{10}{10 - x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\xi_3)} = \frac{10 - x_2}{10} \Leftrightarrow \frac{5}{f'(\xi_3)} = \frac{10 - x_2}{2}.$$

Με πρόσθεση των σχέσεων κατά μέλη, έχουμε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{5}{f'(\xi_3)} = 5$.

Εύρεση f, f' μέσα από σχήμα με χρήση του Θ.Μ.Τ

41. Παρατηρούμε ότι η C_f έχει τρία κοινά σημεία με την $y = x$, το $O(0,0)$ και 2 ακόμη. Έστω $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ με $0 < \alpha < \beta$ και $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$ τα δύο αυτά σημεία.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0, \alpha]$ και $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, \alpha)$ και $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1 \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha} = 1. \text{ Άρα η } f'$$

δύο κοινά σημεία με την $y = 1$ οπότε έχει γραφική παράσταση την C_1 .

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_3) = 0$. Άρα η f'' έχει σημείο τομής με θετική τετμημένη με τον άξονα $x'x$ αφού $\xi_3 > \xi_1 > 0$ οπότε έχει γραφική παράσταση την C_4 .

42.α) Έστω ότι η $C_2 \equiv C_f$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την g σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, 0], [0, \beta]$ με $\alpha < 0 < \beta$ οπότε υπάρχουν

$\xi_1 \in (\alpha, 0)$ και $\xi_2 \in (0, \beta)$ τέτοια ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(0) - g(\alpha)}{0 - \alpha} = \frac{f^2(0) - f^2(\alpha)}{-\alpha} = \frac{f^2(\alpha)}{\alpha} < 0 \text{ και}$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g(0)}{\beta - 0} = \frac{f^2(\beta) - f^2(0)}{\beta} = \frac{f^2(\beta)}{\beta} > 0 \text{ άτοπο γιατί οι } C_1, C_3 \text{ δεν}$$

αλλάζουν πρόσημο άρα δεν μπορούν να είναι η γραφική παράσταση της g' .

Έστω ότι $C_3 \equiv C_f$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του για την g στο διάστημα $[0, \beta]$ με $\beta > 0$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(\beta) - g(0)}{\beta - 0} = \frac{f^2(\beta) - f^2(0)}{\beta} < 0 \text{ γιατί } f(0) < f(\beta) < 0 \text{ άρα}$$

$f^2(\beta) < f^2(0)$ άτοπο όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση της..

Άρα η $C_1 \equiv C_f$.

β) 1^{ος} τρόπος: Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = 2f(x)f'(x)$.

Είναι $g'(0) = 2f(0)f'(0) = 0$ οπότε $C_2 \equiv C_{g'}$.

2^{ος} τρόπος:

Αφού $C_1 \equiv C_f$ τότε υπάρχουν $\alpha < 0 < \beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$ οπότε $f^2(\alpha) = f^2(\beta) \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$.

Η g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με παράγωγο

$g'(x) = 2f(x)f'(x)$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$ άρα $C_2 \equiv C_{g'}$.

3^{ος} τρόπος: $C_1 \equiv C_f$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[0, \beta]$ με $\beta > 0$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_1) = \frac{g(\beta) - g(0)}{\beta - 0} = \frac{f^2(\beta) - f^2(0)}{\beta} = \frac{f^2(\beta)}{\beta} > 0 \text{ άρα } C_2 \equiv C_{g'}.$$

43.α) Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του για την ΘΜΤ για την f στο $[1, x]$, $x > 1$

$$\begin{aligned} \text{άρα υπάρχει } \xi \in (1, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) &= \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x - 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'(\xi) &= -\frac{f(x)}{1 - x} \Leftrightarrow f'(\xi) = -g(x). \end{aligned}$$

$$\text{β)} \text{ Για κάθε } x > 1 \text{ είναι } g'(x) = \frac{f'(x)(1-x) + f(x)}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Από το προηγούμενο ερώτημα είναι } f'(\xi) = -\frac{f(x)}{1-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -(1-x)f'(\xi) \text{ άρα } g'(x) = \frac{f'(x)(1-x) - (1-x)f'(\xi)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(1-x)}(f'(x) - f'(\xi))}{(1-x)^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{1-x}$$

$$\text{Αν } C_1 \equiv C_{f'} \text{ τότε είναι } 1 < \xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0.$$

Άρα για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$ άτοπο όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση. Άρα $C_2 \equiv C_{f'}$ και $C_1 \equiv C_{g'}$.

44. Είναι $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ σε κάθε περίπτωση.

α) Έστω ότι $C_3 \equiv C_{f''}$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f στο

$[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1)$ άτοπο

αφού οι C_1, C_2 δεν τέμνουν την C_3 .

Έστω ότι $C_3 \equiv C_{f''}$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f' στο

$[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = \frac{f'(1)-f'(0)}{1-0} = f'(1)$

πράγμα άτοπο όποια από τις C_1, C_2 και να είναι η f' .

Άρα η C_3 παριστάνει την f .

β) για την f στο $[0, x]$, $x \in (0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow f(x) = x f'(\xi).$$

γ) Έστω ότι $C_2 \equiv C_{f'}$ τότε $f' \nearrow [0, x_0]$ και $f' \searrow [x_0, 1]$.

Για κάθε $0 < x_0 < \xi < x < 1 \xRightarrow{f' \searrow} f'(\xi) < f'(0) = 0 \Leftrightarrow x f'(\xi) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$

άτοπο γιατί $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

Άρα η C_1 παριστάνει την f' και η C_2 την f'' .

45.α) Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,1], [1,2]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = -f(0) \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f(2)$$

Είναι $f(0)+f(2) < 0 \Leftrightarrow f(2) < -f(0) \Leftrightarrow f'(\xi_2) < f'(\xi_1)$.

β) Έστω ότι $C_3 \equiv C_{f''}$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f' στο

$[\xi_1, \xi_2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1} < 0$

γιατί είναι $f(0)+f(2) < 0$ και $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_2 - \xi_1 > 0$ άρα καταλήγουμε σε

άτοπο. Έστω ότι $C_3 \equiv C_f$ τότε $f(1) \neq 0$ πράγμα άτοπο.

γ) Έστω ότι $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f''}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f'(x) \xLeftrightarrow[f(1)=0]{f'(1)=0}$

$$\Leftrightarrow f(x)-f(1) > f'(x)-f'(1) \xLeftrightarrow[x>1]{\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > \frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}} \quad (1)$$

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για τις f και f' στο διάστημα $[1, x]$ με

$x > 1$ οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, x)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ και $f''(x_2) = \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1}$. Άρα $(1) \Leftrightarrow f'(x_1) > f''(x_2)$ άτοπο.

Συνδυασμοί θεωρημάτων

46. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1]$, $[2, 3]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (2, 3)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f(1) - f(0)$ και $f'(x_2) = f(3) - f(2)$. Είναι $f(1) + f(2) = f(0) + f(3) \Leftrightarrow f(1) - f(0) = f(3) - f(2) \Leftrightarrow f'(x_1) = f'(x_2)$. Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

47. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 2]$, $[2, 4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 2)$, $\xi_2 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 - 1}{2} = 1$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{5 - 3}{2} = 1$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 4]$, η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq (0, 4)$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(x_0) = 0$.

48. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f στο $[0, 1]$ οπότε υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$: $f'(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, x_1]$, $[x_1, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x_1)$, $(x_1, 1)$. Επειδή $f'(0) = f'(x_1) = f'(1)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_1)$ και $\xi_2 \in (x_1, 1)$: $f'(\xi_1) = 0$, $f'(\xi_2) = 0$.

49. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $[0, x_0]$, $[x_0, 2]$ άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 2)$ τέτοια, ώστε :

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{f(x_0)}{x_0} < 0 \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = -\frac{f(x_0)}{2 - x_0} > 0.$$

Η f' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subseteq (0, 2)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε :

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} > 0, \text{ αφού } f'(\xi_2) > 0 \text{ και } f'(\xi_1) < 0.$$

50. Η f είναι συνεχής στο $[-3, 1]$, $1 < \ln 3 < \ln 4 < 2$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-3, 1)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = \ln 3$ και $f(x_2) = \ln 4$.

Έστω $x_1 < x_2$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ΘΜΤ για την f στο $[x_1, x_2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\ln 4 - \ln 3}{x_2 - x_1}. \text{ Όμως } \begin{cases} x_2 < 1 \\ x_1 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 < 1 \\ -x_1 < 3 \end{cases} \text{ οπότε}$$

$$x_2 - x_1 < 1 + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2 - x_1} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\ln 4 - \ln 3}{x_2 - x_1} > \frac{\ln 4 - \ln 3}{4} \Leftrightarrow f'(\xi) > \frac{\ln \frac{4}{3}}{4}$$

Ομοίως αν $x_1 > x_2$

51. Η f συνεχής στο $[a, \beta]$, $f(a)f(\beta) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[a, x_0]$, $[x_0, \beta]$. Η f συνεχής στο $[a, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (a, x_0) , άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (a, x_0)$

$$\text{τέτοιο, ώστε : } f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = -\frac{f(a)}{x_0 - a}. \text{ Ομοίως στο } [x_0, \beta] \text{ υπάρχει}$$

$$\xi_2 \in (x_0, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε : } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{f(\beta)}{\beta - x_0}. \text{ Είναι}$$

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = -\frac{f(a)f(\beta)}{(x_0 - a)(\beta - x_0)} > 0.$$

52.α) Από τη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι $f(3) < f(1) < f(2) < f(0)$ Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα

$[0,1], [1,2], [2,3]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$, $\xi_2 \in (1,2)$, $\xi_3 \in (2,3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f(1) - f(0) < 0$, $f'(\xi_2) = f(2) - f(1) > 0$ και

$$f'(\xi_3) = f(3) - f(2) < 0.$$

β) Η f' συνεχής στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2], [\xi_2, \xi_3]$, $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) < 0$,

$f'(\xi_2) \cdot f'(\xi_3) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την f' οπότε υπάρχει $\xi_4 \in (\xi_1, \xi_2)$ και $\xi_5 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_4) = f'(\xi_5) = 0$.

Η f' συνεχής στο $[\xi_4, \xi_5]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_4, ξ_5) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f' στο $[\xi_4, \xi_5]$ άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_4, \xi_5)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$..

53.α) Έστω $g(x) = f(x) - 3x + 2$, $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, $g(1) = f(1) - 3 + 2 = 3$, $g(2) = f(2) - 6 + 2 = -3$, δηλαδή $g(1)g(2) < 0$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 3x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 - 2.$$

β) Σε καθένα από τα διαστήματα $[1, x_0]$, $[x_0, 2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, 2)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{3x_0 - 2 - 4}{x_0 - 1} = \frac{3(x_0 - 2)}{x_0 - 1} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{1 - 3x_0 + 2}{2 - x_0} = \frac{3(x_0 - 1)}{x_0 - 2} \quad (2). \text{ Πολλαπλασιάζοντας τις}$$

$$\text{σχέσεις (1), (2) κατά μέλη, προκύπτει: } f'(\xi_1)f'(\xi_2) = \frac{3(x_0 - 2)}{x_0 - 1} \cdot \frac{3(x_0 - 1)}{(x_0 - 2)} = 9$$

54.α) Είναι $f(\xi) = \beta - 2\xi \Leftrightarrow f(\xi) - \beta + 2\xi = 0$.

Έστω $g(x) = f(x) - \beta + 2x$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$$g(\alpha) = f(\alpha) - \beta + 2\alpha = -\beta - \beta + 2\alpha = 2(\alpha - \beta) < 0,$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \beta + 2\beta = \beta - 2\alpha - \beta + 2\beta = 2(\beta - \alpha) > 0, \text{ και } g(\alpha)g(\beta) < 0, \text{ άρα}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \beta - 2\xi$.

β) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[α, ξ]$ και $[ξ, β]$ και παραγωγίσιμη στα $(α, ξ)$ και $(ξ, β)$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής οπότε υπάρχουν $ξ_1 \in (α, ξ)$ και $ξ_2 \in (ξ, β)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(ξ_1) = \frac{f(ξ) - f(α)}{ξ - α} = \frac{β - 2ξ + β}{ξ - α} = \frac{2(β - ξ)}{ξ - α} \text{ και}$$

$$f'(ξ_2) = \frac{f(β) - f(ξ)}{β - ξ} = \frac{β - 2α - β + 2ξ}{β - ξ} = \frac{2(ξ - α)}{β - ξ}. \text{ Είναι:}$$

$$f'(ξ_1)f'(ξ_2) = \frac{2(\cancel{β - ξ})}{\cancel{ξ - α}} \frac{2(\cancel{ξ - α})}{\cancel{β - ξ}} = 4.$$

55.α) Είναι $g(x+1) = f^2(x)(1)$, $g'(1)f'(1) = g'(2)f'(0)$ (2).

Με παραγωγή της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε :

$$g'(x+1) = 2f(x)f'(x) \stackrel{f'(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{g'(x+1)}{f'(x)} = 2f(x) \text{ (3). Από τη σχέση (3) για}$$

$$x=0, x=1 \text{ έχουμε αντίστοιχα : } \frac{g'(1)}{f'(0)} = 2f(0), \frac{g'(2)}{f'(1)} = 2f(1). \text{ Από τη σχέση}$$

$$(2) \text{ έχουμε } g'(1)f'(1) = g'(2)f'(0) \Leftrightarrow \frac{g'(1)}{f'(0)} = \frac{g'(2)}{f'(1)} \Leftrightarrow 2f(0) = 2f(1) \Leftrightarrow$$

$f(0) = f(1)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[0, 1]$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ΘΜΤ για την f στα $[0, 0,5]$ και $[0,5, 1]$, υπάρχουν $\rho_1 \in (0, 0,5)$ και $\rho_2 \in (0,5, 1)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\rho_1) = \frac{f(0,5) - f(0)}{0,5} \text{ και } f'(\rho_2) = \frac{f(1) - f(0,5)}{0,5}.$$

$$\text{Είναι } f'(\rho_1) + f'(\rho_2) = \frac{f(0,5) - f(0)}{0,5} + \frac{f(1) - f(0,5)}{0,5} = 0.$$

56.α) Είναι $x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^4 - x^2$ (1). Από τη σχέση (1) για $x=1, x=-1$ έχουμε αντίστοιχα :

$$\bullet \quad 0 \leq f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ και } 0 \leq f(-1) \leq 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0 \text{ και}$$

$$\bullet \quad \text{για } x > -1 : \frac{x^2 - 1}{x + 1} \leq f(x) \leq \frac{x^2(x^2 - 1)}{x + 1} \Leftrightarrow x - 1 \leq \frac{f(x)}{x + 1} \leq x^2(x - 1).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x-1) = -2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2(x-1))$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x)}{x+1} = -2$. Άρα $f'(-1) = -2$. Όμοια $f'(1) = 2$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f' στο $[-1, 1]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (-1, 1) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi) = \frac{f'(1) - f'(-1)}{2} = 2.$$

57. Είναι $f(x-1) - f(x+1) = (x^2 - 1)e^{x^2} + 2$ (1). Από τη σχέση (1) για

$x = -1, x = 1$ έχουμε αντίστοιχα : $f(-2) - f(0) = 2$ και $f(0) - f(2) = 2$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-2, 0)$ και

$$x_2 \in (0, 2) \text{ τέτοια, ώστε } f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-2)}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = -\frac{2}{2} = -1. \text{ Επειδή η } f' \text{ είναι παραγωγισιμη στο } [x_1, x_2],$$

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Είναι

$f'(x_1) = f'(x_2)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει

$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

58. Είναι $g(x) = f(x) - f(4-x)$ (1). Από τη σχέση (1) για $x = 0, x = 2, x = 4$ έχουμε αντίστοιχα :

$$g(0) = f(0) - f(4), g(2) = f(2) - f(2) = 0 \text{ και } g(4) = f(4) - f(0).$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για τη g σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 2], [2, 4]$ οπότε υπάρχει $x_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε :

$$g'(x_1) = \frac{g(2) - g(0)}{2} = \frac{-f(0) + f(4)}{2} \text{ και } x_2 \in (2, 4) \text{ τέτοιο, ώστε}$$

$$g'(x_2) = \frac{g(4) - g(2)}{2} = \frac{f(4) - f(0)}{2} = g'(x_1).$$

Η g' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 4)$ τέτοιο, ώστε: $g''(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = f''(4 - \xi)$.

59. Αν $\gamma = \delta$ τότε από τη σχέση $f(\gamma)f(\delta) < 0$ έχουμε $f^2(\gamma) < 0$ που είναι αδύνατο. Άρα $\gamma \neq \delta$. Έστω $\gamma < \delta$ χωρίς βλάβη της γενικότητας..

α) Η συνάρτηση f είναι στο $[\gamma, \delta]$ και $f(\gamma)f(\delta) < 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\gamma, \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$ (1).

Επειδή $f(\gamma)f(\delta) < 0$ οι τιμές $f(\gamma), f(\delta)$ είναι ετερόσημες.

Έστω $f(\gamma) < 0$ και $f(\delta) > 0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \gamma], [\gamma, x_0], [x_0, \delta], [\delta, \beta]$ οπότε υπάρχουν $x_3 \in (\alpha, \gamma), x_4 \in (\gamma, x_0), x_5 \in (x_0, \delta), x_6 \in (\delta, \beta)$ τέτοια, ώστε :

$$f'(x_3) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha} < 0, f'(x_4) = \frac{f(x_0) - f(\gamma)}{x_0 - \gamma} = \frac{-f(\gamma)}{x_0 - \gamma} > 0 \text{ και}$$

$$f'(x_6) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta} < 0.$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f' σε καθένα από τα διαστήματα $[x_3, x_4], [x_5, x_6]$, οπότε υπάρχουν $\xi_2 \in (x_3, x_4), \xi_1 \in (x_5, x_6)$

τέτοια, ώστε : $f''(\xi_2) = \frac{f'(x_4) - f'(x_3)}{x_4 - x_3} > 0, f''(\xi_1) = \frac{f'(x_6) - f'(x_5)}{x_6 - x_5} < 0$.

γ) Επειδή $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$ και η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$.

60. Έστω ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), \Gamma(x_3, f(x_3))$ με

$x_1 < x_2 < x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε

$$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \text{ Ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος Θ.Μ.Τ για την f οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$

τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi_1)$.

Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

61. Έστω ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ με

$x_1 < x_2 < x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε

$$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στα}$$

διαστήματα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ και παραγωγίσιμη στα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και

$$\xi_2 \in (x_2, x_3) \text{ τέτοια, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

άρα $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f'

είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει

τουλάχιστον μία ρίζα στο (ξ_1, ξ_2) που είναι άτοπο. Άρα τρία οποιαδήποτε σημεία της γραφικής παράστασης της f , δεν μπορούν να είναι συνευθειακά.

62. Έστω ε μία τυχαία εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$. Τότε

αυτή έχει εξίσωση: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Τα κοινά σημεία της ε με την C_f , προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \end{cases}$$

Η εξίσωση $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ έχει προφανή ρίζα $x = x_0$. Έστω ότι έχει και άλλη λύση $\rho \neq x_0$, τότε θα ισχύει: $f(\rho) = f'(x_0)(\rho - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow$

$$f(\rho) - f(x_0) = f'(x_0)(\rho - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} \quad (1)$$

Έστω $\rho < x_0$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι συνεχής στο $[\rho, x_0]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ, x_0) , οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα θα

$$\text{υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi \in (\rho, x_0) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} \quad (2).$$

Από (1), (2), προκύπτει $f'(x_0) = f'(\xi)$. Όμως η f' είναι 1-1 άρα ισχύει

$x_0 = \xi$ που είναι άτοπο, γιατί $\xi \in (\rho, x_0)$. Ομοίως αν $x_0 < \rho$.

Άρα, κάθε εφαπτομένη της C_f έχει μοναδικό κοινό σημείο με αυτήν.

63.α) ε: Η εφαπτομένη στο A είναι η $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$. Επειδή διέρχεται από το B είναι : $f(\beta) - f(\alpha) = f'(\alpha)(\beta - \alpha) \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\alpha)$ (1).

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\alpha).$$

Αν η f ήταν 1-1 τότε θα ήταν $x_1 = \alpha$ που είναι άτοπο, άρα η f' δεν είναι 1-1.

β) Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, x_1]$ και παραγωγίσιμη στο (α, x_1) , άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle επομένως υπάρχει $\xi \in (\alpha, x_1) \subseteq (\alpha, \beta)$: $f''(\xi) = 0$.

64. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Έστω ότι η ε τέμνει την C_f στα $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_0 < x_1 < x_2$. Τότε,

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0, x_1]$ οπότε υπάρχει

$$\xi_1 \in (x_0, x_1) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0). \text{ Επειδή } \varepsilon // AB \text{ είναι}$$

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_{AB} \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \text{ Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την } f$$

στο $[x_1, x_2]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0).$$

Επειδή η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f'' είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_0, \xi_1], [\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα

$(x_0, \xi_1), (\xi_1, \xi_2)$. Επίσης $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(x_0)$ άρα του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi \in (x_0, \xi_1)$ και $\xi' \in (\xi_1, \xi_2)$, $f''(\xi) = f''(\xi') = 0$ άτοπο.

Δηλαδή η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Αν η f'' ήταν γνησίως μονότονη, τότε θα είχε το πολύ μία ρίζα άρα καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, η f'' δεν είναι γνησίως μονότονη.

65. Έστω ότι υπάρχει ευθεία ε , που εφάπτεται της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < x_2$. Τότε, θα είναι

$$\lambda_\varepsilon = f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1). \text{ Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής και}$$

παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (x_1, x_2) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2). \text{ Από (1), (2) είναι}$$

$f'(x_1) = f'(\xi) = f'(x_2)$. Η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1, \xi]$ και $[\xi, x_2]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_1, \xi), (\xi, x_2)$ οπότε ισχύουν οι

προϋποθέσεις του Θ. Rolle άρα υπάρχουν $\rho_1 \in (x_1, \xi)$, $\rho_2 \in (\xi, x_2)$ τέτοια,

ώστε $f''(\rho_1) = f''(\rho_2) = 0$. Η f'' είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη

στο (ρ_1, ρ_2) και $f''(\rho_1) = f''(\rho_2)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος

Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(x_0) = 0$, άτοπο, γιατί

$$f^{(3)}(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in I_\infty.$$

66. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ. για την f στο $[5, x]$ οπότε

υπάρχει $\xi \in (5, x)$, $x > 5$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \Leftrightarrow f(x) = x f'(\xi) + f(5) - 5 f'(\xi). \text{ Είναι}$$

$$\xi > 5 \Leftrightarrow f'(\xi) > f'(5) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} > f'(5) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(5) > f'(5)x - 5f'(5) \Leftrightarrow f(x) > x f'(5) + f(5) - 5 f'(5). \text{ Επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f'(5) + f(5) - 5 f'(5)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(5) = +\infty \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

67. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ άρα $f'(x) > M$ με $M > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$ με

α πάρα πολύ μεγάλο θετικό αριθμό. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[\alpha, x]$, άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, x) \subseteq (\alpha, +\infty)$

$$\text{τέτοιο ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$$

$$\text{Έχουμε } f'(\xi) > M \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} > M \Leftrightarrow f(x) > M(x - \alpha) + f(\alpha)$$

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (M(x - \alpha) + f(\alpha)) = +\infty$ επειδή $M > 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

68.. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο διάστημα $[x, x + \sqrt{x}]$, $x > 0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x + \sqrt{x})$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x + \sqrt{x}) - f(x)}{\sqrt{x}}. \text{ Είναι } |f'(\xi)| \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq f'(\xi) \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x + \sqrt{x}) - f(x)}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x}. \text{ Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ οπότε από το}$$

κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + \sqrt{x}) - f(x)] = 0$.

69.α) Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x < x$. Έστω $f(t) = e^t$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\eta\mu x, x]$, $x \in (0, \pi)$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (\eta\mu x, x): f'(\xi) = \frac{e^{\eta\mu x} - e^x}{\eta\mu x - x} \Leftrightarrow e^{\xi} = \frac{e^{\eta\mu x} - e^x}{\eta\mu x - x}$$

β) Είναι $\eta\mu x < \xi < x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} < e^{\xi} < e^x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} < \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} < e^x$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\eta\mu x}$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = 1.$$

Θ.Μ.Τ. μέσα σε Θ.Μ.Τ.

70. Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$f'(x) = e^x - 2x$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, οπότε υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\beta} - \beta^2 - e^{\alpha} + \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(x_1) = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} - \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} - \beta - \alpha \quad (1). \text{ Έστω η συνάρτηση}$$

$g(x) = e^x$, $x \in [\alpha, \beta]$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την g , στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_2) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{x_2} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} \quad (2). \text{ Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει:}$$

$$f'(x_1) = e^{x_2} - \beta - \alpha \Leftrightarrow f'(x_1) + \alpha + \beta = e^{x_2}.$$

71. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{x \eta \mu x + 1}{x} \right)' = \left(\eta \mu x + \frac{1}{x} \right)' = \sigma \nu x - \frac{1}{x^2} \quad \text{άρα ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος μέσης τιμής οπότε υπάρχει $x_1 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{\beta \eta \mu \beta + 1}{\beta} - \frac{\alpha \eta \mu \alpha + 1}{\alpha}}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{\alpha \beta \eta \mu \beta + \alpha - \alpha \beta \eta \mu \alpha - \beta}{\alpha \beta}}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(x_1) = \frac{\alpha \beta (\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha) - (\beta - \alpha)}{\alpha \beta (\beta - \alpha)} = \frac{\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{1}{\alpha \beta} \quad (1)$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \eta \mu x$, $x \in [a, \beta]$. Ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος μέσης τιμής για την g , στο $[a, \beta]$ οπότε υπάρχει $x_2 \in (a, \beta)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } g'(x_2) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \sigma \nu x_2 = \frac{\eta \mu \beta - \eta \mu \alpha}{\beta - \alpha} \quad (2).$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει: } f'(x_1) = \sigma \nu x_2 - \frac{1}{\alpha \beta} \Leftrightarrow f'(x_1) + \frac{1}{\alpha \beta} = \sigma \nu x_2$$

72.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[a, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{1}{\beta} - \beta - \frac{1}{\alpha} + \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} - 1 \quad (1)$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την $g(x) = \frac{1}{x}$ στο

$[a, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi_2^2} = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} \quad (2).$$

$$\text{Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει: } f'(\xi_1) = -\frac{1}{\xi_2^2} - 1.$$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{2^\beta + \beta^2 - 2^\alpha - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \\ &= \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} = \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} + \alpha + \beta \quad (1) \end{aligned}$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την $g(x) = 2^x$ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow 2^{\xi_2} \cdot \ln 2 = \frac{2^\beta - 2^\alpha}{\beta - \alpha} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει: $f'(\xi_1) = 2^{\xi_2} \cdot \ln 2 + \alpha + \beta$.

γ) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\ln \beta - \eta\mu\beta - \ln \alpha + \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} - \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για τις $g(x) = \eta\mu x$ και $h(x) = \ln x$ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχουν $\xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$$g'(\xi_2) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \sin \xi_2 = \frac{\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha}{\beta - \alpha} \quad (2) \text{ και}$$

$$h'(\xi_3) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_3} = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} \quad (3). \text{ Από τις σχέσεις (1),(2)}$$

προκύπτει: $f'(\xi_1) = \frac{1}{\xi_3} - \sin \xi_2$.

Ανισοτικές σχέσεις

73. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \varepsilon\phi x$ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = \frac{1}{\sin^2 \xi} = \frac{\varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha}$. Είναι

$$\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow \sin \alpha > \sin \xi > \sin \beta \Leftrightarrow \sin^2 \alpha > \sin^2 \xi > \sin^2 \beta \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \xi} < \frac{1}{\sin^2 \beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} < \frac{\varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\sin^2 \beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \alpha} < \varepsilon\phi\beta - \varepsilon\phi\alpha < \frac{\beta - \alpha}{\sin^2 \beta}.$$

74.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[a, \beta]$ οπότε

υπάρχει $\xi \in (a, \beta) : f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{a}}{\beta - a}$. Είναι

$$\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} < \sqrt{\xi} < \sqrt{\beta} \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha} < 2\sqrt{\xi} < 2\sqrt{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} > \frac{1}{2\sqrt{\xi}} > \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\beta}} < \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha} < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\beta}} < \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}.$$

β) για την $f(x) = x^v$ στο $[a, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta) :$

$$f'(\xi) = v\xi^{v-1} = \frac{\beta^v - \alpha^v}{\beta - \alpha}. \text{ Είναι } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow v\alpha^{v-1} < v\xi^{v-1} < v\beta^{v-1} \Leftrightarrow$$

$$v\alpha^{v-1} < \frac{\beta^v - \alpha^v}{\beta - \alpha} < v\beta^{v-1} \Leftrightarrow v(\beta - \alpha)\alpha^{v-1} < \beta^v - \alpha^v < v(\beta - \alpha)\beta^{v-1}.$$

γ) Έστω $f(x) = x \ln x$, $x \in [a, \beta]$. Η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f'(x) = \ln x + 1$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ άρα

$$\text{υπάρχει } \xi \in (a, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \Leftrightarrow$$

$$\ln \xi + 1 = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \ln \xi + \ln e = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \ln(e\xi) = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow e\alpha < e\xi < e\beta \Leftrightarrow \ln(e\alpha) < \ln(e\xi) < \ln(e\beta) \Leftrightarrow$$

$$\ln(e\alpha) < \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta - \alpha} < \ln(e\beta) \Leftrightarrow$$

$$(\beta - \alpha)\ln(e\alpha) < \beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha < (\beta - \alpha)\ln(e\beta)$$

75. Έστω $\alpha < \beta$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \sin x$ στο

$$[a, \beta] \text{ οπότε υπάρχει } \xi \in (a, \beta) : f'(\xi) = -\eta\mu\xi = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} \text{ Είναι}$$

$$|f'(\xi)| = |-\eta\mu\xi| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |\sin\beta - \sin\alpha| \leq |\beta - \alpha|. \text{ Όμοια αν}$$

$\alpha > \beta$. Τέλος αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

76. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \kappa \epsilon \phi x$ στο $[a, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta) : f'(\xi) = \frac{\beta \epsilon \phi \beta - \alpha \epsilon \phi \alpha}{\beta - \alpha}$. Όμως $f'(\xi) = \epsilon \phi \xi + \frac{\xi}{\sigma \upsilon \nu^2 \xi} > 0$, αφού $\xi \in (a, \beta) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $\frac{\beta \epsilon \phi \beta - \alpha \epsilon \phi \alpha}{\beta - \alpha} > 0 \Leftrightarrow \beta \epsilon \phi \beta - \alpha \epsilon \phi \alpha > 0 \Leftrightarrow \beta \epsilon \phi \beta > \alpha \epsilon \phi \alpha \Leftrightarrow \frac{\epsilon \phi \alpha}{\epsilon \phi \beta} < \frac{\beta}{\alpha}$.

Αυξημένης δυσκολίας

77.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $\left[a, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in \left(a, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) : f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta).$$

β) Έστω $f(x) = -e^{-x}$, $x \in [1, e]$. Είναι $f'(x) = e^{-x}$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε σύμφωνα με το α) σκέλος είναι

$$2f\left(\frac{1+e}{2}\right) > f(1) + f(e) \Leftrightarrow -2e^{-\frac{1+e}{2}} > -e^{-1} - e^{-e} \Leftrightarrow e^{-\frac{e+1}{2}} < \frac{e^{-e} + e^{-1}}{2}.$$

78.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \eta\mu x$ στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{15}\right]$

$$\text{οπότε υπάρχει } \xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{15}\right) : f'(\xi) = \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\eta\mu\frac{7\pi}{15} - \eta\mu\frac{\pi}{6}}{\frac{7\pi}{15} - \frac{\pi}{6}} = \frac{\eta\mu\frac{7\pi}{15} - \frac{1}{2}}{\frac{3\pi}{10}}.$$

$$\text{Είναι } \frac{\pi}{6} < \xi < \frac{7\pi}{15} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} > \sigma\upsilon\nu\xi > \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{15}, \text{ άρα}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\eta\mu\frac{7\pi}{15} - \frac{1}{2}}{\frac{3\pi}{10}} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{7\pi}{15} - \frac{1}{2} < \frac{3\sqrt{3}\pi}{20}.$$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \eta\mu x$ στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}\right]$ οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}\right) : f'(\xi) = \sigma\upsilon\nu\xi = \frac{\eta\mu\frac{5\pi}{18} - \eta\mu\frac{\pi}{4}}{\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\eta\mu\frac{5\pi}{18} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{36}}.$$

$$\text{Είναι } \frac{\pi}{4} < \xi < \frac{5\pi}{18} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} > \sigma\upsilon\nu\xi > \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}, \text{ άρα}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{\eta\mu\frac{5\pi}{18} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{36}} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{5\pi}{18} - \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\pi\sqrt{2}}{72} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{5\pi}{18} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{72}.$$

79.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \ln x$ στο $[e, \pi]$ οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (e, \pi) : f'(\xi) = \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e}.$$

$$\text{Είναι } e < \xi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} < \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi - e}{\pi} < \ln \pi - 1 < \frac{\pi - e}{e} \Leftrightarrow 1 - \frac{e}{\pi} + 1 < \ln \pi < \frac{\pi}{e} - 1 + 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}.$$

$$\text{β) Είναι } e^e \pi^\pi > e^{2\pi} \Leftrightarrow \ln(e^e \pi^\pi) > 2\pi \Leftrightarrow e \ln e + \pi \ln \pi > 2\pi \Leftrightarrow$$

$$e \ln e - \pi \ln e > \pi \ln e - \pi \ln \pi \Leftrightarrow$$

$$(e - \pi) \ln e > \pi (\ln e - \ln \pi) \Leftrightarrow e - \pi > \pi (\ln e - \ln \pi).$$

Έστω $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[e, \pi]$

$$\text{οπότε υπάρχει } \xi \in (e, \pi) : f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - \ln e}{\pi - e} \Leftrightarrow$$

$$\ln \pi - \ln e = \frac{1}{\xi} (\pi - e). \text{Είναι } e < \xi < \pi, \text{ άρα } \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} (\pi - e) > \frac{\pi - e}{\pi} \Leftrightarrow$$

$$\ln \pi - \ln e > \frac{\pi - e}{\pi} \Leftrightarrow \pi (\ln e - \ln \pi) < e - \pi.$$

$$\mathbf{80.} \text{ Είναι } ey < \left(\frac{x^x}{y^y} \right)^{\frac{1}{x-y}} < ex \Leftrightarrow \ln(ey) < \ln \left(\frac{x^x}{y^y} \right)^{\frac{1}{x-y}} < \ln(ex) \Leftrightarrow$$

$$\ln e + \ln y < \frac{1}{x-y} \ln \left(\frac{x^x}{y^y} \right) < \ln e + \ln x \Leftrightarrow$$

$$1 + \ln y < \frac{\ln x^x - \ln y^y}{x-y} < 1 + \ln x \Leftrightarrow 1 + \ln y < \frac{x \ln x - y \ln y}{x-y} < 1 + \ln x$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t \ln t$, $t \in [y, x]$, η οποία είναι συνεχής στο

$[y, x]$ και παραγωγίσιμη στο (y, x) , με παράγωγο $f'(t) = \ln t + t \frac{1}{t} = \ln t + 1$. Άρα

ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f οπότε υπάρχει

$$\xi \in (y, x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Leftrightarrow 1 + \ln \xi = \frac{x \ln x - y \ln y}{x - y} \quad (1).$$

$$\text{Είναι } y < \xi < x \Leftrightarrow \ln y < \ln \xi < \ln x \Leftrightarrow 1 + \ln y < 1 + \ln \xi < 1 + \ln x \Leftrightarrow \quad (1)$$

$$1 + \ln y < \frac{x \ln x - y \ln y}{x - y} < 1 + \ln x.$$

81. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \ln(\ln x)$ στο $[\alpha, \alpha + 1]$

οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha + 1) : f'(\xi) = f(\alpha + 1) - f(\alpha) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\xi \ln \xi} = \ln(\ln(\alpha + 1)) - \ln(\ln \alpha). \text{ Είναι } \alpha < \xi < \alpha + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha} \quad (1) \text{ και}$$

$$\ln \alpha < \ln \xi < \ln(\alpha + 1) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln(\alpha + 1)} < \frac{1}{\ln \xi} < \frac{1}{\ln \alpha} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1) \cdot (2) \Rightarrow \frac{1}{(\alpha + 1) \ln(\alpha + 1)} < \frac{1}{\xi \ln \xi} < \frac{1}{\alpha \ln \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\ln(\alpha + 1)^{\alpha + 1}} < \ln(\ln(\alpha + 1)) - \ln(\ln \alpha) < \frac{1}{\ln \alpha^{\alpha}}.$$

82.α) Είναι $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

Έστω $f(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$, $x > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με παράγωγο $f'(t) = \frac{1}{t}$ άρα οπότε υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right). \text{ Είναι } 0 < x < \xi < x+1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(t) = \ln t$ στο $[x-1, x+1]$, $x > 1$,

οπότε υπάρχει $\xi \in (x-1, x+1)$: $f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x-1)}{x+1 - x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}.$

$$\text{Είναι } x-1 < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} < \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x-1} < \frac{2}{x-1}.$$

83. Έστω $x > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t) = e^t$ με $t \in [0, x]$, η οποία είναι

συνεχής $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$, με $h'(t) = e^t$. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την h στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο,

ώστε $h'(\xi) = \frac{h(x) - h(0)}{x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} (1).$

$$\text{Είναι } 0 < \xi < x \Leftrightarrow e^0 < e^\xi < e^x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x < e^x - 1 < xe^x \Leftrightarrow$$

$x+1 < e^x < xe^x + 1$. Όμοια για $x < 0$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, 0]$... $x+1 < e^x < xe^x + 1$. Για $x=0$ είναι $x+1 = e^x = xe^x = 1$.

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x+1 \leq e^x \leq xe^x + 1$.

84. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(t) = \ln t$ σε καθένα από τα διαστήματα $[x-1, x]$, $[x, x+1]$, $x > 1$ οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (x-1, x)$,

$$\xi_2 \in (x, x+1) \text{ τέτοια ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - x + 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_1} = \ln \frac{x}{x-1} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_2} = \ln \frac{x+1}{x}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < x < \xi_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\xi_2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\xi_1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x} < \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

85.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \sqrt[3]{x}$ σε καθένα από τα διαστήματα $[3,4], [6,7]$ οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (3,4), \xi_2 \in (6,7)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_1^2}} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(7) - f(6)}{7 - 6} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_2^2}} = \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{6}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_1^2 < \xi_2^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\xi_1^2} < \sqrt[3]{\xi_2^2} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\xi_1^2} < 3\sqrt[3]{\xi_2^2} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_2^2}} < \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi_1^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}.$$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \sqrt[4]{x}$ σε καθένα από τα διαστήματα $[2,3], [4,5]$ οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (2,3), \xi_2 \in (4,5)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt[4]{\xi_1^3}} = \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} \Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt[4]{\xi_2^3}} = \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{4}. \text{ Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow \xi_1^3 < \xi_2^3 \Leftrightarrow$$

$$4\sqrt[4]{\xi_1^3} < 4\sqrt[4]{\xi_2^3} \Leftrightarrow \frac{1}{4\sqrt[4]{\xi_2^3}} < \frac{1}{4\sqrt[4]{\xi_1^3}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{4} < \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{3}$$

86.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-2,-1], [1,2]$ οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (-2,-1), \xi_2 \in (1,2)$ τέτοια,

$$\text{ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - 2} = f(-1) - f(-2) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1). \text{ Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$f(-1) - f(-2) > f(2) - f(1) \Leftrightarrow f(-1) + f(1) > f(2) + f(-2) \Leftrightarrow B > A$$

β) Αρκεί να βρούμε το πρόσημο της διαφοράς

$$\Gamma - \Delta = f(2) + f(3) - f(1) - f(4) = f(2) - f(1) - (f(4) - f(3)).$$

Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 2]$, $[3, 4]$, οπότε υπάρχουν αντίστοιχα $\xi_1 \in (1, 2)$, $\xi_2 \in (3, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = f(4) - f(3)$$

Είναι $1 < \xi_1 < 2 < 3 < \xi_2 < 4$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$$f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(2) - f(1) > f(4) - f(3) \Leftrightarrow$$

$$f(2) - f(1) - (f(4) - f(3)) > 0 \Leftrightarrow \Gamma - \Delta > 0 \Leftrightarrow \Gamma > \Delta.$$

87.α) Είναι $10^x - 9^x = 8^x - 7^x$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο

$(0, +\infty)$ με $f'(t) = xt^{x-1}$. Για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε

καθένα από τα διαστήματα $[7, 8]$ και $[9, 10]$, οπότε υπάρχουν αντίστοιχα

$\xi_1 \in (7, 8)$, $\xi_2 \in (9, 10)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = f(8) - f(7) \Leftrightarrow x\xi_1^{x-1} = 8^x - 7^x$

και $f'(\xi_2) = f(10) - f(9) \Leftrightarrow x\xi_2^{x-1} = 10^x - 9^x$.

Επομένως η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$x\xi_1^{x-1} = x\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \quad \text{ή}$$

$$\left(\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \right).$$

Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, $x = 0$ ή $x = 1$.

β) Είναι $5^x + 6^x = 7^x + 4^x \Leftrightarrow 5^x - 4^x = 7^x - 6^x$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(t) = t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(t) = xt^{x-1}$. Ισχύουν οι

υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[4, 5]$ και

$[6, 7]$, άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (4, 5)$, $\xi_2 \in (6, 7)$ τέτοια, ώστε:

$f'(\xi_1) = f(5) - f(4) \Leftrightarrow x\xi_1^{x-1} = 5^x - 4^x$ και Επομένως η εξίσωση (1) είναι

ισοδύναμη με την εξίσωση: $x\xi_1^{x-1} = x\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \quad \text{ή}$

$$\left(\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1} \Leftrightarrow \frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2} \neq 1 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \right).$$

Άρα, η εξίσωση έχει ακριβώς δύο λύσεις, $x=0$ ή $x=1$.

γ) Είναι $x+2^x=3^x \Leftrightarrow 3^x-2^x=x$. (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t)=t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(t)=xt^{x-1}$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2,3]$ οπότε υπάρχει

$\xi \in (2,3): f'(\xi)=f(3)-f(2) \Leftrightarrow x\xi^{x-1}=3^x-2^x$. Επομένως η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $x=x\xi^{x-1} \Leftrightarrow x-x\xi^{x-1}=0 \Leftrightarrow x(1-\xi^{x-1})=0 \Leftrightarrow (x=0)$ ή $(\xi_1^{x-1}=\xi_2^{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$.

88. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με

$$f'(x)=2x(\ln x+1)+x^2 \frac{1}{x}=x(2\ln x+3). \text{ Επειδή } 1 < x < e \text{ είναι:}$$

$$0 < \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < 2\ln x < 2 \Leftrightarrow 3 < 2\ln x + 3 < 5, \text{ άρα } 3 < x(2\ln x + 3) < 5e \Leftrightarrow$$

$$3 < f'(x) < 5e \text{ (1) για κάθε } x \in (1, e). \text{ Η συνάρτηση } f \text{ είναι συνεχής στο}$$

$[1, x]$, $x \in [1, e)$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του

Θ.Μ.Τ άρα υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2(\ln x+1)+1-1^2(\ln 1+1)-1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{x^2(\ln x+1)-1}{x-1}. \text{ Ομως } 3 < f'(\xi) < 5e, \text{ άρα } 3 < \frac{x^2(\ln x+1)-1}{x-1} < 5e \Leftrightarrow$$

$$3(x-1) < x^2(\ln x+1)-1 < 5e(x-1) \Leftrightarrow 3x-3+1 < x^2(\ln x+1) < 5e(x-1)+1 \Leftrightarrow$$

$$3x-2 < x^2(\ln x+1) < 5e(x-1)+1.$$

89. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο $[x, x+1]$, υπάρχει

$$\xi \in (x, x+1) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x). \text{ Είναι}$$

$$x < \xi < x+1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1)-f(x) < f'(x+1)$$

90. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα

διαστήματα $[x-1, x], [x, x+1]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1, x), \xi_2 \in (x, x+1)$

τέτοια, ώστε : $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x-1)}{x - x + 1} = f(x) - f(x-1)$ και

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Είναι $\xi_1 < x < \xi_2$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x) - f(x-1) < f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow 2f(x) < f(x+1) + f(x-1)$$

91. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2, 4], [4, 6]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (2, 4)$ και $\xi_2 \in (4, 6)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{4 - f(2)}{2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{f(6) - 4}{2}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{4 - f(2)}{2} < \frac{f(6) - 4}{2} \Leftrightarrow$$

$$4 - f(2) < f(6) - 4 \Leftrightarrow f(2) + f(6) < 8.$$

92. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 2], [2, 5]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 5)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = -\frac{f(0)}{2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{f(5)}{3}. \text{ Είναι}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f(0)}{2} < \frac{f(5)}{3} \Leftrightarrow -3f(0) < 2f(5) \Leftrightarrow$$

$$3f(0) + 2f(5) < 0.$$

93. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0, x], [x, 1]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x), \xi_2 \in (x, 1)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{1 - f(x)}{1 - x}. \text{ Επειδή}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \text{ και η } f' \nearrow, \text{ είναι: } f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < \frac{1 - f(x)}{1 - x} \stackrel{x(1-x) > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$(1-x)f(x) < x(1-f(x)) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - xf(x) < x - xf(x) \Leftrightarrow f(x) < x. \text{ Αρκεί να δείξουμε ότι } x < \frac{1}{2-x} \Leftrightarrow$$

$$2x - x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 0 \text{ που ισχύει στο } (0, 1).$$

94.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο $[0,1]$, υπάρχει $\xi \in (0,1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1)-f(0).$$

$$\text{Είναι } f'(\xi) \geq \frac{f^2(1)+f^2(0)+2f(0)+5}{2} \Leftrightarrow$$

$$f(1)-f(2) \geq \frac{f^2(1)+f^2(0)+2f(0)+5}{2} \Leftrightarrow 2f(1)-2f(0) \geq f^2(1)+f^2(0)+$$

$$2f(0)+5 \Leftrightarrow f^2(1)-2f(1)+1+f^2(0)+2f(0)+4 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(1)-1)^2 + (f(0)-2)^2 \leq 0 \text{ άρα } f(1)=1 \text{ και } f(0)=-2.$$

β) Από το α) ερώτημα η αρχική ανίσωση γίνεται $f'(x) \geq 3$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,x]$,

$[x,1]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,x)$, $\xi_2 \in (x,1)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)+2}{x} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \frac{1-f(x)}{1-x}.$$

$$\text{Είναι } f'(\xi_1) \geq 3 \Leftrightarrow \frac{f(x)+2}{x} \geq 3 \Leftrightarrow f(x)+2 \geq 3x \Leftrightarrow f(x) \geq 3x-2 \quad (1)$$

$$\text{και } f'(\xi_2) \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{1-x} \geq 3 \Leftrightarrow 1-f(x) \geq 3-3x \Leftrightarrow -f(x) \geq -3x+2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \leq 3x-2 \quad (2). \text{ Από } (1), (2) \text{ έχουμε } f(x) = 3x-2, x \in (0,1). \text{ Επειδή}$$

$$f(1)=1 \text{ και } f(0)=-2, \text{ είναι } f(x) = 3x-2, x \in [0,1].$$

Σύνθετες ασκήσεις

95.α) Έστω ότι η f έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in [\alpha, \beta]$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$

οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f , άρα υπάρχει

$\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, που είναι αδύνατο. Άρα η f δεν έχει δύο ρίζες στο $[\alpha, \beta]$ οπότε έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό.

β) i. Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία $\varepsilon: y = f'(x_0)(x - x_0)$. Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(x_0)(x - x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = f'(x_0)(x - x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) - f'(x_0)(x - x_0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Η (1) έχει προφανή ρίζα το x_0 . Έστω τώρα ότι υπάρχει και άλλη ρίζα $\rho < x_0$, τότε $f(\rho) = f(x_0) = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Η g είναι συνεχής στο $[\rho, x_0]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων, η g παραγωγίσιμη στο (ρ, x_0) με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi_1 \in (\rho, x_0)$ τέτοιο, ώστε:
 $g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) - f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f'(x_0)$. Επειδή η f' είναι 1-1 ισχύει $\xi_1 = x_0$ που είναι άτοπο. Άρα το $A(x_0, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με την C_f .

ii. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in (a, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1) = -\frac{f(a)}{x_0 - a} \text{ και } f'(x_2) = \frac{f(\beta)}{\beta - x_0}. \text{ Επειδή } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in [a, \beta],$$

είναι $f(a) \neq 0$ και $f(\beta) \neq 0$. Οπότε

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = -\frac{x_0 - a}{f(a)} + \frac{\beta - x_0}{f(\beta)} = \frac{f(a)\beta - f(a)x_0 - f(\beta)x_0 + af(\beta)}{f(a)f(\beta)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = -x_0 \left(\frac{f(a) + f(\beta)}{f(a)f(\beta)} \right) = -x_0 \left(\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(\beta)} \right)$$

96.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-a, 0]$ και $f(-a) < f(a) < f(0)$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0 \in (-a, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(a)$ (1). Αν η f ήταν 1-1 τότε από τη σχέση (1) θα προέκυπτε ότι $x_0 = a$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν είναι 1-1.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-a, a]$, παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$ και $f(x_0) = f(a)$, από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(x_0, a) \subseteq (-a, a)$.

γ) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[-a, 0]$, $[0, a]$ και παραγωγίσιμη στα $(-a, 0)$ και $(0, a)$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (-a, 0)$ και $\xi_2 \in (0, a)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-a)}{a}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(a) - f(0)}{a}$. Όμως $f(-a) < f(a) < f(0)$ και $a > 0$, άρα

$f'(\xi_1) > 0$ και $f'(\xi_2) < 0$. Η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, άρα υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$.

97.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \frac{2\beta - 2a}{\beta - a} = \frac{2(\beta - a)}{\beta - a} = 2 = \lambda_\varepsilon, \text{ άρα υπάρχει εφαπτομένη}$$

της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία ε :
 $2x - y + 1 = 0$.

β) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Για να διέρχεται η ε_1 από την αρχή των αξόνων, πρέπει: $0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$.

$$\text{Είναι } x f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow x f'(x) - x' f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x f'(x) - x' f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0. \text{ Έστω } g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [a, \beta]. \text{ Η } g \text{ είναι συνεχής στο } [a, \beta],$$

παραγωγίσιμη στο (a, β) με $g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$. Είναι

$$g(a) = \frac{f(a)}{a} = \frac{2a}{a} = 2, g(\beta) = \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{2\beta}{\beta} = 2, \text{ δηλαδή } g(a) = g(\beta), \text{ άρα}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε η εξίσωση

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x f'(x) - f(x) = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (a, \beta).$$

γ) Έστω $h(x) = f(x) - a - \beta, x \in [a, \beta]$. Η h είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και

$$h(a) = f(a) - a - \beta = 2a - a - \beta = a - \beta < 0,$$

$$h(\beta) = f(\beta) - a - \beta = 2\beta - a - \beta = \beta - a > 0, \text{ δηλαδή } h(a)h(\beta) < 0.$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = a + \beta$.

δ) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο σε καθένα από τα διαστήματα $[a, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε υπάρχουν $\rho_1 \in (a, x_0)$ και $\rho_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\rho_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = \frac{a + \beta - 2a}{x_0 - a} = \frac{\beta - a}{x_0 - a} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\rho_1)} = \frac{x_0 - a}{\beta - a} \text{ και}$$

$$f'(\rho_2) = \frac{f(\beta) - f(x_0)}{\beta - x_0} = \frac{2\beta - a - \beta}{\beta - x_0} = \frac{\beta - a}{\beta - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(\rho_2)} = \frac{\beta - x_0}{\beta - a}.$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{f'(\rho_1)} + \frac{1}{f'(\rho_2)} = \frac{x_0 - a}{\beta - a} + \frac{\beta - x_0}{\beta - a} = \frac{x_0 - a + \beta - x_0}{\beta - a} = \frac{\beta - a}{\beta - a} = 1.$$

98. α) Έστω ότι η f δεν είναι “1-1”. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ για τα οποία είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Έστω $x_1 < x_2$. Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f είναι παραγωγίσιμη άρα συνεχής στο διάστημα αυτό και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Ατοπο γιατί $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η συνάρτηση f είναι 1-1.

β) Η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 1)$, οπότε ισχύει :

$$f(1) = 5 \text{ και } f(-2) = 1. \text{ Είναι : } f^{-1}(-4 + f(x^2 - 8)) = -2 \Leftrightarrow$$

$$-4 + f(x^2 - 8) = f(-2) \Leftrightarrow -4 + f(x^2 - 8) = 1 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = 5 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 - 8) = f(1) \stackrel{f^{-1}-1}{\Leftrightarrow} x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow (x = 3) \text{ ή } (x = -3).$$

γ) Έστω $M(\xi, f(\xi))$ το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι

$$\text{κάθετη στην ευθεία } (\varepsilon). \text{ Πρέπει να ισχύει } f'(\xi) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{4}{3}. \text{ Η } f$$

είναι συνεχής στο $[-2, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 1)$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, οπότε υπάρχει $\xi \in (-2, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{5 - 1}{3} = \frac{4}{3}.$$

99. α) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[a, x]$ και $[x, \beta]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (a, x)$ και

$$\xi_2 \in (x, \beta) \text{ τέτοια, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(x)}{x - a} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} = \frac{-f(x)}{\beta - x} \quad (2). \text{Επειδή } f'(x) \leq 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta) \text{ είναι:}$$

$$\begin{cases} f'(\xi_1) \leq 0 \\ f'(\xi_2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x)}{x - \alpha} \leq 0 \\ \frac{-f(x)}{\beta - x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}. \text{Άρα } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (\alpha, \beta)$$

και αφού $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

β) i. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την g στο $[\alpha, \beta]$,

οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Επειδή $g'(x) \leq 6$

$$\text{για κάθε } x \in (\alpha, \beta), \text{ ισχύει ότι: } g'(\xi) \leq 6 \Leftrightarrow \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$g(\beta) - g(\alpha) \leq 6(\beta - \alpha) \Leftrightarrow \beta^2 + 9 + \alpha^2 - 2\alpha + 4 \leq 6\beta - 6\alpha \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 - 6\beta + 9 + \alpha^2 + 4\alpha + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (\beta - 3)^2 + (\alpha + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha = -2 \text{ και } \beta = 3.$$

ii. Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$ είναι $g(-2) = -12$ και $g(3) = 18$. Θεωρούμε την

$f(x) = g(x) - 6x$, η οποία είναι συνεχής στο $[-2, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(-2, 3)$, $f(-2) = g(-2) + 12 = -12 + 12 = 0$ και

$$f(3) = g(3) - 18 = 18 - 18 = 0. \text{Επειδή } f'(x) = g'(x) - 6 \leq 0, \text{ λόγω του}$$

προηγούμενου ερωτήματος ισχύει:

$$f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in [-2, 3], \text{ δηλαδή } g(x) = 6x \text{ για κάθε } x \in [-2, 3].$$

100. α) Είναι $f^3(x) + f(x) = x - 1$ (1). Από τη σχέση (1) για $x = 1$ έχουμε

$$f^3(1) + f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) \left(\underbrace{f^2(1) + 1}_{\neq 0} \right) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0.$$

Με παραγωγή της σχέσης (1) έχουμε: $(f^3(x) + f(x))' = (x - 1)' \Leftrightarrow$

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1 \quad (2).$$

Από τη σχέση (2) για $x = 1$ έχουμε $3f^2(1)f'(1) + f'(1) = 1 \Leftrightarrow f'(1) = 1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο 1 έχει εξίσωση :

$$(\varepsilon) : y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

β) Από τη σχέση (2) έχουμε $f'(x)(3f^2(x)+1)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+1}$.

Όμως $f^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3f^2(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3f^2(x)+1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3f^2(x)+1} \leq 1 \Leftrightarrow f'(x) \leq 1$.

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[1, x]$ οπότε

υπάρχει $\xi \in (1, x): f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Είναι $f'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq x-1$. Για $x=1$ ισχύει η ισότητα.

γ) Από τη σχέση (1) για $x=\alpha$, $x=\beta$ έχουμε αντίστοιχα :

$$f^3(\alpha) + f(\alpha) = \alpha - 1 \quad (3), \quad f^3(\beta) + f(\beta) = \beta - 1 \quad (4).$$

Με αφαίρεση κατά μέλη της σχέσης (3) από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^3(\beta) - f^3(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha) = \beta - \alpha \Leftrightarrow$$

$$(f(\beta) - f(\alpha))(f^2(\beta) + f(\beta)f(\alpha) + f^2(\alpha) + 1) = \beta - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{f^2(\beta) + f(\beta)f(\alpha) + f^2(\alpha) + 1}. \text{ Ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{f^2(\beta) + f(\beta)f(\alpha) + f^2(\alpha) + 1}.$$

δ) Έστω ότι υπάρχουν με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$ (5), τότε

$$f^3(x_1) \geq f^3(x_2) \quad (6). \text{ Με πρόσθεση των σχέσεων (5) και (6) έχουμε}$$

$$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 - 1 \geq x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) = 0$

101. α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ με $x_1 < x_2$ (1) είναι

$$\sin x_1 > \sin x_2 \Leftrightarrow -\sin x_1 < -\sin x_2 \quad (2).$$

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$$x_1 - \sin x_1 < x_2 - \sin x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2), \text{ οπότε η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

στο $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$. Είναι $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{6} < 0$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{4} > 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος

Bolzano και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$:

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sin x_0 = x_0$$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $\left[x_0, \frac{\pi}{4}\right]$

οπότε υπάρχει $\xi \in \left(x_0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(x_0)}{\frac{\pi}{4} - x_0} \Leftrightarrow$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) f'(\xi)$$

γ) i. Είναι $f'(\xi) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4} - x_0} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\pi}{4} - x_0} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{3\pi}{8} - \frac{3x_0}{2} \Leftrightarrow 2\pi - 4\sqrt{2} > 3\pi - 12x_0 \Leftrightarrow$$

$$12x_0 > \pi + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x_0 > \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}. \text{ Επειδή } x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right), \text{ αρκεί}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \pi + 4\sqrt{2} > 2\pi \Leftrightarrow \pi < 4\sqrt{2} \text{ που ισχύει.}$$

ii. $f'(\xi) > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4} - x_0} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{4} - x_0\right) \Leftrightarrow \frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{\pi}{4} - x_0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right) < x_0 \text{ και επειδή } x_0 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ είναι } \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right) < x_0 < \frac{\pi}{4}$$

102. α) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αρκεί να υπάρχει x_0 για το οποίο να ισχύει ότι:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [1, 2]$. Η a είναι συνεχής στο $[1, 2]$

και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $a'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$. Είναι

$$a(1) = \frac{f(1)}{1} = 1, a(2) = \frac{f(2)}{2} = 1, \text{ δηλαδή } a(1) = a(2), \text{ οπότε ισχύουν οι}$$

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$a'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $b(x) = xf'(x) - f(x)$. Έστω ότι η εξίσωση $b(x) = 0$

έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Η b είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και

παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με παράγωγο

$$b'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x).$$

Επειδή $b(x_1) = b(x_2) = 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε

υπάρχει $x_3 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $b'(x_3) = 0 \Leftrightarrow x_3 f''(x_3) = 0 \Leftrightarrow f''(x_3) = 0$

άτοπο. Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$b(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0$ οπότε η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Έστω ότι η f' δεν είναι 1-1, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = f'(x_2)$. Έστω $x_1 < x_2$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1, x_2) , άρα ισχύουν οι

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi) = 0 \text{ που είναι άτοπο. Ομοίως αν } x_1 > x_2.$$

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $f'(x_1) \neq f'(x_2)$ οπότε η f' είναι 1-1.

γ) Έστω ε μία τυχαία εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(a, f(a))$. Τότε αυτή έχει εξίσωση: $y - f(a) = f'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Τα κοινά

σημεία της ε με την C_f , προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f'(a)(x-a) + f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) \end{cases}$$

Η εξίσωση $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ έχει προφανή ρίζα $x = a$. Έστω ότι έχει και άλλη λύση $\rho \neq a$, τότε θα ισχύει: $f(\rho) = f'(a)(\rho-a) + f(a) \Leftrightarrow$

$$f(\rho) - f(a) = f'(a)(\rho-a) \Leftrightarrow f'(a) = \frac{f(\rho) - f(a)}{\rho-a} \quad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, οπότε θα είναι συνεχής και παραγωγίσιμη και στο διάστημα $[\rho, a]$ ή $[a, \rho]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho, a)$ ή $\xi \in (a, \rho)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(a)}{\rho-a} \quad (2). \text{ Από (1), (2), προκύπτει } f'(a) = f'(\xi) \text{ και επειδή η } f'$$

είναι 1-1, ισχύει $a = \xi$ που είναι άτοπο, γιατί $\xi \in (\rho, a)$ ή $\xi \in (a, \rho)$. Άρα, κάθε εφαπτομένη της C_f έχει μοναδικό κοινό σημείο με αυτήν.

δ) Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta < \gamma$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f'(\alpha) < f'(\beta) < f'(\gamma) \text{ ή } f'(\alpha) > f'(\beta) > f'(\gamma). \text{ Έστω ότι δεν ισχύει ο}$$

προηγούμενος ισχυρισμός και ότι $f'(\alpha) < f'(\gamma) < f'(\beta)$, τότε επειδή

$$f'(\alpha) \neq f'(\beta) \text{ και η } f' \text{ είναι συνεχής στο } [\alpha, \beta], \text{ ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = f'(\gamma). \text{ Επειδή όμως η } f' \text{ είναι 1-1 ισχύει ότι } \xi = \gamma \text{ που είναι άτοπο}$$

αφού $\gamma \notin (\alpha, \beta)$. Άρα η f' είναι γνησίως μονότονη.

Ομοίως αν $f'(\gamma) < f'(\alpha) < f'(\beta)$ ή $f'(\alpha) > f'(\gamma) > f'(\beta)$ ή

$$f'(\beta) > f'(\alpha) > f'(\gamma).$$

ε) Είναι $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(\ln x) - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{f(\ln x) - 1}{\ln x - 1} \cdot \frac{\ln x - 1}{x - e} \right)$ Θέτουμε $\ln x = u$. Όταν

$$x \rightarrow e \text{ τότε } u \rightarrow 1 \text{ οπότε έχουμε: } \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(\ln x) - 1}{\ln x - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u) - f(1)}{u - 1} = f'(1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$, $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο

$$(0, +\infty) \text{ με παράγωγο } g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{g(x) - g(e)}{x - e} = g'(e) = \frac{1}{e}$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(\ln x) - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \left(\frac{f(\ln x) - 1}{\ln x - 1} \cdot \frac{\ln x - 1}{x - e} \right) = f'(1) \frac{1}{e} = \frac{f'(1)}{e}$$

στ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1, 2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 2 - 1 = 1 = \lambda_\delta, \text{ οπότε η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο}$$

$x = \xi$ είναι παράλληλη στη δ .

ζ) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f σε καθένα από

τα διαστήματα $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ και $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$, $x_2 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

$$\text{τέτοια, ώστε } f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}} = 2 \left(f\left(\frac{3}{2}\right) - 1 \right) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(2) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{2 - \frac{3}{2}} = \frac{2 - f\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = 2 \left(2 - f\left(\frac{3}{2}\right) \right). \text{ Είναι}$$

$$f'(x_1) + f'(x_2) = 2 \left(f\left(\frac{3}{2}\right) - 1 \right) + 2 \left(2 - f\left(\frac{3}{2}\right) \right) = 2 \left(f\left(\frac{3}{2}\right) - 1 + 2 - f\left(\frac{3}{2}\right) \right) = 2.$$

α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \sin x - 2x$ και $f''(x) = -\eta \mu x - 2$. Επομένως η f

είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

$$\text{Όμως } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{36} = \frac{18 - \pi^2}{36} > 0 \text{ και } f(1) = \eta \mu 1 - 1 < 0 \text{ αφού } \eta \mu x \leq 1 \text{ για}$$

κάθε $x \in [0, \pi]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \pi$ στο διάστημα αυτό.

Αρα $f\left(\frac{\pi}{6}\right)f(1) < 0$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano

οπότε υπάρχει $x_1 \in \left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$ άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει

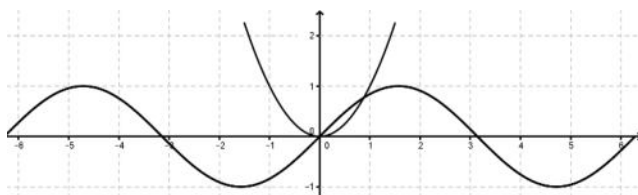
ρίζες το 0 και το x_1 . Επίσης είναι $f(0) = 0$.

Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει κι άλλη ρίζα $\rho \in \mathbb{R} - \{0, x_1\}$ με $0 < x_1 < \rho$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, x_1], [x_1, \rho]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(0, x_1), (x_1, \rho)$, $f(0) = f(x_1) = f(\rho)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος άρα υπάρχουν $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x_2) = f'(x_3)$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$, παραγωγίσιμη στο (x_2, x_3) , οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $x_4 \in (x_2, x_3) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f''(x_4) = 0$ πράγμα άτοπο γιατί $f''(x) = -\eta\mu x - 2 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $-1 \leq -\eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq -\eta\mu x - 2 \leq -1$.

Γεωμετρικά θα χαράξουμε τις $y = \eta\mu x$ και $y = x^2$ και παρατηρούμε ότι έχουν μία ρίζα το μηδέν και άλλη μία ρίζα στο $(0, 1)$.



β) Έστω ότι η f' δεν είναι 1-1 τότε θα υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa < \lambda$ και $f'(\kappa) = f'(\lambda)$ άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_4 \in (\kappa, \lambda)$ τέτοιο ώστε $f''(x_4) = 0$ πράγμα άτοπο όπως δείξαμε παραπάνω.

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{vf(\alpha)x^5 + (v-1)f(\beta)x^2}{vx^4 + x} = L$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδικές ρίζες τις 0 και $x_1 < 1$.

Άρα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, x_1)$ και $(x_1, +\infty)$ θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $f(-\pi) = -\pi^2 < 0$ άρα στο $(-\infty, 0)$ είναι $f(x) < 0$ οπότε $f(\alpha) < 0$. Είναι $f(\pi) = -\pi^2 < 0$ άρα στο $(x_1, +\infty)$ είναι $f(x) < 0$ άρα $f(\beta) < 0$.

$$\text{Αν } v = 0 \text{ τότε } L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-f(\beta)x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-f(\beta)x) = -\infty$$

Αν $v \neq 0$ τότε

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{vf(\alpha)x^5 + (v-1)f(\beta)x^2}{vx^4 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{v}f(\alpha)x^{\cancel{5}}}{\cancel{v}\cancel{x^4}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(\alpha)x) = +\infty$$

δ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, x^2]$ με $x > 1$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (x, x^2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} = \frac{\eta\mu x^2 - x^4 - \eta\mu x + x}{x^2 - x} = \frac{\eta\mu x^2 - \eta\mu x}{x^2 - x} - \frac{x^4 - x}{x^2 - x} =$$

$$= \frac{\eta\mu x^2 - \eta\mu x}{x^2 - x} - \frac{\cancel{x}(x^3 - 1)}{\cancel{x}(x - 1)} = \frac{\eta\mu x^2 - \eta\mu x}{x^2 - x} - \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)} =$$

$$\frac{\eta\mu x^2 - \eta\mu x}{x^2 - x} - x^2 - x - 1 \quad (1). \text{ Έστω η συνάρτηση } g(x) = \eta\mu x. \text{ Ισχύουν οι}$$

υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την g στο $[x, x^2]$ με $x > 1$ οπότε υπάρχει

$$\xi_2 \in (x, x^2) \text{ τέτοιο ώστε } g'(\xi_2) = \frac{g(x^2) - g(x)}{x^2 - x} \Leftrightarrow \text{συν}\xi_2 = \frac{\eta\mu x^2 - \eta\mu x}{x^2 - x} \quad (2)$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (x, x^2)$ με $x > 1$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \text{συν}\xi_2 - x^2 - x - 1.$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (x, x^2)$ με $x > 1$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \text{συν}\xi_2 - x^2 - x - 1.$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0, x]$, $x > 0$

οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$, είναι $f'(\xi) \geq 1$ δηλαδή

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq x + f(0) \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty. \text{ Άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Σωστή απάντηση Γ.}$$

2. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[1, 2]$, άρα θα

υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1)$ (1). Στη σχέση

$$2f'(x) \geq f^2(1) + f^2(2) + 2 \text{ για } x = \xi \text{ έχουμε}$$

$$2f'(\xi) \geq f^2(1) + f^2(2) + 2 \Leftrightarrow 2(f(2) - f(1)) \geq f^2(1) + f^2(2) + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(2) - 2f(1) \geq f^2(1) + f^2(2) + 2 \Leftrightarrow f^2(1) + 2f(1) + 1 + f^2(2) - 2f(2) + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (f(1) + 1)^2 + (f(2) - 1)^2 \leq 0 \text{ όμως } (f(1) + 1)^2 + (f(2) - 1)^2 \geq 0 \text{ άρα}$$

$$(f(1) + 1)^2 + (f(2) - 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(1) = -1 \\ f(2) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(2) = 1 \end{cases}$$

Σωστή απάντηση Δ.

3. Για $x > 2$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[x, x + 2\sqrt{x}]$, άρα θα υπάρξει $\xi \in (x, x + 2\sqrt{x})$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x + 2\sqrt{x}) - f(x)}{2\sqrt{x}} \quad (1). \text{ Όμως}$$

$$|f'(\xi)| \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \left| \frac{f(x + 2\sqrt{x}) - f(x)}{2\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{f(x + 2\sqrt{x}) - f(x)}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2}{\sqrt{x}} \leq f(x + 2\sqrt{x}) - f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0, \text{ οπότε από κριτήριο}$$

παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + 2\sqrt{x}) - f(x)] = 0$. **Σωστή απάντηση Α.**

4. Για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$, άρα

$$\text{υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{2\alpha - 2\beta}{\beta - \alpha} = \frac{2(\alpha - \beta)}{\beta - \alpha} = -2.$$

Οποτε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ θα έχει συντελεστή -2 και

θα είναι παράλληλη με μια ευθεία που έχει συντελεστή -2 ή κάθετη με μια

ευθεία που θα έχει συντελεστή $\frac{1}{2}$. Η ευθεία $x - 2y + 5 = 0$ έχει συντελεστή $\frac{1}{2}$

Σωστή απάντηση Γ.

5. Για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[x - 1, x]$ και $[x, x + 1]$ ισχύουν οι

προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. με $x \geq 1$, άρα θα υπάρχουν $\xi_1 \in (x - 1, x)$ και

$\xi_2 \in (x, x + 1)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f(x) - f(x - 1)$ και $f'(\xi_2) = f(x + 1) - f(x)$

Είναι $x - 1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x + 1$ και αφού η f' γνησίως φθίνουσα τότε

$$f'(\xi_1) > f'(x) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x + 1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x - 1) \quad (1)$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1924$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x - 1) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} f(\omega) = 1924$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x + 1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = 1924. \text{ Οποτε από το κριτήριο παρεμβολής στη}$$

σχέση (1) προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. **Σωστή απάντηση Γ.**

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	2. Σ	3. Σ	4. Σ	5. Λ	6. Λ	7. Σ	8. Λ	9. Σ	10. Σ
11. Σ									

Κριτήριο αξιολόγησης στις παραγώγους.

Υψηλ: Μέχρι Θ.Μ.Τ.

Θέμα Α

A1. Θεωρία

A2. α) Λ β) Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $g(x) = x$ και $f(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, τότε έχουμε: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με τύπο

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty. \quad \mathbf{A3. \Lambda \quad \Lambda \quad \Sigma \quad \Sigma \quad \Sigma}$$

Θέμα Β

B1. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(0,1)$ έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0) \cdot x \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1. \text{ Βρίσκουμε τα σημεία για τα οποία}$$

$$g'(x) = 1 \Leftrightarrow -2x - 1 = 1 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1. \text{ Το σημείο}$$

$$(-1, g(-1)) \equiv (-1, 0) \in (\varepsilon) \text{ αφού οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν}$$

($0 = -1 + 1$). Η εφαπτομένη της g στο -1 και η (ε) είναι παράλληλες με κοινό σημείο άρα ταυτίζονται.

B2. Για την f ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$ άρα υπάρχει

$$\xi \in (\alpha, \beta), \text{ τέτοιος ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}. \text{ Έχουμε}$$

$$\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow e^\alpha < e^\xi < e^\beta \Leftrightarrow e^\alpha < \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} < e^\beta.$$

B3.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = f(x) - g(x) - 1$. Η k είναι συνεχής στο

$$[-2, -1] \text{ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων. } k(-2) = \frac{1}{e^2} + 1 > 0$$

$$k(-1) = f(-1) - g(-1) - 1 = \frac{1}{e} - 0 - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0. \text{ Άρα } k(-2) \cdot k(-1) < 0, \text{ οπότε}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα x_1 της εξίσωσης $k(x) = 0$ στο $(-2, -1)$.

β) Είναι $k(x_1) = 0$, $k(0) = f(0) - g(0) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$. Η συνάρτηση k είναι

συνεχής στο $[x_1, 0]$, παραγωγίσιμη στο $(x_1, 0)$ με τύπο $k'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει

$$\rho \in (x_1, 0) \subseteq (-2, 0) \text{ τέτοιο ώστε } k'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) - g'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) = g'(\rho).$$

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των παραγώγων των συναρτήσεων f και g τέμνονται σ' ένα τουλάχιστον σημείο.

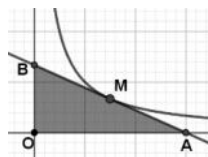
Θέμα Γ

Γ1. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $M\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$ έχει εξίσωση :

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow$$

$$y - \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi^2}(x - \xi) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\xi^2}x + \frac{2}{\xi}. \text{ Για } y = 0 \text{ έχουμε:}$$

$$0 = -\frac{1}{\xi^2} \cdot x + \frac{2}{\xi} \Leftrightarrow 0 = -x + 2\xi \Leftrightarrow x = 2\xi \text{ άρα το σημείο A}$$



έχει συντεταγμένες $(2\xi, 0)$. Για $x = 0$ έχουμε: $y = \frac{2}{\xi}$ άρα το σημείο B έχει

συντεταγμένες $\left(0, \frac{2}{\xi}\right)$. Το μέσο του AB έχει συντεταγμένες

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\xi + 0}{2} \\ y = \frac{0 + \frac{2}{\xi}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\xi}{2} \\ y = \frac{\frac{2}{\xi}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \xi \\ y = \frac{1}{\xi} \end{cases} \text{ οπότε ταυτίζεται με το M.}$$

Γ2. Το τρίγωνο OAB έχει εμβαδόν $(OAB) = \frac{1}{2} \left| 2\xi \right| \left| \frac{2}{\xi} \right| = \frac{4}{2} \left| \xi \frac{1}{\xi} \right| = 2 \cdot 1 = 2$.

$$\mathbf{\Gamma 3.} (AB) = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{4\xi^2 + \frac{4}{\xi^2}} = \sqrt{17} \Leftrightarrow \sqrt{4\xi^2 + \frac{4}{\xi^2}}^2 = (\sqrt{17})^2 \Leftrightarrow$$

$$4\xi^2 + \frac{4}{\xi^2} = 17 \Leftrightarrow 4\xi^4 + 4 = 17\xi^2 \Leftrightarrow 4\xi^4 - 17\xi^2 + 4 = 0. \text{ Θέτουμε } \xi^2 = \omega < 1$$

οπότε έχουμε την εξίσωση $4\omega^2 - 17\omega + 4 = 0$ με ρίζες $\omega = 4$, η οποία απορρίπτεται και $\omega = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$. Αν $d(\xi)$ η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων, τότε :

$$d(\xi) = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2}} \Rightarrow d'(\xi) = \frac{\xi - \frac{1}{\xi^3}}{\xi \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2}}} \Leftrightarrow d'(\xi) = \frac{\xi - \frac{1}{\xi^3}}{\sqrt{\xi^2 + \frac{1}{\xi^2}}}.$$

$$\text{Επομένως } d'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} - 8}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4}} = \frac{-\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 4}} = -\frac{\frac{15}{2}}{\sqrt{\frac{17}{4}}} = -\frac{\frac{15}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = -\frac{15\sqrt{17}}{17}.$$

Γ4. Έστω ζ η κοινή εφαπτομένη των συναρτήσεων f και g και $\Gamma(x_1, f(x_1)), \Delta(x_2, g(x_2))$ τα αντίστοιχα σημεία επαφής. Η εξίσωση εφαπτομένης της ζ για τα σημεία Γ και Δ είναι αντίστοιχα:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1) \cdot x + f(x_1) - x_1 f'(x_1) \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{x_1^2} \cdot x + \frac{1}{x_1} - \cancel{x_1} \cdot \left(-\frac{1}{x_1^2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x_1^2} \cdot x + \frac{2}{x_1}.$$

$$y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2) \cdot x + g(x_2) - x_2 g'(x_2) \Leftrightarrow$$

$$y = (2x_2 - 3) \cdot x + x_2^2 - 3x_2 + 3 - x_2(2x_2 - 3) \Leftrightarrow y = (2x_2 - 3) \cdot x - x_2^2 + 3.$$

Επειδή οι εξισώσεις αφορούν την ίδια ευθεία έχουμε: $\frac{2}{x_1} = -x_2^2 + 3 \Leftrightarrow$

$$\frac{-x_2^2 + 3}{2} = \frac{1}{x_1} \quad (1) \text{ και } -\frac{1}{x_1^2} = 2x_2 - 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x_1}\right)^2 = -2x_2 + 3 \Leftrightarrow^{(1)}$$

$$\left(\frac{-x_2^2 + 3}{2}\right)^2 = -2x_2 + 3 \Leftrightarrow \frac{x_2^4 - 6x_2^2 + 9}{4} = -2x_2 + 3 \Leftrightarrow$$

$$x_2^4 - 6x_2^2 + 9 = -8x_2 + 12 \Leftrightarrow x_2^4 - 6x_2^2 + 8x_2 - 3 = 0. \text{ Με σχήμα Horner ,}$$

βρίσκουμε ότι η εξίσωση έχει ρίζες το 1 (τριπλή) και το -3 , η οποία απορρίπτεται αφού $x_2 > 0$. Άρα η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -x + 2$.

Θέμα Δ

Δ1. α) Έστω ότι η f δεν αντιστρέφεται. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ($x_1 < x_2$) με $f'(x_1) = f'(x_2)$. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επίσης είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) για τον ίδιο λόγο. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$ άτοπο. Επομένως η f' δεν είναι 1-1.

Δ2. Από τη σχέση (1) έχουμε για $x=0$ ότι: $g^3(0) + g(0) = 2 \Leftrightarrow$

$$g^3(0) + g(0) - 2 = 0 \Leftrightarrow g^3(0) - 1 + g(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$[g(0) - 1] \cdot [g^2(0) + g(0) + 1] + g(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(g(0) - 1) \left[\underbrace{g^2(0) + g(0) + 2}_{\neq 0} \right] = 0 \Leftrightarrow g(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow g(0) = 1. \text{ Γνωρίζουμε ότι}$$

η g είναι παραγωγίσιμη, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε με παραγωγή

$$3g^2(x)g'(x) + g'(x) = 3 \Leftrightarrow g'(x) \left[\underbrace{3g^2(x) + 1}_{\neq 0} \right] = 3 \Leftrightarrow g'(x) = \frac{3}{3g^2(x) + 1}.$$

Για $x=0$ έχουμε $g'(0) = \frac{3}{3g^2(0)+1} = \frac{3}{4}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης

που ζητάμε είναι : $y - g(0) = g'(0)x \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 1$.

Δ3.α) Τα σημεία A και B ανήκουν στη (δ) οπότε $f(x_1) = \frac{3}{4}x_1 + 1$ και

$f(x_2) = \frac{3}{4}x_2 + 1$. Για την f ισχύει το ΘΜΤ στο $[x_1, x_2]$ άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{3}{4}x_2 + 1 - \frac{3}{4}x_1 - 1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{3}{4}(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3}{4}.$$

Έστω ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{3}{4}$ έχει και δεύτερη λύση $\xi_1 < \xi$, τότε $f'(\xi) = f'(\xi_1)$

. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi, \xi_1]$ αφού είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επίσης είναι παραγωγίσιμη στο (ξ, ξ_1) για τον ίδιο λόγο. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει $\xi_0 \in (\xi, \xi_1)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi_0) = 0$ άτοπο. Όμοια αν $\xi_1 > \xi$.

β) Έστω ότι η ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία σημεία

$A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), \Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$, τότε $f(x_3) = \frac{3}{4}x_3 + 1$.

Για την f ισχύει το ΘΜΤ στο $[x_2, x_3]$ άρα υπάρχει $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{\frac{3}{4}x_3 + 1 - \frac{3}{4}x_2 - 1}{x_3 - x_2} = \frac{\frac{3}{4}(x_3 - x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{3}{4}.$$

Αποδείξαμε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{3}{4}$ έχει δύο λύσεις άτοπο από το α).

Δ4.α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$ (1) $\Leftrightarrow g^3(x_1) = g^3(x_2)$ (2).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε :

$$g^3(x_1) + g(x_1) = g^3(x_2) + g(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η g είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

β) Θέτουμε $g(x) = y$ στην (1) και έχουμε $y^3 + y = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x = y^3 + y - 2 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{y^3 + y - 2}{3} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \frac{y^3 + y - 2}{3}. \text{ Άρα } g^{-1}(x) = \frac{x^3 + x - 2}{3}, x \in \mathbb{R}.$$

$$f'\left(g\left(e^{g(x)-1} + (g(x)-1)^{2019} + g^{-1}(x)\right)\right) = f'\left(g\left(g(0) + \frac{x^3 + x - 2}{3}\right)\right) \stackrel{f'^{-1}}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{g(x)-1} + (g(x)-1)^{2019} + \cancel{g^{-1}(x)} = 1 + \cancel{g^{-1}(x)} \Leftrightarrow e^{g(x)-1} + (g(x)-1)^{2019} - 1 = 0 (*).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x + x - 1$, η οποία αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1. Με τη βοήθεια της συνάρτησης h η σχέση (*) γίνεται : $h(g(x)-1) = 0 \Leftrightarrow h(g(x)-1) = h(\overset{h^{-1}}{0}) \Leftrightarrow g(x)-1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 1 \Leftrightarrow g(x) = g(\overset{g^{-1}}{0}) \Leftrightarrow x = 0$.

26

Συνέπειες Θ.Μ.Τ. – Σταθερή συνάρτηση

20. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = 6\eta\mu^5 x \sigma\upsilon\nu x - 6\sigma\upsilon\nu^5 x \eta\mu x + 6\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^3 x - 6\eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 6\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \left[(\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x) + \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \right]$$

$$f'(x) = 6\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \left[(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) (\cancel{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x})^1 + \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x \right] \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 6\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$f(0) = 1, \text{ άρα } c = 1, \text{ οπότε } f(x) = 1, x \in \mathbb{R}.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = 8\eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x - 4\sigma\upsilon\nu^3 x \eta\mu x + 6\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^3 x - 6\eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = 2\eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^3 x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } g(0) = 1, \text{ άρα } c = 1, \text{ οπότε } g(x) = 1, x \in \mathbb{R}.$$

21.α) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x) (\cancel{f(x) + f''(x)})^0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$h(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $h(1) = 0$, άρα $h(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

22. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$h'(x) = 3f^2(x)f'(x) + 3g^2(x)g'(x) = -3f^2(x)g^2(x) + 3g^2(x)f^2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

23. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3f(x)$ οπότε

$$f'(-x) = 3f(-x). \text{ Η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με παράγωγο}$$

$$g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = 3f(x)f(-x) - 3f(x)f(-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g(0) = 1, \text{ άρα } g(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

24. Είναι $f(x) = xf'(x) + 2$ (1). Με παραγωγή της σχέσης (1) κατά μέλη έχουμε :

$$f'(x) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow xf''(x) = 0 \Leftrightarrow \overset{x>0}{f''(x)} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

25.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = \frac{2x \cancel{f^2(x)}}{\cancel{f^2(x)}} - 2x \Leftrightarrow g'(x) = 2x - 2x = 0 \Leftrightarrow g(x) = c, c \in \mathbb{R}$$

β) Είναι $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1 = c$, άρα

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) \eta \mu 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} \eta \mu 2x \right) = 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$\left| \frac{x}{x^2+1} \eta \mu 2x \right| = \frac{x}{x^2+1} |\eta \mu 2x| \leq \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \eta \mu 2x \leq \frac{x}{x^2+1},$$

Ομως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x^2+1} \right)$, οπότε από το κριτήριο

παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} \eta \mu 2x \right) = 0$.

26.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - e^x = \frac{\cancel{x^2} e^x}{\cancel{x^2}} - e^x \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = e^x - e^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = c, c \in \mathbb{R}$$

β) Θέτουμε $\frac{f(x) - e - 1}{x^2 - 1} = h(x)$, $x \neq \pm 1 \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - 1)h(x) + e + 1$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και στο 1 οπότε

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((x^2 - 1)h(x) + e + 1) = e + 1.$$

Επομένως $g(1) = f(1) - e = e + 1 - e \Leftrightarrow g(1) = 1 = c$ οπότε

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - e^x = 1 \Leftrightarrow f(x) - xe^x = x \Leftrightarrow f(x) = xe^x + x.$$

γ) Έστω $t(x) = xe^x + x - 2$, $x \in [0, 1]$. Είναι $t(0) = -2 < 0$, $t(1) = e - 1 > 0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $t(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Έστω ότι η $t(x) = 0$ έχει 2 ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1)$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Η t είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο

$t'(x) = e^x + xe^x + 1$, $t(\rho_1) = t(\rho_2) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $t'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi + \xi e^\xi + 1 = 0$ που είναι άτοπο, αφού $t'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

27.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = (f''(x) - f'(x))e^{-x} - e^{-x}(f'(x) - f(x)) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = e^{-x}(f''(x) - 2f'(x) + f(x)) \Leftrightarrow g'(x) = e^{-x}(2f'(x) - 2f'(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = c, c \in \mathbb{R}$$

β) Η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων είναι παράλληλη στην (ε) οπότε $f(0) = 0$ και $f'(0) = 2$.

$$\text{Είναι } g(x) = c \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} - 2 = c \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = c + 2.$$

Για $x = 0$ είναι $c = 0$, άρα

$$f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 2 \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = (2x)' \Leftrightarrow f(x)e^{-x} = 2x + c_1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2xe^x + c_1e^x, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } c_1 = 0, \text{ άρα } f(x) = 2xe^x, x \in \mathbb{R}.$$

Αυξημένης δυσκολίας

28. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \text{ Έστω } t(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x), x \in \mathbb{R}.$$

Η t είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$t'(x) = f''(x)g(x) + \cancel{f'(x)g'(x)} - \cancel{f'(x)g'(x)} - f(x)g''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$t(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Επειδή $t(0) = 0$ είναι $t(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$, άρα $h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = k, k \in \mathbb{R}$.

29. Για $y = x_0$ και $x \neq x_0$, έχουμε: $|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|^2 \Leftrightarrow$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow -|x - x_0| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, \text{ άρα } f'(x_0) = 0 \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ επομένως}$$

$$f(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

30. Έστω $f(x) = (\kappa + \lambda - x)^3 + (\lambda + x - \kappa)^3 + (x + \kappa - \lambda)^3 - (x + \kappa + \lambda)^3 + 24\kappa\lambda x$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = -3(\kappa + \lambda - x)^2 + 3(\lambda + x - \kappa)^2 + 3(x + \kappa - \lambda)^2 - 3(x + \kappa + \lambda)^2 + 24\kappa\lambda \quad (1)$$

$$f'(x) = -3[(\kappa + \lambda - x)^2 - (\lambda + x - \kappa)^2 - (x + \kappa - \lambda)^2 + (x + \kappa + \lambda)^2 - 8\kappa\lambda] \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -3[4\lambda(\kappa - x) + 4\lambda(\kappa + x) - 8\kappa\lambda] \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -3(4\lambda\kappa - 4\lambda x + 4\lambda\kappa + 4\lambda x - 8\kappa\lambda) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -3(8\kappa\lambda - 8\kappa\lambda) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{ από την (1) για } x = 0$$

$$\text{είναι } f'(x) = -3(\kappa + \lambda)^2 + 3(\lambda - \kappa)^2 + 3(\kappa - \lambda)^2 - 3(\kappa + \lambda)^2 + 24\kappa\lambda \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -6[(\kappa + \lambda)^2 - (\kappa - \lambda)^2 - 4\kappa\lambda] \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -6(\kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2 - \kappa^2 + 2\kappa\lambda - \lambda^2 - 4\kappa\lambda) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -6(4\kappa\lambda - 4\kappa\lambda) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = (\kappa + \lambda)^3 + (\lambda - \kappa)^3 + (\kappa - \lambda)^3 - (\kappa + \lambda)^3 \Leftrightarrow$$

$$f(0) = (\lambda - \kappa)^3 - (\lambda - \kappa)^3 \Leftrightarrow f(0) = 0 = c_2 \text{ οπότε}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (\kappa + \lambda - x)^3 + (\lambda + x - \kappa)^3 + (x + \kappa - \lambda)^3 = (x + \kappa + \lambda)^3 - 24\kappa\lambda x$$

31. Έστω ότι $f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, $f'(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$f'(a) = 0 \text{ είναι } c = 0 \text{ οπότε } f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Τότε, } f(x) = c_1,$$

$c_1 \in \mathbb{R}$. Όμως $f(a) = 0$, άρα $c_1 = 0$ επομένως $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ που είναι άτοπο. Άρα υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) \neq 0$.

32.α) Έστω $g(x) = [f^2(x) + (f'(x))^2]e^{-x}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\text{παράγωγο } g'(x) = [2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x)]e^{-x} - [f^2(x) + (f'(x))^2]e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = [2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) - f^2(x) - (f'(x))^2]e^{-x} =$$

$$[2f'(x)f''(x) - (f(x) - f'(x))^2]e^{-x} = 0 \text{ άρα}$$

$$g(x) = c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^2(x) + [f'(x)]^2 = ce^x.$$

β) Για $x = 0$ είναι $c = 0$, άρα $f^2(x) + [f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

33. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x)(x^2+1) - x^3 = 0$

Έστω $g(x) = f(x)(x^2+1) - x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x)(x^2+1) + f(x) \cdot 2x - 3x^2$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x) = f''(x)(x^2+1) + 4xf'(x) + 2f(x) - 6x = 6x - 6x = 0 \Leftrightarrow$

$g'(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η ευθεία (ε) $y = x - \frac{1}{2}$ είναι εφαπτομένη της C_f οπότε

$f(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ και $f'(1) = 1$. Επομένως οπότε $g'(1) = 2f'(1) + 2f(1) - 3 \Leftrightarrow$

$g'(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ άρα $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(x)(x^2+1) - x^3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$

34.α) Έστω $g(x) = xf(x) - e^x + 1 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = f(x) + xf'(x) - e^x + 1$ και δεύτερη

παράγωγο $g''(x) = f'(x) + f'(x) + xf''(x) - e^x = 2f'(x) + xf''(x) - e^x = e^x - e^x = 0 \Leftrightarrow$

$g'(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(1) = f(1) + f'(1) - e + 1 = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$g(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Είναι $g(1) = f(1) - e + 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$xf(x) - e^x + 1 + x = 0 \Leftrightarrow xf(x) = e^x - 1 - x$ οπότε για $x \neq 0$ είναι

$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

άρα και στο $x = 0$ οπότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1} = 0$

επομένως $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

β) Είναι $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Για } x \neq 0 \text{ είναι } f'(x) = \frac{(e^x - 1) \cdot x - e^x + 1 + x}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}.$$

$$\text{Επίσης } f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x(x-1)+1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x(x-1)+2-x^2 \left(\frac{0}{0}\right)}{2x^3} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x(x-1)+2e^x-2x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x x - x)}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^x - 1)}{6x^2} \stackrel{\text{DLH } x \rightarrow 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x}{6} = \frac{1}{3}$$

35. Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \ln x$, $x > 0$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$$(0, +\infty) \text{ με παράγωγο } g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{xf'(x) - f(x) - x}{x^2} \text{ και}$$

δεύτερη παράγωγο

$$g''(x) = \frac{(f'(x) + xf''(x) - f'(x) - 1)x^2 - (xf'(x) - f(x) - x)2x}{x^3} \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = \frac{x^2 f''(x) - x - 2xf'(x) + 2f(x) + 2x}{x^3} \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = \frac{x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) + x}{x^3} = \frac{-x + x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow g'(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Όμως } g'(1) = \frac{f'(1) - f(1) - 1}{1} = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{. Είναι } g(1) = f(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ οπότε } g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} - \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \ln x, x > 0.$$

36.α) Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2f(x)f'(x) + f'(x)f''(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) = 0$ άρα η g είναι σταθερή συνάρτηση.

$$\text{Είναι } g(0) = [f(0)]^2 + \frac{[f'(0)]^2}{2} = 1 + \frac{4}{2} = 3 \text{ άρα } g(x) = 3, x \in \mathbb{R}.$$

β) Έστω ότι υπάρχει κι άλλη συνάρτηση h η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες της f . Αρκεί να δείξουμε ότι $f = h$. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - h(x)$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$\varphi'(x) = f'(x) - h'(x)$ και δεύτερη παράγωγο

$$\varphi''(x) = f''(x) - h''(x) = -2f(x) + 2h(x) = -2[f(x) - h(x)] = -2\varphi(x).$$

Άρα από το α) ερώτημα αφού η φ ικανοποιεί την ιδιότητα $\varphi''(x) = -2\varphi(x)$

τότε η συνάρτηση $k(x) = [\varphi(x)]^2 + \frac{[\varphi'(x)]^2}{2}$ είναι σταθερή.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } k(0) &= [\varphi(0)]^2 + \frac{[\varphi'(0)]^2}{2} = [f(0) - h(0)]^2 + \frac{[f'(0) - h'(0)]^2}{2} = \\ &= [1 - 1]^2 + \frac{(2 - 2)^2}{2} = 0 \text{ άρα } k(x) = 0 \Leftrightarrow [\varphi(x)]^2 + \frac{[\varphi'(x)]^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως είναι $f = h$ άρα η συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες είναι μοναδική.

γ) Αν $f(x) = \eta\mu(2x) + \sigma\upsilon\nu(2x)$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(0) = 1$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu(2x) - 2\eta\mu(2x)$

και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = -2\eta\mu(\sqrt{2}x) - 2\sigma\upsilon\nu(\sqrt{2}x) = -2f(x)$.

Είναι $f'(0) = 2$ άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις, η f είναι μοναδική από β)

ερώτημα άρα $f(x) = \eta\mu(2x) + \sigma\upsilon\nu(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Εύρεση συνάρτησης από σχέση της μορφής $f'(x) = h(x)$

37.α) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + 2x \Leftrightarrow f'(x) = (\eta\mu x + x^2)' \Leftrightarrow$

$$f(x) = \eta\mu x + x^2 + c, c \in \mathbb{R}. \text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ άρα } f(x) = \eta\mu x + x^2 + 1$$

β) $f'(x) = 16x^3 + 6x \Leftrightarrow f'(x) = (4x^4 + 3x^2)' \Leftrightarrow f(x) = 4x^4 + 3x^2 + c, c \in \mathbb{R}.$

$$\text{Είναι } f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2 \text{ άρα } f(x) = 4x^4 + 3x^2 + 2.$$

γ) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu 3x \Leftrightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{2}\eta\mu 2x - \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x \right)' \Leftrightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu 2x - \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x + c, c \in \mathbb{R}. \text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{4}{3} \text{ οπότε}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu 2x - \frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{4}{3}.$$

$$\delta) f'(x) = 2e^{2x} + x^{\frac{1}{2}} = \left(e^{2x} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)' \Leftrightarrow f(x) = e^{2x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$f(1) = e^2 \Leftrightarrow c = -\frac{2}{3} \text{ άρα } f(x) = e^{2x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{2}{3}.$$

$$\epsilon) f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} = 2 \ln x (\ln x)' = (\ln^2 x)' \Leftrightarrow f(x) = \ln^2 x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f(x) = \ln^2 x.$$

$$\sigma\tau) f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} = (\ln(x^2+1))' \Leftrightarrow f(x) = \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R},$$

$$\text{Είναι } f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f(x) = \ln(x^2+1).$$

$$\zeta) f'(x) = 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x = 3\eta\mu^2 x (\eta\mu x)' = (\eta\mu^3 x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu^3 x + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow c = 0, f(x) = \eta\mu^3 x$$

$$\eta) f'(x) = 12\eta\mu^2 4x \sigma\upsilon\nu 4x = 3\eta\mu^2 4x (\eta\mu 4x)' = (\eta\mu^3 4x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu^3 4x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα}$$

$$\theta) f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = (\sqrt{x^2+1})' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(1) = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \sqrt{2} \text{ οπότε}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + 1 - \sqrt{2}.$$

$$\iota) f'(x) = (2x-3)(x^2-3x+4)^2 = \left(\frac{(x^2-3x+4)^3}{3} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2-3x+4)^3 + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(0) = 16 \Leftrightarrow c = -\frac{16}{3} \text{ οπότε,}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2-3x+4)^3 - \frac{16}{3}.$$

$$38. \alpha) f(x) = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = (e^x \ln x)' \Leftrightarrow f(x) = e^x \ln x + c, c \in \mathbb{R},$$

$$\text{Είναι } f(1) = -1 \Leftrightarrow c = -1 \text{ οπότε } f(x) = e^x \ln x - 1.$$

$$\beta) f'(x) = \frac{x(e^x)' - e^x(x)'}{x^2} = \left(\frac{e^x}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x} + c. \text{Είναι } f(1) = e \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{οπότε } f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

$$\gamma) f'(x) = -\frac{(x)' \ln x - x(\ln x)'}{x^2} = \left(-\frac{\ln x}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x) = -\frac{\ln x}{x} + c, c \in \mathbb{R}. \text{Είναι}$$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ οπότε } f(x) = -\frac{\ln x}{x} + 1$$

$$\delta) f'(x) = (e^x)' x + e^x(x)' = (xe^x)' \Leftrightarrow f(x) = xe^x + c, c \in \mathbb{R}, f(1) = e \Leftrightarrow c = 0, \text{ οπότε } f(x) = xe^x.$$

$$\epsilon) f'(x) = (x)' \eta \mu x + x(\eta \mu x)' = (x \eta \mu x)' \Leftrightarrow f(x) = x \eta \mu x + c, c \in \mathbb{R}. \text{Είναι}$$

$$f(\pi) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f(x) = x \eta \mu x.$$

$$\sigma\tau) f'(x) = e^{-x}(\eta \mu x)' + \eta \mu x(e^{-x})' = (e^{-x} \eta \mu x)' \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} \eta \mu x + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f(\pi) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f(x) = e^{-x} \eta \mu x.$$

$$\mathbf{39. \alpha)} f''(x) = 6x \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{Είναι } f'(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 = 2, \text{ άρα } f'(x) = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + 2x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}. \text{Είναι } f(0) = 2 \Leftrightarrow c_2 = 2, \text{ άρα } f(x) = x^3 + 2x + 2.$$

$$\beta) f''(x) = 12x^2 - 9 \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3 - 9x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{Είναι } f'(0) = 4 \Leftrightarrow c_1 = 4$$

$$\text{οπότε } f'(x) = 4x^3 - 9x + 4 = \left(x^4 - 9\frac{x^2}{2} + 4x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 4x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}. \text{Είναι } 4f(0) = 4 \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow$$

$$c_2 = 1, \text{ άρα } f(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 4x + 1.$$

$$\gamma) f''(x) = 4e^{2x} = (2e^{2x})' \Leftrightarrow f'(x) = 2e^{2x} + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{Είναι } f'(0) = 3 \Leftrightarrow c_1 = 1$$

$$\text{οπότε } f'(x) = 2e^{2x} + 1 = (e^{2x} + x)' \Leftrightarrow f(x) = e^{2x} + x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}. \text{Όμως}$$

$$f(0) = 3 \Leftrightarrow c_2 = 2 \text{ άρα } f(x) = e^{2x} + x + 2.$$

$$\delta) f''(x) = -9\eta \mu 3x = (3\sigma \upsilon \nu 3x)' \Leftrightarrow f'(x) = 3\sigma \upsilon \nu 3x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{Είναι}$$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = -2 \text{ άρα } f'(x) = 3\sin 3x - 2 = (\eta\mu 3x - 2x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \eta\mu 3x - 2x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(0) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1 \text{ οπότε}$$

$$f(x) = \eta\mu 3x - 2x + 1$$

Αυξημένης δυσκολίας

$$40. \alpha) f'(4x-3) = 2x+5 \Leftrightarrow 4f'(4x-3) = 8x+20 \Leftrightarrow$$

$$(f(4x-3))' = (4x^2 + 20x)' \Leftrightarrow f(4x-3) = 4x^2 + 20x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Θέτουμε}$$

$$4x-3 = u \Leftrightarrow x = \frac{u+3}{4} \text{ οπότε έχουμε}$$

$$f(u) = 4\left(\frac{u+3}{4}\right)^2 + 20\frac{u+3}{4} + c = \frac{u^2 + 6u + 9}{4} + 5u + 15 + c, \text{ άρα}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 9) + 5x + 15 + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(-3) = 1 \Leftrightarrow c = c = 1, \text{ άρα}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 9) + 5x + 16.$$

$$\beta) f'(x^2) = 3x-9 \Leftrightarrow 2xf'(x^2) = 6x^2-18x \Leftrightarrow (f(x^2))' = (2x^3-9x^2)' \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) = 2x^3 - 9x^2 + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Θέτουμε } x^2 = u \Leftrightarrow x = \sqrt{u}, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$f(u) = 2u\sqrt{u} - 9u + c \text{ άρα } f(x) = 2x\sqrt{x} - 9x + c, c \in \mathbb{R}, x > 0. \text{ Είναι}$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = 2x\sqrt{x} - 9x.$$

$$\gamma) f'(x^3) = 4 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow 3x^2 f'(x^3) = 12x^2 + 3\frac{1}{x} - 3\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$(f(x^3))' = \left(4x^3 + 3\ln x + \frac{3}{x}\right)' \Leftrightarrow f(x^3) = 4x^3 + 3\ln x + \frac{3}{x} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Θέτουμε}$$

$$x^3 = u \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{u}, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$f(u) = 4u + 3\ln u^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{u}} + c = 4u + \ln u + \frac{3}{\sqrt[3]{u}} + c. \text{ Είναι } f(1) = 7 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα}$$

$$f(x) = 4x + \ln x + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$$

$$41. xf'(\ln x) = xe^x - e^x \Leftrightarrow \frac{1}{x} f'(\ln x) = \frac{x(e^x)' - e^x(x)'}{x^2} \Leftrightarrow (f(\ln x))' = \left(\frac{e^x}{x}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f(\ln x) = \frac{e^x}{x} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Θέτουμε } \ln x = u \Leftrightarrow x = e^u, \text{ οπότε έχουμε}$$

$$f(u) = \frac{e^{e^u}}{e^u} + c = e^{e^u - u} + c, \text{ άρα } f(x) = e^{e^x - x} + c, x > 0. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι}$$

$$f(0) = e + c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = e^{e^x - x}, x > 0.$$

$$42. \text{ Για } x > -2 \text{ είναι : } f'(x^2 + 4x) = 6x^2 - 5x + 3 \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$(2x + 4)f'(x^2 + 4x) = 12x^3 + 14x^2 - 14x + 12 \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x^2 + 4x)\right)' = \left(3x^4 + \frac{14}{3}x^3 - 7x^2 + 12x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 + 4x) = 3x^4 + \frac{14}{3}x^3 - 7x^2 + 12x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι}$$

$$f(0) = c \Leftrightarrow c = 0 \text{ αφού η } C_f \text{ διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε}$$

$$f(x^2 + 4x) = 3x^4 + \frac{14}{3}x^3 - 7x^2 + 12x \quad (2). \text{ Από τις σχέσεις (1) και (2) για } x = 1$$

$$\text{είναι } f'(5) = 4 \text{ και } f(5) = 3 + \frac{14}{3} - 7 + 12 = \frac{38}{3}$$

$$\text{Η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση } \varepsilon: y - f(5) = f'(5)(x - 5) \Leftrightarrow y = 4x - \frac{22}{3}.$$

$$43. \alpha) f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 4) + 6}{x + 1} = x - 4 + \frac{6}{x + 1} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 6 \ln(x + 1)\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 6 \ln(x + 1) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 6 \ln(x + 1) + 1.$$

$$\beta) f'(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 6) + 12}{x + 1} = x - 6 + \frac{12}{x + 1} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 6x + 12 \ln(x + 1)\right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 12 \ln(x + 1) + c, c \in \mathbb{R},$$

$$\text{Είναι } f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 12 \ln(x + 1)$$

44. Επειδή το πολυώνυμο $f(x)+2$ διαιρείται με το $(x-1)^2$, ισχύει:

$f(x)+2=(x-1)^2 g(x)$ (1), όπου $g(x)$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Το

$f(x)-2$ πολυώνυμο διαιρείται με το $(x+1)^2$ οπότε ισχύει:

$f(x)-2=(x+1)^2 h(x)$ (2), όπου $h(x)$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει:

$$f'(x)=(x-1)[2g(x)+(x-1)g'(x)] \text{ και}$$

$$f'(x)=(x+1)[2h(x)+(x+1)h'(x)]. \text{ Δηλαδή η } f' \text{ έχει παράγοντες τα } (x-1)$$

και $(x+1)$. Επειδή η f είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού, η f' είναι

πολυώνυμο τρίτου βαθμού, οπότε: $f'(x)=(x-1)(x+1)(\alpha x+\beta)$, $\alpha \neq 0$.

$$\text{Δηλαδή } f'(x)=(x-1)(x+1)(\alpha x+\beta)=\alpha x^3+\beta x^2-\alpha x-\beta \Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\left(\frac{\alpha}{4}x^4+\frac{\beta}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x+c\right)' \Leftrightarrow f(x)=\frac{\alpha}{4}x^4+\frac{\beta}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x+c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επειδή } f(0)=1 \text{ είναι } c=1 \text{ και } f(x)=\frac{\alpha}{4}x^4+\frac{\beta}{3}x^3-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x+1, x \in \mathbb{R}.$$

Αν στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε $x=1$ και στη σχέση (2) $x=-1$, προκύπτει

$$f(1)=-2 \text{ και } f(-1)=2. \text{ Όμως } f(1)=\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{3}-\frac{\alpha}{2}-\beta+1=-2 \Leftrightarrow$$

$$3\alpha+4\beta-6\alpha-12\beta+12=-24 \Leftrightarrow -3\alpha-8\beta=-36 \text{ (3) και}$$

$$f(-1)=\frac{\alpha}{4}-\frac{\beta}{3}-\frac{\alpha}{2}+\beta+1=2 \Leftrightarrow 3\alpha-4\beta-6\alpha+12\beta+12=24 \Leftrightarrow -3\alpha+8\beta=12 \text{ (4).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3),(4) προκύπτει: $-6\alpha=-24 \Leftrightarrow \alpha=4$

οπότε από την (4) είναι $\beta=3$. Άρα $f(x)=x^4+x^3-2x^2-3x+1, x \in \mathbb{R}$.

Σχέσεις της μορφής $(f'(x), f(x), x)=h(x)$

45.α) Είναι $f(x)+xf'(x)=3x^2+1 \Leftrightarrow (xf(x))'=(x^3+x)'$

$$xf(x)=x^3+x+c \Leftrightarrow f(x)=x^2+1+\frac{c}{x}. f(1)=2 \Leftrightarrow c=0 \text{ οπότε } f(x)=x^2+1$$

β) Είναι $xf'(x)+f(x)=e^x \Leftrightarrow (xf(x))'=(e^x)'$

$$xf(x)=e^x+c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^x+c}{x}.$$

$$f(1)=e+1 \Leftrightarrow c=1 \text{ οπότε } f(x)=\frac{e^x+1}{x}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } xf'(x) + x^2 = f(x) + x^2 e^x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (e^x - x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = e^x - x + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = x(e^x - x + c).$$

$$\text{Όμως } f(1) = e - 1 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f(x) = x(e^x - x).$$

$$\delta) \text{ Είναι } f'(x) = 3x - \frac{1+f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = 3x^2 - 1 - f(x) \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) + f(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow (xf(x))' = (x^3 - x)' \Leftrightarrow$$

$$xf(x) = x^3 - x + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 1 + \frac{c}{x}.$$

$$\text{Όμως } f(1) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ οπότε } f(x) = x^2 - 1 + \frac{1}{x}.$$

$$\epsilon) \text{ Είναι } xf'(x) - f(x) = x^2 \eta \mu x + x^3 \sigma \upsilon \nu x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \eta \mu x + x \sigma \upsilon \nu x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (x \eta \mu x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x \eta \mu x + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = x^2 \eta \mu x + cx.$$

$$\text{Όμως } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f(x) = x^2 \eta \mu x.$$

$$46. \alpha) \text{ Είναι } f'(x) - 2f(x) = e^{3x} \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$(e^{-2x} f(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow e^{-2x} f(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = e^{3x} + ce^{2x}.$$

$$\text{Όμως } f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 1 \text{ οπότε } f(x) = e^{3x} + e^{2x}.$$

$$\beta) \text{ Είναι } f(x) + 2xf'(x) = 2x \Leftrightarrow e^{x^2} f(x) + xe^{x^2} f'(x) = 2xe^{x^2} \Leftrightarrow$$

$$(e^{x^2} f(x))' = (e^{x^2})' \Leftrightarrow e^{x^2} f(x) = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = 1 + ce^{-x^2}.$$

$$f(0) = 1 + e \Leftrightarrow c = e \text{ και } f(x) = 1 + e^{1-x^2}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } 2f'(x) + 4f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{2x} f'(x) + 2e^{2x} f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(e^{2x} f(x))' = \left(\frac{1}{4} e^{2x} \right)' \Leftrightarrow e^{2x} f(x) = \frac{1}{4} e^{2x} + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{4} + ce^{-2x}.$$

$$\text{Όμως } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4} \text{ οπότε } f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} e^{-2x}.$$

δ) Είναι $f'(x) - f(x) = 2 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 2e^{-x} \Leftrightarrow$

$(e^{-x}f(x))' = (-2e^{-x})' \Leftrightarrow e^{-x}f(x) = -2e^{-x} + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = -2 + ce^x.$

Όμως $f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 4$ οπότε $f(x) = -2 + 4e^x.$

Αυξημένης δυσκολίας

47.α) Είναι $f(x) + xf'(x) = 6x^5 + 4x^3 + 2x \Leftrightarrow (xf(x))' = (x^6 + x^4 + x^2)' \Leftrightarrow$
 $xf(x) = x^6 + x^4 + x^2 + c, c \in \mathbb{R}.$

Για $x=0$ είναι $0=c$, άρα για $x \neq 0$ είναι $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Για $x=0$ η αρχική σχέση γίνεται $f(0) = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$ είναι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^5 + x^3 + x) = 0$, άρα $f(x) = x^5 + x^3 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $(x-1)f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 - f(x)$

$\Leftrightarrow (x-1)f'(x) + f(x) = 3x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow$

$((x-1)f(x))' = (x^3 - 3x^2 + x)' \Leftrightarrow (x-1)f(x) = x^3 - 3x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}.$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 1, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + x + c) \Leftrightarrow 0 = c - 1 \Leftrightarrow c = 1$. Άρα για

$x \neq 1$ είναι $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 1)}{x-1} = x^2 - 2x - 1.$

Επίσης $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x - 1) = -2$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$f(x) = x^2 - 2x - 1.$

γ) Είναι $(x+1)f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 - f(x) \Leftrightarrow$

$((x+1)f(x))' = (x^4 + x^3 + x^2 + x)' \Leftrightarrow (x+1)f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}.$

Για $x=-1$ είναι $0=c$, άρα για $x \neq -1$ έχουμε

$f(x) = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x+1} = \frac{x(x^2+1)(x+1)}{x+1} = x^3 + x$. Επειδή η f είναι συνεχής

στο $x=-1$ είναι $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + x) = -2$, άρα $f(x) = x^3 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Είναι $2f(x) + xf'(x) = 6x^4 + 4x^2 \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) = 6x^5 + 4x^3 \Leftrightarrow$

$(x^2f(x))' = (x^6 + x^4)' \Leftrightarrow x^2f(x) = x^6 + x^4 + c, c \in \mathbb{R}.$ Για $x=0$ είναι $0=c$,

άρα για $x \neq 0$ είναι $f(x) = x^4 + x^2$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x=0$ είναι

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + x^2) = 0, \text{ άρα } f(x) = x^4 + x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

48. Είναί $f'(x) = \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x) = 1$ (1) και

$$g'(x) = -\frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)g'(x) = -1$$
 (2). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2)

$$\text{έχουμε } f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x)g(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)g(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } c = 1, \text{ άρα } f(x)g(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

2^{ος} τρόπος: Έστω $h(x) = f(x)g(x) - 1, x \in \mathbb{R}$. Είναί

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = f'(x) = \frac{1}{g(x)}g(x) + f(x)\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow h(x) = c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x)g(x) - 1 = c \Leftrightarrow f(x)g(x) = c + 1$$
 (1). Για $x = 0$ η (1) γίνεται

$$f(0)g(0) = c + 1 \Leftrightarrow 1 = c + 1 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x)g(x) = 1, x \in \mathbb{R}.$$

49. Παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση $f(x)g(x) = e^{-2x}$, προκύπτει:

$$(f(x)g(x))' = (e^{-2x})' \Leftrightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = -2e^{-2x}$$
 (1). Από τις

$$\text{σχέσεις } f(x)g(x) = e^{-2x} \neq 0, f'(x)g'(x) = e^{-2x} \neq 0 \text{ έχουμε } f(x) \neq 0, f'(x) \neq 0$$

$$\text{οπότε } g(x) = \frac{e^{-2x}}{f(x)} \text{ και } g'(x) = \frac{e^{-2x}}{f'(x)}.$$

$$\text{Επομένως η σχέση (1) γίνεται: } f'(x)\frac{e^{-2x}}{f(x)} + f(x)\frac{e^{-2x}}{f'(x)} = -2e^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f'(x)} = -2 \Leftrightarrow (f'(x))^2 + (f(x))^2 = -2f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 + (f(x))^2 + 2f(x)f'(x) = 0 \Leftrightarrow (f'(x) + f(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-x}, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = ce^0 = c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{οπότε } f(x) = e^{-x}. \text{ Τότε: } f(x)g(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow e^{-x}g(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow g(x) = e^{-x},$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

50. $(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x^2 + 1)f''(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left((x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) \right)' = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = c, c \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Η C_f είναι παράλληλη στην (ε) οπότε $f'(0) = 2$ άρα από τη σχέση (1) για $x = 0$ είναι $c = 2$, επομένως

$$(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = 2 \Leftrightarrow \left((x^2 + 1)f(x) \right)' = (2x)' \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1)f(x) = 2x + c_1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x + c_1}{x^2 + 1}, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως η } C_f \text{ διέρχεται από την}$$

αρχή των αξόνων οπότε $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$, άρα $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

$$51. \text{Είναι } f(x) + xf'(x) + f''(x) = 0 \Leftrightarrow [xf(x) + f'(x)]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$xf(x) + f'(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } f'(0) = c \Leftrightarrow c = 0,$$

$$\text{οπότε, } xf(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + xe^{\frac{x^2}{2}}f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x^2}{2}}f(x) \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{x^2}{2}}f(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = c_1 e^{-\frac{x^2}{2}}. \text{ Επειδή } f(0) = 2 \text{ είναι } c_1 = 2 \text{ οπότε}$$

$$f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$52. \text{Είναι } f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x f''(x) + e^x f'(x) + e^x f'(x) + e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x f'(x))' + (e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow (e^x f'(x) + e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x) + e^x f(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } c = 2 \text{ οπότε}$$

$$e^x f'(x) + e^x f(x) = 2 \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (2x)' \Leftrightarrow e^x f(x) = 2x + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = (2x + c_1)e^{-x}. \text{ Επειδή } f(0) = 1 \text{ είναι } c_1 = 1, \text{ άρα } f(x) = (2x + 1)e^{-x}.$$

$$53. \alpha) \text{Είναι } 2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2f'(x)e^{f(x)} = e^x \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})' = \left(\frac{1}{2} e^x \right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{1}{2} e^x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(0) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} \text{ οπότε}$$

$$e^{f(x)} = \frac{1}{2}(e^x + 1) \Leftrightarrow f(x) = \ln \left[\frac{1}{2}(e^x + 1) \right].$$

$$\beta) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{2x \ln(x^2+1)f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2+1} \ln(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$(\ln f(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) \right)' \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1) + c}. \text{ Όμως } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f(x) = e^{\frac{1}{2} \ln^2(x^2+1)}$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{-xf'(x) \ln x}{2} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{2}{x \ln x} f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{2 \ln(\ln x)} f'(x) + e^{2 \ln(\ln x)} \frac{2}{x \ln x} f(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{2 \ln(\ln x)} f(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{\ln(\ln^2 x)} f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-\ln(\ln^2 x)}. \text{ Όμως } f(e) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ και}$$

$$f(x) = e^{-\ln(\ln^2 x)} = \frac{1}{e^{\ln(\ln^2 x)}} = \frac{1}{\ln^2 x}.$$

$$\delta) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{4x^3 + 2x}{3f^2(x)} \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) = 4x^3 + 2x \Leftrightarrow$$

$$(f^3(x))' = (x^4 + x^2)' \Leftrightarrow f^3(x) = x^4 + x^2 + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(1) = 2 \Leftrightarrow c = 6$$

$$\text{οπότε } f^3(x) = x^4 + x^2 + 6 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2 + 6}.$$

$$\epsilon) \text{ Είναι } f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = (x^2)' \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{f(x)} = x^2 + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2 + c}. \text{ Όμως } f(0) = -1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ και}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$\sigma\tau) \text{ Είναι } f'(x) = 4x\sqrt{f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow (\sqrt{f(x)})' = (x^2)' \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{f(x)} = x^2 + c. \text{ Όμως } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1 \text{ οπότε } f(x) = (x^2 + 1)^2.$$

$$54.α) \text{ Είναι } f'(x) = -4xf^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 4x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = (2x^2)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)} = 2x^2 + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2x^2 + c} \cdot f(1) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2xf(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{2x^2 + 1} \eta\mu \frac{1}{2x^2 + 1} \right]$. Για $x > 0$ είναι

$$\left| \frac{2x}{2x^2 + 1} \eta\mu \frac{1}{2x^2 + 1} \right| = \frac{2x}{2x^2 + 1} \left| \eta\mu \frac{1}{2x^2 + 1} \right| \leq \frac{2x}{2x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2x}{2x^2 + 1} \leq \frac{2x}{2x^2 + 1} \eta\mu \frac{1}{2x^2 + 1} \leq \frac{2x}{2x^2 + 1}. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2x}{2x^2 + 1} \right) \text{ οπότε από το κριτήριο}$$

παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2xf(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right] = 0$.

55. Είναι $(f''(x) - f'(x)f(x))f(x) - (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$f''(x)f(x) - f'(x)f^2(x) - (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x)f(x) - (f'(x))^2 = f'(x)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = f'(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = f(x) + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 1, \text{ είναι}$$

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = f(1) + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } \frac{f'(x)}{f(x)} = f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = (x)' \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 1, \text{ είναι } -\frac{1}{f(1)} = 1 + c_1 \Leftrightarrow$$

$$c_1 = -2, \text{ άρα } -\frac{1}{f(x)} = x - 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2 - x}, x < 2.$$

Σχέσεις της μορφής $f'(x) = f(x)$

56.α) Από τη σχέση $xf'(x) - (x+1)f(x) = 0$ (1) για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$

β) Από τη σχέση (1) έχουμε

$$xf'(x) - xf(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = xf(x) \text{ (2).}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε για $x \neq 0$: $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x}.$$

γ) Είναι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = ce^x, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = cxe^x.$

Όμως $f(1) = e \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = xe^x$.

57.α) Είναι $xf'(x) + (1-x)f(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = xf(x) \Leftrightarrow$

$$(xf(x))' = xf(x) \Leftrightarrow xf(x) = ce^x, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{ce^x}{x}, x > 0.$$

Όμως $f(1) = e \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

β) Είναι $xf'(x) = (x+1)f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = xf(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = ce^x, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = cxe^x, x > 0. \text{ Όμως } f(1) = e \Leftrightarrow c = 1 \text{ άρα } f(x) = xe^x.$$

γ) Είναι $f'(x)\sin x - f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow$

$$f'(x)\sin x - f(x)\eta\mu x = f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow (f(x)\sin x)' = f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$f(x)\sigma\upsilon\nu x = ce^x, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = \frac{ce^x}{\sigma\upsilon\nu x}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Όμως $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = \frac{e^x}{\sigma\upsilon\nu x}$.

δ) Είναι $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{f(x)\cancel{\eta\mu x}}{\eta\mu^2 x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = ce^x, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = ce^x\eta\mu x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Όμως $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow c = 2$, άρα $f(x) = 2e^x\eta\mu x$.

$$58. \text{Είναι } f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$(f'(x) \cdot f(x))' = f'(x) \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) = c \cdot e^x, c \in \mathbb{R} \dots \text{Όμως}$$

$$f(0) = 2, f'(0) = 1 \text{ οπότε } c = 2 \text{ άρα}$$

$$f'(x) \cdot f(x) = 2e^x \Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f(x) = 4e^x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (4e^x)' \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = 4e^x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } c = 0 \text{ οπότε}$$

$$f^2(x) = 4e^x \Leftrightarrow |f(x)| = 2\sqrt{e^x} \quad (1). \text{ Είναι } 2\sqrt{e^x} \neq 0 \Leftrightarrow |f(x)| \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως $f(0) = 2 > 0$

άρα $f(x) > 0$ οπότε από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) = 2\sqrt{e^x}, x \in \mathbb{R}.$

$$59. \text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f^{(v)}(x) = f^{(v-2)}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(v)}(x) + f^{(v-1)}(x) = f^{(v-1)}(x) + f^{(v-2)}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f^{(v-1)}(x) + f^{(v-2)}(x))' = f^{(v-1)}(x) + f^{(v-2)}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(v-1)}(x) + f^{(v-2)}(x) = C_1 e^x, C_1 \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } (1) \Leftrightarrow f^{(v-1)}(0) + f^{(v-2)}(0) = C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$\text{Άρα } (1) \Leftrightarrow f^{(v-1)}(x) + f^{(v-2)}(x) = 0 \Leftrightarrow (f^{(v-2)}(x) + f^{(v-3)}(x))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{(v-2)}(x) + f^{(v-3)}(x) = C_2, C_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } (2) \Leftrightarrow f^{(v-2)}(0) + f^{(v-3)}(0) = C_2 \Leftrightarrow C_2 = 0.$$

$$\text{Άρα } (2) \Leftrightarrow f^{(v-2)}(x) + f^{(v-3)}(x) = 0 \Leftrightarrow (f^{(v-3)}(x) + f^{(v-4)}(x))' = 0 \text{ και}$$

ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στην σχέση

$$f'(x) + f''(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) + f'(x))' = 0 \Leftrightarrow f(x) + f'(x) = C_v, C_v \in \mathbb{R} \quad (v)$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } (v) \Leftrightarrow f(0) + f'(0) = C_v \Leftrightarrow C_v = 0.$$

$$\text{Άρα } (v) \Leftrightarrow f(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = C \text{ και για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = C \Leftrightarrow C = 0$$

$$\text{Άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Σχέσεις της μορφής $f'(x) f(x) = h(x)$

60. Είναι $(f(x) - x \ln x)(f'(x) - \ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(f(x) - x \ln x)(f(x) - x \ln x)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{(f(x) - x \ln x)^2}{2} \right]' = 0 \Leftrightarrow \frac{(f(x) - x \ln x)^2}{2} = c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (f(x) - x \ln x)^2 = 2c.$$

Για $x = 1$ είναι $(f(1) - \ln 1)^2 = 0$, άρα $c = 0$ οπότε

$$(f(x) - x \ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - x \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \ln x \text{ για κάθε } x > 0.$$

61. Είναι $(f(x) - e^x)(f'(x) - e^x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - e^x)(f(x) - e^x)' = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f(x) - e^x}{2} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x) - e^x}{2} = c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - e^x = 2c$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) - e^0 = 0$ άρα $c = 0$ οπότε $f(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^x$,
 $x \in \mathbb{R}.$

62.α) Είναι $f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$

$$f^2(x) = e^{2x} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 0 \text{ οπότε } f^2(x) = e^{2x} \neq 0, \text{ άρα}$$

$f(x) \neq 0$. Η f είναι συνεχής. Όμως $f(0) = 1 > 0$ οπότε $f(x) > 0$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R}, \text{ επομένως } f(x) = \sqrt{e^{2x}} = e^x.$$

β) Είναι $f'(x)f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 4x + 2 \Leftrightarrow$

$$(f^2(x))' = (2x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f^2(x) = 2x^2 + 2x + c, c \in \mathbb{R}.$$

Όμως $f(0) = -1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f^2(x) = 2x^2 + 2x + 1.$

Το τριώνυμο $2x^2 + 2x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -4 < 0$ οπότε

$$2x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow f^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ οπότε}$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $f(0) = -1 < 0$ οπότε

$$f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f(x) = -\sqrt{2x^2 + 2x + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

63.α) Είναι $f'(x)f(x) + f(x) + x = -xf'(x) \Leftrightarrow$

$$2f'(x)f(x) + 2f(x) + 2xf'(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow (f^2(x) + 2xf(x) + x^2)' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = c, c \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(1) = 0 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα}$$

$$f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = 1 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = 1 \neq 0, \text{ οπότε } f(x) + x \neq 0.$$

Η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(1) = f(1) + 1 = 1 > 0$ οπότε $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) + x > 0$ άρα $f(x) + x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x)f(x) - e^{-x}(f(x) - f'(x)) - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow$

$$2f'(x)f(x) + 2(f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}) - 2e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) + 2f(x)e^{-x} + e^{-2x})' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)e^{-x} + e^{-2x} = c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + e^{-x})^2 = c. \text{ Όμως } f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 9, \text{ άρα } (f(x) + e^{-x})^2 = 9 \neq 0, \text{ οπότε}$$

$f(x) + e^{-x} \neq 0$. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) + e^{-x}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(0) = f(0) + e^0 = 3 > 0$ οπότε $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) + e^{-x} > 0$, άρα $f(x) + e^{-x} = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

γ) Είναι $f'(x)f(x) + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$2f'(x)f(x) - 2(f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon x) + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x)' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x)\eta\mu x + \eta\mu^2 x = c \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - \eta\mu x)^2 = c. \text{ Όμως } f(0) = 4 \Leftrightarrow c = 16, \text{ άρα } (f(x) - \eta\mu x)^2 = 16 \neq 0,$$

οπότε $f(x) - \eta\mu x \neq 0$. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $g(0) = f(0) - \eta\mu 0 = 4 > 0$ οπότε $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - \eta\mu x > 0$, άρα

$$f(x) - \eta\mu x = 4 \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x + 4, x \in \mathbb{R}.$$

64. Είναι $(f'(x))^2 - 4f'(x) + \frac{4}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow (f'(x))^2 - 4f'(x) + 4 = 4 - \frac{4}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$

$$(f'(x) - 2)^2 = \frac{4x^2}{x^2 + 1}. \text{ Έστω } g(x) = f'(x) - 2 \text{ τότε } g^2(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}.$$

Για $x \in (-\infty, 0)$ είναι $\frac{4x^2}{x^2 + 1} > 0$ οπότε $g^2(x) > 0$ άρα $g(x) \neq 0$.

Η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα

αυτό. Όμως $g(-2) = f'(-2) - 2 < 0$ άρα $g(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$.

$$\text{Επομένως } g(x) = -\sqrt{\frac{4x^2}{x^2+1}} = -\frac{2|x|}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}, x < 0.$$

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι $\frac{4x^2}{x^2+1} > 0$ άρα $g^2(x) > 0$ οπότε $g(x) \neq 0$. Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Όμως $g(2) = f'(2) - 2 > 0$ άρα $g(x) > 0$ οπότε

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Επίσης για $x = 0$ είναι $(f'(0))^2 - 4f'(0) + 4 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 2$. Συνεπώς

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα}$$

$$f'(x) = \left(2x + 2\sqrt{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow f(x) = 2x + 2\sqrt{x^2+1} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Είναι $f(0) = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$. Επομένως $f(x) = 2x + 2\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{65.} \text{Είναι } (f''(x) + f'(x))f(x) - (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x) \Leftrightarrow (f(x)f'(x))' = f(x)f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x) = ce^x, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } c = 2 \text{ οπότε}$$

$$f(x)f'(x) = 2e^x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 4e^x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (4e^x)' \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = 4e^x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ οπότε } f^2(x) = 4e^x \neq 0 \text{ άρα}$$

$f(x) \neq 0$. Η συνάρτηση $g(x) = f'(x) - \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 2)$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Όμως $f(0) = 2 > 0$ οπότε

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f(x) = \sqrt{4e^x} = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

Εύρεση τύπου σε ένωση διαστημάτων

$$\mathbf{66.} \text{Για κάθε } x < 0 \text{ είναι } f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 = (x^3 - x^2 + 2x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για κάθε } x \geq 0 \text{ είναι}$$

$$f'(x) = 2x + 2 = (x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

Είναι $f(1) = 4 \Leftrightarrow 3 + c_2 = 4 \Leftrightarrow c_2 = 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ οπότε είναι και συνεχής σε αυτό, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 - x^2 + 2x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x + 1) = f(0) \Leftrightarrow c_1 = 1 = f(0), \text{ άρα}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2x + 1, & x < 0 \\ x^2 + 2x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

67.α) Για $x > 3$ είναι $f'(x) = x - 3 = \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$

Για $x < 3$ είναι $f'(x) = -x + 3 = \left(-\frac{x^2}{2} + 3x \right)' = -\frac{x^2}{2} + 3x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$

Όμως $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής

στο 3 άρα $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Leftrightarrow f(3) = \frac{9}{2} = c_1 - \frac{9}{2} \Rightarrow c_1 = 9$, άρα

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 3x, & x < 3 \\ 9/2, & x = 3 \\ \frac{x^2}{2} - 3x + 9, & x > 3 \end{cases}$$

β) Αν $x < 1$ τότε $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right)' \Leftrightarrow$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(0) = 0 \text{ οπότε } c_1 = 0. \text{ Αν } 1 < x < 2$$

τότε $f'(x) = -x^2 + 3x - 2 = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right)' \Leftrightarrow$

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Αν $x > 2$ τότε $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right)' \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο 1 και στο 2, άρα $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow f(1) = \frac{5}{6} = -\frac{5}{6} + c_2$ οπότε $c_2 = \frac{5}{3}$, $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow f(2) = 1 = \frac{2}{3} + c_3$ άρα $c_3 = \frac{1}{3}$

$$\text{Επομένως } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \text{ ή } x = 2 \\ -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + \frac{5}{3}, & 1 < x < 2 \\ \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + \frac{1}{3}, & x > 2 \end{cases}$$

Αυξημένης δυσκολίας

68.α) Για $x \neq 0$ είναι

$$xf'(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 = (x^3 - 2x^2 + 2x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + c_1, & x > 0 \\ x^3 - 2x^2 + 2x + c_2, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(1) = 6 \Leftrightarrow c_1 = 5 \text{ οπότε}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 5, & x > 0 \\ x^3 - 2x^2 + 2x + c_2, & x < 0 \end{cases} \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ οπότε είναι}$$

συνεχής στο 0 άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c_2 = 5 = f(0)$, επομένως

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 5, x \in \mathbb{R}.$$

β) Για $x \neq -1$ είναι

$$(x+1)f'(x) = 2x^2 - 8x - 10 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2(x-5)(x+1)}{x+1} = (x^2 - 10x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10x + c_1, & x > -1 \\ x^2 - 10x + c_2, & x < -1 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 = 2 \text{ οπότε}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10x + 2, & x > -1 \\ x^2 - 10x + c_2, & x < -1 \end{cases}. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ οπότε είναι}$$

συνεχής στο -1 άρα $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow c_2 = 2 = f(-1)$, άρα

$$f(x) = x^2 - 10x + 2, x \in \mathbb{R}$$

γ) Για $x \neq 0$ είναι $x^2 f'(x) = 4x^5 - 2x^3 \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x = (x^4 - x^2)'$ $\Leftrightarrow$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 + c_1, & x > 0 \\ x^4 - x^2 + c_2, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1 \text{ οπότε}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - x^2 + 1, & x > 0 \\ x^4 - x^2 + c_2, & x < 0 \end{cases}. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ οπότε είναι}$$

συνεχής στο 0 άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c_2 = 1 = f(0)$, άρα

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

69.α) Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$.

Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = xf'(x) - x^2 e^x \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x^2 e^x \Leftrightarrow$

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (e^x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} e^x + c_1, & x > 0 \\ e^x + c_2, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} xe^x + c_1 x, & x > 0 \\ xe^x + c_2 x, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως}$$

$f(1) = e \Leftrightarrow c_1 = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι παραγωγίσιμη

στο 0 άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(e^x + c_2)}{x} \Leftrightarrow 1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0, \text{ άρα } f(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}.$$

β) Για $x \neq 0$ είναι

$$f(x) = xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} c_1 x, & x < 0 \\ c_2 x, & x > 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως}$$

$f(1) = 1 \Leftrightarrow c_2 = 1$. Για $x = 0$ η (1) γίνεται $f(0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{c_1 x}{x} \Leftrightarrow 1 = c_1, \text{ επομένως } c_1 = 1 \text{ και η } f \text{ έχει}$$

$$\text{τύπο } f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x, x \in \mathbb{R}.$$

γ) Για $x=0$ είναι $f(0)=0$. Για $x \neq 0$ είναι

$$xf'(x) - 2f(x) = x^3 e^x \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) = x^4 e^x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} e^x + c_1, & x > 0 \\ e^x + c_2, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x + c_1 x^2, & x > 0 \\ x^2 e^x + c_2 x^2, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(1) = e \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ και}$$

$$f(-1) = e \Leftrightarrow c_2 = 0. \text{ Επομένως}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 e^x, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x^2 e^x, x \in \mathbb{R}.$$

δ) Για $x=0$ είναι $f(0)=0$. Για $x \neq 0$ είναι

$$xf'(x) - x^2 \eta \mu x = x^3 \sigma \upsilon \nu x + f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x^3 \sigma \upsilon \nu x + x^2 \eta \mu x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$xf'(x) - f(x) = x^2 (x \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = x \sigma \upsilon \nu x + \eta \mu x \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (x \eta \mu x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x \eta \mu x + c_1, & x > 0 \\ x \eta \mu x + c_2, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu x + c_1 x, & x > 0 \\ x^2 \eta \mu x + c_2 x, & x < 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Όμως } f(\pi) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x (\eta \mu x + c_2)}{x} \Leftrightarrow$$

$$c_2 = 0. \text{ Άρα } f(x) = x^2 \eta \mu x, x \in \mathbb{R}.$$

70. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ και η εφαπτομένη της f στο M είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \text{ Επειδή διέρχεται από το } (0,0) \text{ είναι}$$

$$-f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0. \text{ Αφού ισχύει για όλες τις}$$

εφαπτόμενες τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $xf'(x) - f(x) = 0$.

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} xc_1, & x < 0 \\ xc_2, & x > 0 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Επειδή η } f \text{ περιττή τότε για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ισχύει $f(-x) = -f(x)$. Για $x = 0: f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ και για $x = 1: f(-1) = -f(1) = -1$.

Είναι $f(1) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1$ και για $f(-1) = -1 \Leftrightarrow c_2 = 1$ άρα

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x, x \in \mathbb{R}$$

$$71. \text{ Για } x \neq 3 \text{ είναι } xf'(x) = 3f'(x) + f(x) \Leftrightarrow (x-3)f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)f'(x) - f(x)}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x-3} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-3} = \begin{cases} c_1, & x > 3 \\ c_2, & x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} c_1(x-3), & x > 3 \\ c_2(x-3), & x < 3 \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι συνεχής στο 3 άρα

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) \Leftrightarrow f(3) = 0.$$

$$\text{Είναι } f'(3) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{c_1(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{c_2(x-3)}{x-3} = 2, \text{ άρα } c_1 = c_2 = 2 \text{ οπότε}$$

$$f(x) = 2(x-3) = 2x-6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Εύρεση συνάρτησης από σχήμα με f, f'

72.α) Έστω ότι $C_1 \equiv C_f$ τότε $C_2 \equiv C_{f'}$. Στην περίπτωση αυτή η C_f είναι ευθεία οπότε θα έχει τύπο της μορφής $f(x) = ax + \beta, a \neq 0, x \in \mathbb{R}$. Τότε όμως $f'(x) = a$, οπότε η γραφική παράσταση της f' θα είναι μια οριζόντια ευθεία που δεν ισχύει. Επομένως $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f'}$.

β) Έστω ότι η $C_1 \equiv C_f$ και $C_2 \equiv C_{f'}$. Στο σχήμα παρατηρούμε ότι ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της C_1 στο $x=1$, οπότε $f'(1) = 0$ άτοπο αφού $f'(1) = -2$ όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $C_2 \equiv C_{f'}$.

Επομένως $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_{f'}$.

73.α) Έστω ότι $C_2 \equiv C_f$ και $C_1 \equiv C_g$, τότε $f(x) = 2, x \in [0, 2\pi]$ και

$g(x) = 2 - \eta\mu x$. Τότε $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ άτοπο αφού $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ όπως βλέπουμε από τη γραφική παράσταση της $C_1 \equiv C_g$.

Επομένως η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της g .

β) Είναι $g(x) = f(x) - \eta\mu x \Leftrightarrow 2 = f(x) - \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = 2 + \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$.

74.α) Έστω ότι $C_1 \equiv C_{f''}$ και $C_2 \equiv C_{f'}$. Αφού η μία είναι κατακόρυφη μετατόπιση της άλλης και τέμνουν τον άξονα y' στα σημεία $(0, 1)$ και $(0, 2)$ τότε είναι για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f''(x) + 1 \Leftrightarrow f''(x) - f'(x) = -1 \Leftrightarrow e^{-x}f''(x) - e^{-x}f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^{-x}f'(x))' = (e^{-x})' \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) = e^{-x} + c \Leftrightarrow f'(x) = 1 + c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f'(0) = 1 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Άρα } f'(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = (e^x + x)' \Leftrightarrow f(x) = e^x + x + c', c' \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής. Άρα $0 \in f(\mathbb{R})$ επομένως υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ πράγμα άτοπο. Άρα $C_1 \equiv C_{f'}$ και $C_2 \equiv C_{f''}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) = f'(x) + 1 \Leftrightarrow f''(x) - f'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f''(x) - e^{-x}f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow (e^{-x}f'(x))' = (-e^{-x})' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x) = -e^{-x} + c \Leftrightarrow f'(x) = -1 + c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f'(0) = -1 + c \Leftrightarrow 1 = -1 + c \Leftrightarrow c = 2$$

$$\text{Άρα } f'(x) = 2e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = (2e^x - x)' \Leftrightarrow f(x) = 2e^x - x + \alpha, x \in \mathbb{R}$$

Είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ άρα υπάρχει $\beta < 0$ σε περιοχή του $-\infty$ τέτοιο ώστε $f(\beta) > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -\ln 2$, άρα πρέπει και η ελάχιστη τιμή να είναι θετική δηλαδή $f(-\ln 2) > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2e^{-\ln 2} + \ln 2 + \alpha > 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} + \ln 2 + \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha + 1 > -\ln 2.$$

75. Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) = \varphi(x) + 1 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (x - \sqrt{x})' \Leftrightarrow f(x) - g(x) = x - \sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση $k(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x} + c, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε και

στο 0 άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = k(0) \Leftrightarrow c = 0$ οπότε $f(x) - g(x) = x - \sqrt{x}$ για κάθε $x \geq 0$.

$$\text{Είναι } f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} \geq 0.$$

$$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } x - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq 0$$

Είναι $\sqrt{x} \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ με

την ισότητα να ισχύει μόνον για

$$x = 0. \text{ Είναι } \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{και } \sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Άρα } \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, +\infty) \cup \{0\}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\sqrt{x}$			+	+
$\sqrt{x} - 1$			-	+
$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$			-	+

2^{ος} τρόπος: $x - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq x \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x \leq x^2 \Leftrightarrow x(x - 1) \geq 0$ και ομοίως με πίνακάκι βρίσκουμε ίδιο αποτέλεσμα.

76.α) Η $g(x) = \ln f(x)$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

επομένως η C_f δεν μπορεί να είναι η C_3 . Αν $C_f \equiv C_2$ τότε οι f, g είναι

σταθερές πράγμα άτοπο αφού $g'(x) > 0$. Άρα η C_f είναι C_1 . Η g είναι

$$\text{παραγωγίσιμη με παράγωγο } g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ και } g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} > 0$$

$$f(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα η } f' \text{ δεν μπορεί να παριστάνεται από την}$$

$$C_3. \text{ Αν η } f' \text{ παριστάνεται από την } C_2 \text{ τότε } f'(x) = \lambda \Leftrightarrow f'(x) = (\lambda x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \lambda x + \kappa, \lambda, \kappa \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή η } C_f \text{ είναι ευθεία πράγμα άτοπο γιατί η}$$

C_1 δεν είναι ευθεία. Άρα και η f' παριστάνεται από την C_1 .

β) Από το α σκέλος συμπεραίνουμε ότι $f(x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = C \cdot e^x. \text{ Είναι } g(0) = 0 \Leftrightarrow \ln f(0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 1 \text{ άρα για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = C \Leftrightarrow C = 1. \text{ Συνεπώς } f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } g(x) = \ln f(x) = \ln e^x = x, x \in \mathbb{R}.$$

2^{ος} τρόπος: Για κάθε $x \in \mathbb{R} : f(x) = f'(x) \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow g'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(x) = x + C', x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g(0) = 0 \text{ άρα } C' = 0, \text{ δηλαδή}$

$g(x) = x \Leftrightarrow \ln f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

Εύρεση τύπου συνάρτησης δύο μεταβλητών

77. Είναι $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$ (1). Με παραγωγή της σχέσης (1) κατά μέλη ως προς y έχουμε: $f'(x+y) = f'(y) + 2x$ (2).

Από τη σχέση (2) για $y = 0$ είναι $f'(x) = f'(0) + 2x = 1 + 2x = (x + x^2)'$ $\Leftrightarrow$.

$f(x) = x + x^2 + c, c \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση (1) για $x = y = 0$ είναι $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$.

78. Είναι $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + y$ (1). Με παραγωγή της σχέσης (1) κατά μέλη ως προς y έχουμε: $f'(x+y) = f'(y) + x + 1$ (2).

Από τη σχέση (2) για $y = 0$ είναι $f'(x) = f'(0) + x + 1 = x + 1 = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)' \Leftrightarrow$

$f(x) = \frac{x^2}{2} + x + c, c \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση (1) για $x = y = 0$ είναι

$f(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$, άρα $f(x) = \frac{x^2}{2} + x, x \in \mathbb{R}$.

79.α) Είναι $f(x+y) = f(x) + f(y) - 6xy$ (1), οπότε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f(h) - 6x_0h - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)}{h} - 6x_0 \right) = 12 - 6x_0. \text{ Άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με παράγωγο}$$

$f'(x) = 12 - 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x) = 12 - 6x \Leftrightarrow f'(x) = (12x - 3x^2)' \Leftrightarrow f(x) = 12x - 3x^2 + c, c \in \mathbb{R}$

Η σχέση (1) για $x = y = 0$ γίνεται: $f(0) = f(0) + f(0) - 6 \cdot 0 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Όμως $f(0) = c$, άρα $c = 0$ οπότε $f(x) = 12x - 3x^2, x \in \mathbb{R}$.

80. Είναι $f(x \cdot y) = xf(y) + yf(x)$ (1). Με παραγωγή της σχέσης (1) κατά

μέλη ως προς y έχουμε: $(f(xy))' = (xf(y) + yf(x))' \Leftrightarrow$

$f'(xy)(xy)' = xf'(y) + f(x) \Leftrightarrow xf'(xy) = xf'(y) + f(x)$ (2). Από τη σχέση (2) για $y = 1$ είναι :

$$xf'(x) = xf'(1) + f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = x \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = x \ln x + cx, c \in \mathbb{R}.$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα $f(x) = x \ln x$, $x > 0$.

Προβλήματα

81. Είναι $K'(x) = 6x^2 + 4x \Leftrightarrow K'(x) = (2x^3 + 2x^2)' \Leftrightarrow$

$K(x) = 2x^3 + 2x^2 + c, c \in \mathbb{R}$. Όμως $K(0) = 2500 \Leftrightarrow c = 2500$, άρα

$K(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2500$

82. Για κάθε $t > 0$ είναι $u(t) = \frac{t(3 - 2\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow u(t) = \frac{3t - 2t\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \Leftrightarrow$

$u(t) = \frac{3t}{2\sqrt{t}} - t \Leftrightarrow u(t) = \frac{3\sqrt{t}}{2} - t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow u(t) = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} - t \Leftrightarrow x'(t) = \left(t^{\frac{3}{2}} - t\right)' \Leftrightarrow x(t) = t\sqrt{t} - t + c, c \in \mathbb{R}.$

Είναι $x(0) = 0$, η συνάρτηση θέσης $x(t)$ είναι συνεχής στο 0 οπότε,

$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x(0) \Leftrightarrow c = 0$ άρα $x(t) = t\sqrt{t} - t, t \geq 0$.

Άρα ύστερα από 1 min είναι $x(1) = 2$ km.

83. Έστω $f(t)$ η τιμή πώλησης του H/Y t έτη από την αγορά του. Είναι

$f'(t) = \lambda f(t) \Leftrightarrow e^{-\lambda t} f'(t) - \lambda e^{-\lambda t} f(t) = 0 \Leftrightarrow (e^{-\lambda t} f(t))' = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} f(t) = c \Leftrightarrow$

$f(t) = ce^{\lambda t}, c \in \mathbb{R}$. Όμως $f(0) = 1312 \Leftrightarrow c = 1312$ και

$f(2) = 820 \Leftrightarrow 1312 \cdot e^{2\lambda} = 820 \Leftrightarrow e^{2\lambda} = \frac{820}{1312} = 0,625 \Leftrightarrow 2\lambda = \ln 0,625 \Leftrightarrow$

$\lambda = -0,235$. Άρα $f(t) = 1312e^{-0,235t}$.

84.Είναι $Q'(t) = \lambda Q(t) \Leftrightarrow Q'(t) - \lambda Q(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} Q'(t) - \lambda e^{-\lambda t} Q(t) = 0 \Leftrightarrow$

$$(e^{-\lambda t} Q(t))' = 0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} Q(t) = c \Leftrightarrow Q(t) = ce^{\lambda t}, c \in \mathbb{R}. \text{ Όμως}$$

$$Q(5) = 2Q(0) \Leftrightarrow \cancel{c}e^{5\lambda} = 2\cancel{c} \Leftrightarrow e^{5\lambda} = 2 \Leftrightarrow 5\lambda = \ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5} \ln 2, \text{ άρα}$$

$$Q(t) = ce^{\frac{1}{5} \ln 2}. Q(t_1) = 5Q(0) \Leftrightarrow \cancel{c}e^{\frac{t_1}{5} \ln 2} = 5\cancel{c} \Leftrightarrow \frac{t_1}{5} \ln 2 = \ln 5 \Leftrightarrow$$

$$\frac{t_1}{5} = \frac{\ln 5}{\ln 2} = 2,32 \Leftrightarrow t_1 = 11,5 \text{ ώρες.}$$

85.Εστω $\alpha(t) > 0$ η πλευρά του τετραγώνου συναρτήσει του χρόνου t .

Ο ρυθμός μεταβολής της πλευράς του είναι ανάλογος του εμβαδού του οπότε $\alpha'(t) = \lambda \alpha^2(t), \lambda \neq 0$ (1).

$$\text{Είναι } E(t) = \alpha^2(t) \text{ οπότε } E(1) = 4 \Leftrightarrow \alpha^2(1) = 4 \Leftrightarrow \alpha(1) = 2 \text{ cm.}$$

$$\text{Επίσης } \alpha'(1) = 1 \text{ cm/sec. Άρα για } t=1 \text{ (1)} \Leftrightarrow \alpha'(1) = \lambda \alpha^2(1) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Άρα (1)} \Leftrightarrow \alpha'(t) = \frac{1}{4} \alpha^2(t) \Leftrightarrow \frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha(t)} \right)' = \left(-\frac{1}{4} t \right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(t)} = -\frac{1}{4} t + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } t=1 \text{ είναι } \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + c \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{\alpha(t)} = -\frac{t}{4} + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(t)} = \frac{3-t}{4} \Leftrightarrow \alpha(t) = \frac{4}{3-t} \text{ cm/sec.}$$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} \alpha(t) > 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3-t} > 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 3 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in [0, 3)$$

$$\text{Επίσης είναι } \alpha(0) = \frac{4}{3} \text{ cm, επομένως } E(0) = \alpha^2(0) = \frac{16}{9} \text{ cm}^2.$$

Σύνθετες ασκήσεις

86.α) Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x f(x) - e^{x_0} f(x_0)}{x - x_0} =$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x f(x) - e^x f(x_0) + e^x f(x_0) - e^{x_0} f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[e^x \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} \right] \quad (1)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Έστω $\varphi(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = e^x$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \varphi'(x_0) = e^{x_0}$, οπότε η (1) γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x f(x) - e^{x_0} f(x_0)}{x - x_0} = e^{x_0} f'(x_0) + f(x_0) e^{x_0} = e^{x_0} (f(x_0) + f'(x_0))$$

β) Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι $e^{x_0} (f(x_0) + f'(x_0)) = e^{x_0}$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

είναι $e^x (f(x) + f'(x)) = e^x \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow e^x f(x) = e^x + c \Leftrightarrow f(x) = 1 + ce^{-x}$, $c \in \mathbb{R}$. Είναι $f(0) = 2 \Leftrightarrow 1 + c = 2 \Leftrightarrow c = 1$, οπότε $f(x) = 1 + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x^3 - 3x + 2 = e^{-x} - x^3 - 3x + 3$.

Έστω ότι η h έχει δύο ρίζες $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Η h είναι συνεχής στο

$[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $h'(x) = -e^{-x} - 3x^2 - 3$ και

$h(x_1) = h(x_2) = 0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα

υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -e^{-\xi} - 3\xi^2 - 3 = 0$ που είναι άτοπο αφού $-e^{-\xi} - 3\xi^2 - 3 < 0$. Επομένως η εξίσωση

$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + 3x - 2$ δεν έχει δύο ρίζες άρα έχει το πολύ μία ρίζα.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = -e^{-x}$ οπότε $f'(0) = -1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ είναι η ευθεία ε :

$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = -x + 2$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x) = \alpha - 4x$. Αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0) = -1 \Leftrightarrow$

$$\alpha - 4x_0 = -1 \Leftrightarrow \alpha = 4x_0 - 1 \quad (2)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο x_0 έχει εξίσωση:

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (\alpha x_0 - 2x_0^2) = -x + x_0 \Leftrightarrow$$

$$y = -x + x_0 + \alpha x_0 - 2x_0^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} y = -x + x_0 + (4x_0 - 1)x_0 - 2x_0^2 \Leftrightarrow$$

$$y = -x + \cancel{x_0} + 4x_0^2 - \cancel{x_0} - 2x_0^2 \Leftrightarrow y = -x + 2x_0^2 \quad (3).$$

Για να εφάπτεται η ε της C_g πρέπει να υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο η ε να ταυτίζεται με την (3), άρα $2x_0^2 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

Αν $x_0 = 1$ τότε $\alpha = 4 \cdot 1 - 1 = 3$ και αν $x_0 = -1$ τότε $\alpha = -5$.

2ος τρόπος: Είναι $f'(x) = -e^{-x}$ και $f'(0) = -1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ είναι η ευθεία ε :

$$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0) = -1$.

$$\text{Είναι } g'(x) = \alpha - 4x \text{ και } g'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \alpha - 4x_0 = -1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha + 1}{4} \quad (2)$$

Το σημείο $(x_0, g(x_0)) \equiv \left(\frac{\alpha + 1}{4}, \frac{\alpha^2 - 1}{8} \right)$ θα ανήκει στην (ε) οπότε

$$\frac{\alpha^2 - 1}{8} = -\frac{\alpha + 1}{4} + 2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 1 = -2\alpha - 2 + 16 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha = 3) \text{ ή } (\alpha = -5).$$

ε) Αν $\alpha = 3$ τότε $g(x) - 1 = -2x^2 + 3x - 1$. Η γραφική παράσταση της $g(x) - 1$

είναι παραβολή με μέγιστο το $y = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{1}{-8} = \frac{1}{8}$ για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$,

οπότε $g(x) \leq \frac{1}{8}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 + e^{-x} > 1 \Leftrightarrow f(x) > 1, \text{ είναι } f(x) > g(x) - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

87.α) Για κάθε $x \in [-2, 2]$, έχουμε: $f'(x) + f'(-x) = 0 \quad (1) \Leftrightarrow f'(x) = -f'(-x) \Leftrightarrow$

$$f'(x) = [f(-x)]' \Leftrightarrow f(x) = f(-x) + c, c \in \mathbb{R}, \text{ θέτουμε } x = 0, \text{ οπότε}$$

$$f(0) = f(0) + c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x) = f(-x), \text{ που σημαίνει ότι η } f \text{ είναι άρτια.}$$

β) Στη σχέση (1), για $x = 0$ έχουμε $f'(0) + f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$. Οπότε, το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$. Έστω ότι υπάρχει $\rho \in (-2, 2)$, με $\rho \neq 0$, ο οποίος είναι ρίζα της $f'(x) = 0$. Δηλαδή, $f'(\rho) = f'(0) = 0$. Επίσης, η f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \rho]$ ή $[\rho, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$, οπότε σύμφωνα με το θ. Rolle, θα υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ ή $\xi \in (\rho, 0)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$, άτοπο, γιατί $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Άρα, το 0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$.

γ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0, 2]$, οπότε υπάρχει

$$\xi_1 \in (0, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi_1) = \frac{f'(2) - f'(0)}{2} = \frac{f'(2)}{2} \Leftrightarrow 2f''(\xi_1) = f'(2) \quad (2).$$

Επειδή $0 < \xi_1 < 2 \Leftrightarrow 0 < \frac{\xi_1}{2} < 1$ υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\frac{\xi_1}{2} = x_0 \Leftrightarrow$

$$\xi_1 = 2x_0 \quad (3). \text{ Άρα, η (2), με βάση την (3) γίνεται } 2f''(2x_0) = f'(2).$$

88.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = (f'(x) - f''(x))e^x + (f(x) - f'(x) - 1)e^x \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = (f'(x) - f(x) + 1)e^x + (f(x) - f'(x) - 1)e^x \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = (f'(x) - f(x) + 1)e^x - (f'(x) - f(x) + 1)e^x \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $g(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$ οπότε

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow (f(x) - f'(x) - 1)e^x = 2 \Leftrightarrow f(x) - f'(x) - 1 = 2 \cdot e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) - f(x) = -1 - 2e^{-x}, x \in \mathbb{R}.$$

γ) Είναι $f'(x) - f(x) = -1 - 2e^{-x} \Leftrightarrow$

$$f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = -e^{-x} - 2e^{-2x} \Leftrightarrow (f(x)e^{-x})' = (e^{-x} + e^{-2x})' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{-x} = e^{-x} + e^{-2x} + c_1 \Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{-x} + c_1e^x, c \in \mathbb{R}. \text{ Όμως}$$

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ άρα } f(x) = 1 + e^{-x}.$$

δ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ είναι $-x_1 \neq -x_2 \Leftrightarrow$

$$e^{-x_1} \neq e^{-x_2} \Leftrightarrow 1 + e^{-x_1} \neq 1 + e^{-x_2} \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \text{ άρα}$$

η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε

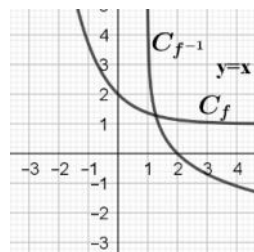
$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 + e^{-x} = y \Leftrightarrow -e^{-x} = y - 1 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 - y$$

(1). Όμως $e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 - y > 0 \Leftrightarrow y < 1$. Για $y < 1$

έχουμε από τη σχέση (1):

$$-x = \ln(1 - y) \Leftrightarrow x = -\ln(1 - y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(1 - y), \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(x) = -\ln(1 - x), x < 1.$$



89.α) Αφού $4f''(x)f^3(x) = -1$ (1) $\Leftrightarrow 4f''(x)f^3(x) \neq 0$ τότε $f^3(x) \neq 0$ άρα

$$f(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Από τη σχέση (1) έχουμε $4f''(x) = -\frac{1}{f^3(x)} \Leftrightarrow 4f''(x)f'(x) = -\frac{f'(x)}{f^3(x)} \Leftrightarrow$

$$2\left[(f'(x))^2\right]' = \frac{1}{2}\left(-\frac{2f'(x)}{f^3(x)}\right) \Leftrightarrow \left[2(f'(x))^2\right]' = \left(\frac{1}{2f^2(x)}\right)' \Leftrightarrow$$

$$2(f'(x))^2 = \frac{1}{2f^2(x)} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=1 \text{ είναι } 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c=0. \text{ Άρα}$$

$$(f'(x))^2 = \frac{1}{4f^2(x)} \quad (2).$$

γ) Από τη σχέση (2) έχουμε $(2f'(x)f(x))^2 = 1$ (3) οπότε $2f'(x)f(x) \neq 0$.

Η συνάρτηση $g(x) = 2f'(x)f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, $g(x) \neq 0$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0, +\infty)$.

Όμως $g(1) = 2f'(1)f(1) = 1 > 0$ οπότε $g(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) > 0$ Από τη

σχέση (3) έχουμε : $2f'(x)f(x) = 1 \Leftrightarrow (f^2(x))' = (x)' \Leftrightarrow f^2(x) = x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$

Για $x=0$ είναι $f^2(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1$ άρα $f^2(x) = x, x \in (0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, $f(x) \neq 0$ και $f(1) > 0$ οπότε $f(x) > 0$, άρα

$f(x) = \sqrt{x}$ στο $(0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής, στο 0

οπότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, επομένως $f(x) = \sqrt{x}$,

$x \geq 0$.

δ) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως

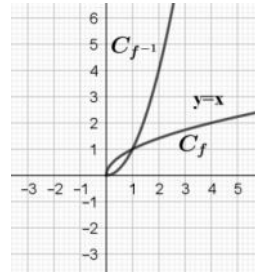
αύξουσα οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y, y \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x = y^2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^2, y \geq 0 \text{ άρα } f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0.$$

$$\text{Είναι } f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x^2 \Leftrightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x=0) \text{ ή } (x^3 = 1 \Leftrightarrow x=1).$$



$$\mathbf{90.α)} \text{ Είναι } f'(x) = e^{x-f(x)} + e^{2\ln x - f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} + \frac{e^{\ln x^2}}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} f'(x) = e^x + x^2 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = \left(e^x + \frac{x^3}{3}\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^x + \frac{x^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για}$$

$$x=0 \text{ είναι } e^{f(0)} = 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c=0 \text{ οπότε}$$

$$e^{f(x)} = \underbrace{e^x + \frac{x^3}{3}}_{>0} \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(e^x + \frac{x^3}{3}\right).$$

β) Έστω ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$, τότε υπάρχει

$$\xi \in (\alpha, \beta) : f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^\xi + \xi^2}{e^\xi + \frac{\xi^3}{3}} = 0 \Leftrightarrow e^\xi + \xi^2 = 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

γ) Θέτουμε $e^x + \frac{x^3}{3} = u$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x + \frac{x^3}{3}\right) = +\infty$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(e^x + \frac{x^3}{3}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty.$$

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{e^x + x^2}{e^x + \frac{x^3}{3}}$. Είναι

$$f'(1) = \frac{e+1}{e+\frac{1}{3}} = \frac{3(e+1)}{3e+1} = \frac{3e+3}{3e+1}, \lambda_\varepsilon = -\frac{3e+1}{3e+3} \text{ οπότε}$$

$$f'(1) \cdot \lambda_\varepsilon = \frac{\cancel{3e+3}}{\cancel{3e+1}} \cdot \left(-\frac{\cancel{3e+1}}{\cancel{3e+3}}\right) = -1 \text{ άρα η } (\varepsilon) \text{ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της}$$

C_f στο A .

$$91.a) f(x)f'(x) = \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = \sin x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (\eta \mu x)' \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = \eta \mu x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } f^2(0) = 9 + c \Leftrightarrow 9 = 9 + c \Leftrightarrow c = 0$$

οπότε $f^2(x) = \eta \mu x + 9$. Είναι $f(x) \neq 0$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0) = 3$, είναι $f(x) > 0$, άρα $f(x) = \sqrt{\eta \mu x + 9}$,

$$x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) i. \text{ Είναι } f(x)e^{-g(x)} - 2xe^{-g(x)} = g'(x) \Leftrightarrow (f(x) - 2x)e^{-g(x)} = g'(x) \Leftrightarrow$$

$$e^{g(x)}g'(x) = f(x) - 2x \Leftrightarrow f(x) = e^{g(x)}g'(x) + 2x \Rightarrow f(x) = (e^{g(x)} + x^2)'. \text{ Έστω}$$

$h(x) = e^{g(x)} + x^2$, $x \in \mathbb{R}$ τότε $h'(x) = f(x)$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την h στο $[0, x]$, $x > 0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$, $x > 0$:

$$h'(\xi) = \frac{h(x) - h(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{1}{x}(e^{g(x)} + x^2 - e^{g(0)}).$$

$$\text{Είναι } -1 \leq \eta\mu\xi \leq 1 \Leftrightarrow 8 \leq \eta\mu\xi + 9 \leq 10 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq \sqrt{\eta\mu\xi + 9} \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2} \leq f(\xi) \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq \frac{1}{x} (e^{g(x)} + x^2 - e^{g(0)}) \leq \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{2}x \leq e^{g(x)} + x^2 - e^{g(0)} \leq \sqrt{10}x \Leftrightarrow 2\sqrt{2}x - x^2 \leq e^{g(x)} - e^{g(0)} \leq \sqrt{10}x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$x(2\sqrt{2} - x) \leq e^{g(x)} - e^{g(0)} \leq x(\sqrt{10} - x) \dots$$

ii. Έστω ότι η εξίσωση $e^{g(x)} + x^2 = 2x \Leftrightarrow e^{g(x)} + x^2 - 2x = 0$ έχει δύο ρίζες

$\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^{g(x)} + x^2 - 2x$.

Η φ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ σαν σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο

$$\varphi'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) + 2x - 2 = f(x) - 2, \quad \varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2) = 0 \quad \text{οπότε ισχύουν οι}$$

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$: $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(\xi) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\eta\mu\xi + 9} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = -5 \quad \text{άτοπο. Άρα η εξίσωση}$$

$$e^{g(x)} + x^2 = 2x \Leftrightarrow e^{g(x)} + x^2 - 2x = 0 \quad \text{έχει το πολύ μία ρίζα.}$$

92.α) Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) + 2f(x-h) - 3f(x)}{h^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\stackrel{\text{DLH}}{=}}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h) - f'(x-h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h) - f'(x) - f'(x-h) + f'(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+2h) - f'(x)}{h} - \frac{f'(x-h) - f'(x)}{h} \right) = 2f''(x) + f''(x) = 3f''(x) \quad \text{γιατί}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+kh) - f'(x)}{h} \stackrel{kh=u \Leftrightarrow h=\frac{u}{k}}{=} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \Rightarrow \\ u \rightarrow 0}} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{\frac{u}{k}} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} k \frac{f'(x+u) - f'(x)}{u} = kf''(x), \quad k \neq 0. \quad \text{Άρα } 3f''(x) = -\frac{3}{4x\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (f'(x))' = \left(-\frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2\sqrt{x}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = (\sqrt{x} + cx)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{x} + cx + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \quad \text{Είναι } f(1) = 1 \Leftrightarrow c + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -c(1),$$

$f(4) = 2 \Leftrightarrow 2 + 2c + c_1 = 2 \Leftrightarrow c = 0$ ⁽¹⁾ οπότε $c_1 = 0$ άρα $f(x) = \sqrt{x}$.

β) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{AB} = \frac{\sqrt{\xi} - 0}{\xi + \xi} = \frac{\sqrt{\xi}}{2\xi} = \frac{\sqrt{\xi}}{2(\sqrt{\xi})^2} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = f'(\xi), \text{ οπότε εφάπτεται της } C_f \text{ στο } A.$$

γ) Έστω $0 \leq x_1 < x_2$ τότε $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y, y \geq 0 \Leftrightarrow x = y^2$, άρα $f^{-1}(y) = y^2, y \geq 0$ οπότε $f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0$.

δ) Έστω $B(x_1, x_1^2)$, $x_1 > 0$ σημείο της $C_{f^{-1}}$. Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο

$(0, +\infty)$ με $(f^{-1})'(x) = 2x$. Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο B είναι η ευθεία ε :

$$y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = 2x_1x - x_1^2.$$

Για να διέρχεται η ε από το Γ πρέπει $-1 = 0 - x_1^2 \Leftrightarrow x_1 = 1$, ^{$x_1 > 0$} άρα $\varepsilon: y = 2x - 1$.

ε) Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = \sqrt{x(t)}$. Επειδή το M αυξάνει διαρκώς την απόστασή του από την αρχή των αξόνων είναι $x'(t) > 0$. Είναι

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x(t)}} x'(t). \text{ Τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ που ο ρυθμός μεταβολής της}$$

τεταγμένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, είναι

$$y'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{x(t_0)}} x'(t_0) \Leftrightarrow \cancel{x'(t_0)} = \frac{1}{2\sqrt{x(t_0)}} \cancel{x'(t_0)} \Leftrightarrow \sqrt{x(t_0)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_0 = \frac{1}{4}, \text{ άρα } M\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

στ) Είναι $f^{-1}(x) + f^2(x) = \eta\mu x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - \eta\mu x - 1 = 0$.

Έστω $g(x) = x^2 + x - \eta\mu x - 1, x \in [0, \pi]$. Είναι

$g(0) = -1 < 0, g(\pi) = \pi^2 + \pi - 1 > 0$ οπότε $g(0)g(\pi) < 0$, η g είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho \in (0, \pi): g(\rho) = 0$.

ζ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την $f(x) = \sqrt{x}$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (\alpha, \beta): f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Όμως } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha} < 2\sqrt{\xi} < 2\sqrt{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} > \frac{1}{2\sqrt{\xi}} > \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\beta}} < \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha} < \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \Leftrightarrow \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\beta}} < \sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} < \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{\alpha}}.$$

$$\eta) \text{ Είναι } \xi_1 + \ln(x - \sqrt{x}) = \ln(e^x - e^{\sqrt{x}}) \Leftrightarrow \xi_1 = \ln(e^x - e^{\sqrt{x}}) - \ln(x - \sqrt{x}) \Leftrightarrow$$

$$\xi_1 = \ln \frac{e^x - e^{\sqrt{x}}}{x - \sqrt{x}}. \text{ Έστω } h(t) = e^t, t \in [\sqrt{x}, x], x > 1. \text{ Ισχύουν οι υποθέσεις}$$

του Θ.Μ.Τ για την h οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\sqrt{x}, x)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi_1) = \frac{h(x) - h(\sqrt{x})}{x - \sqrt{x}} \Leftrightarrow e^{\xi_1} = \frac{e^x - e^{\sqrt{x}}}{x - \sqrt{x}} \Leftrightarrow \xi_1 = \ln \frac{e^x - e^{\sqrt{x}}}{x - \sqrt{x}}. \text{ Είναι}$$

$$\sqrt{x} < \xi_1 < x \Leftrightarrow \sqrt{x} < \ln \frac{e^x - e^{\sqrt{x}}}{x - \sqrt{x}} < x \Leftrightarrow \sqrt{x} < \ln(e^x - e^{\sqrt{x}}) - \ln(x - \sqrt{x}) < x.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - e^{\sqrt{x}}) - \ln(x - \sqrt{x})] = +\infty.$$

$$93.a) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^2(x) + f(x)(1 - f(x_0)) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^2(x) + f(x) - f(x)f(x_0) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} (f(x) + 1) \right] = f'(x_0)(f(x_0) + 1). \text{ Άρα για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{είναι } f'(x_0)(f(x_0) + 1) = (e^{x_0} + x_0)(e^{x_0} + 1), \text{ οπότε}$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } (f(x) + 1)f'(x) = (e^x + x)(e^x + 1).$$

$$\beta) \text{ Έστω } \varphi(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1), είναι $e^{x_1} < e^{x_2}$ (2). Με πρόσθεση των

σχέσεων (1) και (2) έχουμε $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R}$.

Είναι $\varphi(-1) = e^{-1} - 1 < 0$, $\varphi(0) = 1 > 0$, δηλαδή $\varphi(-1)\varphi(0) < 0$. Επειδή η φ

είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε

υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0$.

Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

$$\gamma) \text{ Είναι } (f(x)+1)f'(x) = (e^x + x)(e^x + 1) \Leftrightarrow$$

$$(f(x)+1)(f(x)+1)' = (e^x + x)(e^x + x)' \Leftrightarrow$$

$$2(f(x)+1)(f(x)+1)' = 2(e^x + x)(e^x + x)' \Leftrightarrow$$

$$\left[(f(x)+1)^2 \right]' = \left[(e^x + x)^2 \right]' \Leftrightarrow (f(x)+1)^2 = (e^x + x)^2 + c, c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ η (1) γίνεται: } (f(1)+1)^2 = (e+1)^2 + c \Leftrightarrow (e+1)^2 = (e+1)^2 + c \Leftrightarrow c = 0,$$

$$\text{άρα } (f(x)+1)^2 = (e^x + x)^2 \Leftrightarrow |f(x)+1| = |e^x + x| \quad (2).$$

$$\text{Για κάθε } x < x_0 \Leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(x_0) = 0 \text{ και για κάθε } x > x_0 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(x_0) = 0.$$

$$\text{Έστω } g(x) = f(x)+1, x \in \mathbb{R}. \text{ Η (2) γράφεται: } |g(x)| = |\varphi(x)| \quad (3)$$

$$\text{Είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow |\varphi(x)| = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0.$$

Για κάθε $x \neq x_0$ είναι $g(x) \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_0)$ και $(x_0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } g(-1) = f(-1)+1 = \frac{1}{e} - 1 < 0, \text{ άρα } g(x) < 0 \text{ για κάθε } x < x_0 \text{ και επειδή}$$

$$\varphi(x) < 0, \text{ η (3) γίνεται: } -g(x) = -\varphi(x) \Leftrightarrow g(x) = \varphi(x).$$

$$\text{Είναι } g(1) = f(1)+1 = e+1 > 0, \text{ άρα } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x > x_0 \text{ και επειδή}$$

$$\varphi(x) > 0, \text{ η (3) γίνεται: } g(x) = \varphi(x). \text{ Επομένως } g(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \neq x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}, \text{ οπότε}$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x)+1 = e^x + x \Leftrightarrow f(x) = e^x + x - 1.$$

$$\delta) \text{ Είναι } h(x) = x^2 (f(x)+1)^2 = x^2 \varphi^2(x) \text{ όπου } \varphi(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R} \text{ με } \varphi(x_0) = 0 \text{ (από β)}$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = 2x\varphi^2(x) + x^2 \cdot 2\varphi(x)\varphi'(x) = 2x\varphi(x)(\varphi(x) + x\varphi'(x)).$$

$$\text{Είναι } h'(0) = 0, h'(x_0) = 0, \text{ οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση}$$

$$\varphi(x) + x\varphi'(x) = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.}$$

Η h είναι συνεχής στο $[0, x_0]$, παραγωγίσιμη στο $(0, x_0)$, $h(0) = h(x_0) = 0$,

οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα υπάρχει $\rho \in (x_0, 0)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } h'(\rho) = 0 \Leftrightarrow 2\rho\varphi(\rho)(\varphi(\rho) + \rho\varphi'(\rho)) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\rho) + \rho\varphi'(\rho) = 0.$$

Άρα η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες τις $0, x_0, \rho$, οπότε η h δέχεται τουλάχιστον 3 οριζόντιες εφαπτόμενες.

ε) Είναι $x(e^x + 1) < e^{2x} - e^x + x < x(e^{2x} + 1) \Leftrightarrow$

$$xf'(x) < e^{2x} + 2x - 1 - (e^x + x - 1) < xf'(2x) \Leftrightarrow$$

$$xf'(x) < f(2x) - f(x) < xf'(2x) \Leftrightarrow f'(x) < \frac{f(2x) - f(x)}{x} < f'(2x) \quad (4).$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x, 2x]$ με $x > 0$, οπότε υπάρχει

$$\xi \in (x, 2x) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}, \text{ οπότε η (4) γίνεται:}$$

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(2x) \Leftrightarrow$$

$$e^x + 1 < e^\xi + 1 < e^{2x} + 1 \Leftrightarrow e^x < e^\xi < e^{2x} \Leftrightarrow x < \xi < 2x \text{ ισχύει.}$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στη σχέση $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ (1) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$, οπότε η σχέση γίνεται

$$f'(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad (2). \text{ Επίσης από τη σχέση (1) έχουμε}$$

$$f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x > 0}{-\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad (3). \text{ Με πρόσθεση κατά μέλη των}$$

(2),(3) έχουμε

$$f'(x)f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(x + \frac{1}{x}\right)', \text{ άρα}$$

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 1 \text{ έχουμε } \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 + 1 + c \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Συνεπώς, } f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x} \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} f(x) \frac{1}{f'(x)} = \frac{x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$(\ln f(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)\right)'. \text{ Άρα } \ln f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 1$$

$$\text{είναι } \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ οπότε } \ln f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1}. \text{ Σωστή απάντηση Δ.}$$

2. Είναι $f'(x) = e^{2x}f(-x)$ (1) $\Leftrightarrow e^{-x}f'(x) = e^x f(-x)$ (2). Θέτουμε στην (2) όπου x το $\frac{1}{x}$ οπότε $e^x f'(-x) = e^{-x} f(x)$ (3). Προσθέτουμε τις (2),(3) κατά μέλη οπότε έχουμε $e^{-x} f'(x) + e^x f'(-x) = e^x f(-x) + e^{-x} f(x) \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^x f(-x) - e^x f'(-x) \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (e^x f(-x))' \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = e^x f(-x) + c, c \in \mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $c=0$ οπότε $e^{-x} f(x) = e^x f(-x) \Leftrightarrow f(x) = e^{2x} f(-x)$ (4). Από (1) και (4) θα είναι $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = c_1 e^x, c_1 \in \mathbb{R}$. Για $x=0$ είναι $c=0$ οπότε $f(x) = e^x$
Σωστή απάντηση Β.

3. Είναι $f'(x) \sin x = f(x)(\sin x - \eta \mu x) \Leftrightarrow$

$$f'(x) \sin x + f(x) \eta \mu x = f(x) \sin x \quad \begin{matrix} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \\ + \sin^2 x \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{f'(x) \sin x + f(x) \eta \mu x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\sin x} \right)' = \frac{f(x)}{\sin x} \text{ άρα } \frac{f(x)}{\sin x} = c e^x, c \in \mathbb{R}$$

Για $x=0$ θα είναι $c=1$, οπότε $f(x) = e^x \sin x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
 Όμως η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (e^x \sin x) = 0$ και
 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (e^x \sin x) = 0$. Συνεπώς, $f(x) = e^x \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Σωστή απάντηση Β.

4. Θέτουμε $21-x = \omega$ οπότε η σχέση $f(x-21)f'(21-x) = 21-x$ γίνεται $f(-\omega)f'(\omega) = \omega$ (1). Θέτουμε στην (1) όπου ω το $-\omega$ και έχουμε $f(\omega)f'(-\omega) = -\omega$ (2). Με αφαίρεση των (1),(2) κατά μέλη έχουμε $f(-\omega)f'(\omega) - f(\omega)f'(-\omega) = 2\omega \Leftrightarrow [f(\omega)f(-\omega)]' = (\omega^2)'$
 $f(\omega)f(-\omega) = \omega^2 + c, c \in \mathbb{R}$. Για $\omega=0$ θα είναι $c=1$ οπότε
 $f(x)f(-x) = x^2 + 1 \neq 0$ (3)
 Από την (1) για $x \neq 0$ θα είναι $f'(x) \neq 0$ οπότε $f(-x) = \frac{x}{f'(x)}$ (4)

Η (3) με βάση την (4) γίνεται $f(x) \frac{x}{f'(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f'(x) - \frac{x}{x^2 + 1} f(x) = 0$

$$e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} f'(x) - \frac{x}{x^2 + 1} e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} f(x) \right]' = 0. \text{ Άρα}$$

$$e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} f(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } c_1 = 1 \text{ οπότε}$$

$$e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)} = e^{\ln \sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1}, x \neq 0.$$

Ομως $f(0) = 1$ οπότε $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$

Σωστή απάντηση Α.

$$5. \text{ Είναι } (x-1)(x-3)f'(x) = -2f(x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 4x + 3)f'(x) + (2x - 4)f(x) = (2x - 4)f(x) - 2f(x) - 1$$

$$[(x-1)(x-3)f(x)]' = 2(x-3)f(x) - 1 \quad (2). \text{ Έστω } (x-3)f(x) = g(x) \text{ τότε η}$$

$$(2) \text{ γίνεται } [(x-1)g(x)]' = 2g(x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$g(x) + (x-1)g'(x) = 2g(x) - 1 \Leftrightarrow (x-1)g'(x) - g(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)g'(x) - g(x)}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{x-1} \right)' = \left(\frac{1}{x-1} \right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{g(x)}{x-1} = \frac{1}{x-1} + c, c \in \mathbb{R} \text{ Για } x=2 \text{ προκύπτει } c=0 \text{ άρα}$$

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow (x-3)f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

Σωστή απάντηση Γ.

Ερωτήσεις Σωστό - Λάθος

1. Σ	2. Λ	3. Λ	4. Λ	5. Λ	6. Σ	7. Λ	8. Λ	9. Λ	10. Σ
11. Λ	12. Σ	13. Σ	14. Σ						

1ο Κριτήριο αξιολόγησης έως και συνέπειες ΘΜΤ

Θέμα Α

Α1. α) Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$ είναι συνεχής στο

$[0, 5]$ έχει δύο ρίζες στο διάστημα αυτό, τις $x = 1$

και $x = 3$, όμως $f(0)f(5) = 24 > 0$

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 1 \leq x < 3 \\ -x + 4, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$ έχει 2

ρίζες στο $[1, 5]$ τις 2 και 4, είναι $f(1)f(5) < 0$

όμως δεν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό.

($\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1 \neq f(3) = 1$)



β) Παράδειγμα 1

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \in \left[-1, \frac{1}{4}\right) \\ x - \frac{1}{4}, & x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}$, παρατηρούμε ότι:

Δεν είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ($\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} f(x) = \frac{31}{16} \neq f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$)

- Δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$

- $f(-1) = 1 \neq \frac{3}{4} = f(1)$ Όμως στο $x_0 = 0$ ισχύει: $f'(0) = 0$

Παράδειγμα 2

Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$ είναι συνεχής στο $[1, 4]$ παραγωγίσιμη στο

$(1, 4)$, $f(1) = 0 \neq f(4) = 3$, όμως $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 4 = 0 \Leftrightarrow \xi = 2$

A2. Για τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ είναι $f'(x) = 0$ για κάθε

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, όμως η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, όπως διαπιστώνουμε και στο διπλανό σχήμα.

A3. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ στ) Σ ζ) Σ η) Σ θ) Λ ι) Λ

Θέμα Β

B1. Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (1), τότε $x_1^7 < x_2^7$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $x_1^7 + x_1 < x_2^7 + x_2 \Leftrightarrow$

$x_1^7 + x_1 + 1 < x_2^7 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^7 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^7 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$. Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών και η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικός $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(\rho) = 0$.

B2. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 5x - 2 \Leftrightarrow x^7 + x + 1 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^7 - 4x + 3 = 0$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$. Έστω $g(x) = x^7 - 4x + 3$, $x \in [0,1]$.

Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$, οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano για τη g στο $[0,1]$ και γι αυτό παραγοντοποιούμε τη g . Με βάση το διπλανό σχήμα Horner είναι

1	0	0	0	0	0	-4	3	$\rho = 1$
	1	1	1	1	1	1	-3	
1	1	1	1	1	1	-3	0	

$$g(x) = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 3). \text{ Έστω}$$

$$h(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 3, x \in [0,1].$$

$$\text{Είναι } h(0) = -3, h(1) = 3, \text{ δηλαδή } h(0)h(1) < 0.$$

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$. Είναι

$$g(x) = (x-1)h(x) \text{ οπότε } g(x_0) = (x_0-1)h(x_0) = 0.$$

B3. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f , άρα $A_{f^{-1}} = f(A) = \mathbb{R}$.

B4. Έστω ότι $f^{-1}(3) = a$ τότε $f(f^{-1}(3)) = f(a) \Leftrightarrow f(a) = 3 \Leftrightarrow$

$$f(a) = f(1) \Leftrightarrow a = 1 \text{ οπότε } f^{-1}(3) = 1. \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ (3). Με παραγωγή της σχέσης (3) κατά μέλη έχουμε}$$

$$[f^{-1}(x^7 + x + 1)]' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(x^7 + x + 1) \cdot (x^7 + x + 1)' = 1 \Leftrightarrow$$

$$(f^{-1})'(x^7 + x + 1) \cdot (7x^6 + 1) = 1 \text{ (4).}$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ από τη σχέση (4) έχουμε } (f^{-1})'(3) \cdot 8 = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{8}.$$

Η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_1 = 3$ έχει εξίσωση:

$$y - f^{-1}(3) = (f^{-1})'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{8}(x - 3) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}$$

B5. Έστω $M(x(t), y(t))$, τότε $y(t) = \frac{1}{8}x(t) + \frac{5}{8}$ με $x'(t) = 8 \text{ cm/sec}$.

α) Είναι $d = (OM) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x^2(t) + \left(\frac{1}{8}x(t) + \frac{5}{8}\right)^2} =$

$$\sqrt{\frac{65}{64}x^2(t) + \frac{10}{64}x(t) + \frac{25}{64}} \Leftrightarrow$$

$$d = (OM) = \sqrt{\frac{5}{64}(13x^2(t) + 2x(t) + 5)} = \frac{1}{8}\sqrt{5(13x^2(t) + 2x(t) + 5)}.$$

Επομένως $d(t) = \frac{1}{8}\sqrt{5(x^2(t) + 2x(t) + 5)}$, $t \geq 0$. Η d είναι παραγωγίσιμη με

$$\text{παράγωγο } d'(t) = \frac{5}{8} \frac{2x(t)x'(t) + 2x'(t)}{2 \cdot \sqrt{5(x^2(t) + 2x(t) + 5)}} = \frac{5x'(t)(x(t) + 1)}{8 \cdot \sqrt{5(x^2(t) + 2x(t) + 5)}}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0) = 3$ και $y(t_0) = 1$, είναι:

$$d'(t_0) = \frac{5x'(t_0)(x(t_0) + 1)}{8 \cdot \sqrt{5(x^2(t_0) + 2x(t_0) + 5)}} = \frac{5 \cdot 8(3 + 1)}{8 \cdot \sqrt{5(3^2 + 6 + 5)}} = \frac{20}{\sqrt{100}} = \frac{20}{10} = 2 \text{ cm/sec}$$

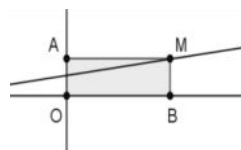
β) Το ορθογώνιο OAMB έχει εμβαδό

$$E = (OA)(OB) = y(t)x(t) = \left(\frac{1}{8}x(t) + \frac{5}{8}\right)x(t) =$$

$$\frac{1}{8}x^2(t) + \frac{5}{8}x(t). \text{ Είναι } E(t) = \frac{1}{8}x^2(t) + \frac{5}{8}x(t), t \geq 0 \text{ με}$$

$$E'(t) = \frac{1}{8} \cdot 2x(t)x'(t) + \frac{5}{8}x'(t). \text{ Τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ είναι}$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{4}x(t_0)x'(t_0) + \frac{5}{8}x'(t_0) = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 8 + \frac{5}{8} \cdot 8 = 11 \text{ cm}^2/\text{sec}$$



Θέμα Γ

Γ1. Έστω ότι η f' δεν αντιστρέφεται. Τότε θα (α, β) υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ τέτοια ώστε $f'(\alpha) = f'(\beta)$. Η f' είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα η εξίσωση

$f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο I που είναι άτοπο. Επομένως η f' αντιστρέφεται.

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$, $f(0) = f(1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$: $f'(\xi_1) = 0$. Επειδή η f' αντιστρέφεται είναι 1-1, οπότε το ξ_1 είναι μοναδικό.

Γ3. Έστω ότι η f είχε τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Η f είναι συνεχής στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$, $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\rho_1, \rho_2), x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα η εξίσωση $f''(x) = 0$ τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2) , που είναι άτοπο αφού $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Είναι $f'(x) + (2x-1)f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-x}f'(x) + (2x-1)e^{x^2-x}f(x) = 0$

Έστω $g(x) = e^{x^2-x}f(x)$, $x \in [0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $g'(x) = e^{x^2-x}f'(x) + (2x-1)e^{x^2-x}f(x)$. Επειδή $g(0) = f(0) = f(1) = g(1)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{\xi^2-\xi}f'(\xi) + (2\xi-1)e^{\xi^2-\xi}f(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) + (2\xi-1)f(\xi) = 0$$

Γ5. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ισχύει το θεώρημα ελάχιστης – μέγιστης τιμής άρα υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [0,1]$

Άρα $m \leq f\left(\frac{1}{3}\right) \leq M$ (1), $m \leq f(0,2) \leq M$ (2), $m \leq f\left(\frac{1}{e}\right) \leq M$ (3). Με

πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1), (2) και (3) έχουμε:

$$3m \leq f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right) \leq 3M \Leftrightarrow m \leq \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3} \leq M. \text{ Επειδή ο}$$

αριθμός $\frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f , υπάρχει

$$x_0 \in [0,1] \text{ τέτοιο, ώστε } f(x_0) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0,2) + f\left(\frac{1}{e}\right)}{3}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f'(x)f(x) - e^{-x}(f(x) - f'(x)) - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow$

$$2f'(x)f(x) - 2(e^{-x}f(x) - e^{-x}f'(x)) - 2e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x) + 2f(x)e^{-x} + e^{-2x})' = 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x)e^{-x} + e^{-2x} = c \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + e^{-x})^2 = c. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } (f(0)+1)^2 = c \Leftrightarrow c=9 \text{ άρα}$$

$$(f(x) + e^{-x})^2 = 9 \quad (1). \text{ Έστω } g(x) = f(x) + e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Επειδή } g^2(x) = 9 \neq 0$$

είναι $g(x) \neq 0$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0) = 3 > 0$ άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται:

$$(f(x) + e^{-x})^2 = 9 \Leftrightarrow g^2(x) = 9 \Leftrightarrow g(x) = 3 \Leftrightarrow f(x) + e^{-x} = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 - e^{-x}$$

Δ2. εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι και 1-1, οπότε δεν υπάρχουν $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\gamma < \delta$ τέτοια, ώστε $f(\gamma) = f(\delta)$. Άρα δεν υπάρχει διάστημα $[\gamma, \delta]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f .

Δ3. Αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$ τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = e^{-x}$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{-\xi} = \frac{\beta - e^{-\beta} - \alpha + e^{-\alpha}}{\beta - \alpha} = \frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow -\alpha > -\xi > -\beta \Leftrightarrow e^{-\beta} < e^{-\xi} < e^{-\alpha} \Leftrightarrow e^{-\beta} < \frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{\beta - \alpha} < e^{-\alpha} \Leftrightarrow$$

$$e^{-\beta}(\beta - \alpha) < e^{-\alpha} - e^{-\beta} < e^{-\alpha}(\beta - \alpha). \text{ Όμοια αν } \alpha > \beta.$$

Δ4. Είναι : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-e^{-x} + e^{-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - e^{-x} - (3 - e^{-1})}{x-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Δ5. Είναι : $f(f(x_0)) = \frac{3e-1}{e} = 3 - e^{-1} \Leftrightarrow f(f(x_0)) = f(1) \Leftrightarrow f(x_0) = 1.$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - e^{-x}) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - e^{-x}) = 3,$$

η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 3).$$

Επειδή $1 \in f(A)$ και $f|_{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1$.

2ο Κριτήριο αξιολόγησης έως και τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

Θέμα Α

A1. Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})},$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Στο $x_0 = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, δηλαδή η f δεν

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

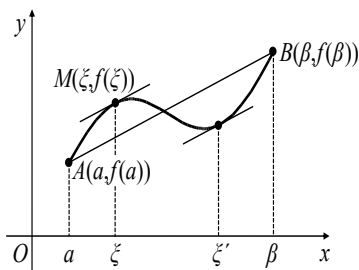
A2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,

$\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η

εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



A3. α) Ψευδής

β) Εφαρμόζοντας ΘΜΤ για την f στο $[0, 3]$, έχουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 3)$

τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Η εφαπτομένη στο $x_0 \in (0, 3)$ έχει

κλίση $\lambda = f'(x_0) = \text{εφ}\omega \Leftrightarrow \text{εφ}\omega = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \omega = 30^\circ$

A4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

B1. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 1) = 2 = f(1)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 2$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, η f είναι συνεχής στο $x = 1$. Επιπλέον η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1)$ και $(1, 2]$ ως πολυωνυμική, οπότε η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = 3 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3, \text{ οπότε η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $x = 1$ με $f'(1) = 3$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f'(x) = 3x^2$ και στο $(1,2)$ με $f'(x) = 2x + 1$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$. Επομένως για την f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο $[0,2]$ άρα

$$\text{υπάρχει } \xi \in (0,2) \text{ για τα οποία } f'(\xi) = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Αν } \xi \in (0,1) \text{ τότε } f'(\xi) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3\xi^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \xi = \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ δεκτή.}$$

$$\text{Αν } \xi \in (1,2) \text{ τότε } f'(\xi) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\xi + 1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\xi = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{4} < 1 \text{ απορρίπτεται.}$$

B2. Αν $f(x) = x^2 + x$, $x > 1$, τότε

$$A_{f,g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x > 0 / \ln x > 1\} = \{x > 0 / x > e\} = (e, +\infty)$$

και $(f \circ g)(x) = \ln^2 x + \ln x$. Αν $f(x) = x^3 + 1$, $x \leq 1$, τότε

$$A_{f,g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x > 0 / \ln x \leq 1\} = \{x > 0 / x \leq e\} = (0, e]$$

$$\text{και } (f \circ g)(x) = \ln^3 x + 1. \text{ Άρα } (f \circ g)(x) = \begin{cases} \ln^3 x + 1, x \in (0, e] \\ \ln^2 x + \ln x, x \in (e, +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{B3. α) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty$$

$$\text{β) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

B4. Επειδή το σημείο $M(a, f(a))$, $a > 1$ απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ταχύτητα $0,5 \text{ cm/sec}$, είναι $a'(t) = 0,5 \text{ cm/sec}$. Η ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από τον άξονα $x'x$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του, οπότε $y'(t) = (f(a(t)))' = f'(a(t))a'(t) = (2a(t) + 1)a'(t)$

Τη χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το σημείο $A(3,12)$, είναι $\alpha(t_0) = 3$,
οπότε $y'(t_0) = (2\alpha(t_0) + 1)\alpha'(t_0) = 7 \cdot 0,5 = 3,5 \text{ cm/sec}$

Θέμα Γ

$$\begin{aligned} \Gamma 1. & \text{Είναι } [e^{f(x)} f'(x) - e^{f(x)}]^2 - 2[e^{f(x)} f'(x) - e^{f(x)}](x-1) \leq -(x-1)^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [e^{f(x)} f'(x) - e^{f(x)}]^2 - 2[e^{f(x)} f'(x) - e^{f(x)}](x-1) + (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [e^{f(x)} f'(x) - e^{f(x)} - x + 1]^2 \leq 0 \Leftrightarrow [e^{f(x)} f'(x) - e^{f(x)} - x + 1]^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & e^{f(x)} f'(x) + 1 = e^{f(x)} + x \Leftrightarrow [e^{f(x)} + x]' = e^{f(x)} + x \Leftrightarrow e^{f(x)} + x = ce^x, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \\ & e^{f(x)} = ce^x - x. \text{ Για } x = 0 : e^{f(0)} = ce^0 \Leftrightarrow c = 1 \end{aligned}$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\ln x < x < e^x$ άρα $e^x > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $e^{f(x)} = e^x - x \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\Gamma 2. \text{Είναι } f(x) = \ln(e^x - x) = \ln(e^x - \ln e^x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Έστω οι συναρτήσεις $n(x) = x - \ln x$, $x > 0$ και $k(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης της k με την n έχουμε:

$$D_{n \circ k} = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_k \\ k(x) \in D_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 0 \end{array} \right\} = \mathbb{R}. \text{ Η } n \circ k \text{ έχει τύπο}$$

$$(n \circ k)(x) = n(k(x)) = e^x - \ln e^x = e^x - x.$$

Έστω και η συνάρτηση $h(x) = \ln x$, $x > 0$

$$\text{Είναι } D_{h \circ (n \circ k)} = \left\{ \begin{array}{l} x \in D_{n \circ k} \\ (n \circ k)(x) \in D_h \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ e^x - x > 0 \end{array} \right\} = \mathbb{R} \text{ και}$$

$$(h \circ (n \circ k))(x) = \ln((n \circ k)(x)) = \ln(e^x - x) = f(x)$$

$$\Gamma 3. \text{ Η } f \text{ δύο φορές παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με παράγωγο } f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{και δεύτερη παράγωγο } f''(x) &= \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \\ &= \frac{\cancel{e^{2x}} - xe^x - \cancel{e^{2x}} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $f''(0) = 1$, επομένως το μηδέν είναι η μία ρίζα.

Τώρα θα αποδείξουμε την ύπαρξη άλλης μίας ρίζας με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Η εξίσωση είναι $f''(x) = 1 \Leftrightarrow f''(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow (f'(x) - x)' = 0$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f'(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο $g'(x) = f''(x) - 1$, με $g(0) = g(1) = 0$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 1$.

2^{ος} τρόπος:

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f' στο $[0, 1]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε } f''(\xi) = \frac{f'(1) - f'(0)}{1 - 0} = 1$$

Γ4. Η $\varphi(x) = -x^{2022}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$\varphi'(x) = -2022x^{2021}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Είναι $\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow -2022x^{2021} < 0 \Leftrightarrow x^{2021} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Είναι $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow -2022x^{2021} > 0 \Leftrightarrow x^{2021} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Είναι $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -2022x^{2021} = 0 \Leftrightarrow x^{2021} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Επίσης $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ και αφού $e^x - x > 0$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.

Επομένως για $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 < \varphi'(x)$ και για $x > 0$ είναι

$f'(x) > 0 > \varphi'(x)$. Επομένως μοναδικό πιθανό σημείο που δέχονται κοινή

εφαπτομένη είναι το μηδέν αφού $x < 0$ είναι $f'(0) = 0 = \varphi'(0)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, 0)$ είναι $\varepsilon_1: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = f(0) = 0$

Η εφαπτομένη της C_φ στο $(0, 0)$ είναι $\varepsilon_2: y - \varphi(0) = \varphi'(0)x \Leftrightarrow y = \varphi(0) = 0$

Άρα έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$.

Θέμα Δ

Δ1. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $X \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta_{\mu x}| \leq |x|$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε για $x > 0$ είναι $|\eta_{\mu x}| < x \Leftrightarrow -x < \eta_{\mu x} < x$ οπότε

$$x > \eta_{\mu x} \Leftrightarrow x - \eta_{\mu x} > 0 \text{ και } e^x > e^{\eta_{\mu x}} \Leftrightarrow e^x - e^{\eta_{\mu x}} > 0, \text{ άρα } f(x) > 0.$$

Δ2. Έστω $f(t) = e^t$. Η f είναι συνεχής στο $[\eta_{\mu x}, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(\eta_{\mu x}, x)$ με $f'(t) = e^t$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Μ.Τ. οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (\eta_{\mu x}, x) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\eta_{\mu x}) - f(x)}{\eta_{\mu x} - x} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^{\eta_{\mu x}} - e^x}{\eta_{\mu x} - x}$$

$$\text{Δ3. Είναι } \eta_{\mu x} < \xi < x \Leftrightarrow e^{\eta_{\mu x}} < e^\xi < e^x \Leftrightarrow e^{\eta_{\mu x}} < \frac{e^x - e^{\eta_{\mu x}}}{x - \eta_{\mu x}} < e^x.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\eta\mu x} \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0, \\ u \rightarrow 0}} e^u = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} e^x$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = 1.$$

$$\Delta 4. \text{ Είναι } f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{\eta\mu x} = x - \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$e^x - e^{\eta\mu x} - x + \eta\mu x = 0. \text{ Έστω } g(x) = e^x - e^{\eta\mu x} - x + \eta\mu x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ με $\rho_1 < \rho_2$. Η g είναι συνεχής στο

$[\rho_1, \rho_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με

$$g'(x) = e^x - \text{συν}x e^{\eta\mu x} - 1 + \text{συν}x = (e^x - 1) + \text{συν}x (1 - e^{\eta\mu x})$$

Επειδή $g(\rho_1) = g(\rho_2) = 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Όμως

$$g'(\xi) = (e^\xi - 1) + \text{συν}\xi (1 - e^{\eta\mu\xi}) > 0, \text{ γιατί } \xi > \frac{\pi}{2} > 0 \text{ οπότε}$$

$e^\xi > e^0 = 1 \Leftrightarrow e^\xi - 1 > 0$, $\text{συν}\xi < 0$ και $\eta\mu\xi > 0 \Leftrightarrow e^{\eta\mu\xi} > 1 \Leftrightarrow 1 - e^{\eta\mu\xi} < 0$, άρα η εξίσωση $g'(\xi) = 0$ είναι αδύνατη. Οπότε η εξίσωση $f(x) = 1$ δεν έχει δύο ρίζες

στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ άρα έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα αυτό.

$$\Delta 5. \alpha) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = +\infty \text{ γιατί για } x \in (0, +\infty) \text{ είναι:}$$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ από}$$

το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{\eta\mu x}}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{e^{\eta\mu x}}{e^x} \right)}{x \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{x} \cdot \frac{1 - e^{\eta\mu x - x}}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}} \right] = +\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\eta\mu x - x} \stackrel{\eta\mu x - x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

27**Μονοτονία συνάρτησης****Γραφική παράσταση f και f'**

26. Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της f' .

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(-1, 0)$ η C_1 είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, άρα $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Όμως από τη $C_f \equiv C_2$ διαπιστώνουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$ που είναι άτοπο. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της f' .

27. Έστω ότι η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της f' . Για $x > 1$ βλέπουμε ότι η C_2 είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, άρα $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Όμως από τη $C_f \equiv C_1$ διαπιστώνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ που είναι άτοπο. Επομένως η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της f' .

28. Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_1 της f' .

Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $(0, +\infty)$ η C_1 είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, άρα $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Όμως από τη $C_f \equiv C_2$ διαπιστώνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ που είναι άτοπο. Άρα η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f και η C_2 της f' .

Αυξημένης δυσκολίας

29. Η καμπύλη C_5 δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο έστω $(x_0, 0)$, $x_0 < 0$ άρα είναι γραφική παράσταση παραγώγου συνάρτησης.

Η μοναδική καμπύλη που παριστάνει γραφική παράσταση συνάρτησης παραγωγίσιμης εκτός από ένα σημείο είναι η C_3 .

Άρα η C_5 παριστάνει την γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης που παριστάνει η C_3 .

- Επίσης η C_6 δεν είναι συνεχής άρα είναι γραφική παράσταση παραγώγου συνάρτησης.

Η C_6 τέμνει τον άξονα $x'x$ σε τρία σημεία με τετμημένες $x_1, 0, x_2$ με

$x_1 < 0 < x_2$. Η C_6 βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα $(-\infty, x_1)$, $(0, x_2)$ και πάνω από τον άξονα $x'x$ στα διαστήματα $(x_1, 0)$ και $(x_2, +\infty)$. Επομένως η γραφική παράσταση της συνάρτησης που αντιστοιχεί η C_6 αλλάζει μονοτονία σε τρία σημεία οπότε είναι η C_4 .

Άρα η C_6 παριστάνει την γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης που παριστάνει η C_4 .

• Έστω ότι η C_2 παριστάνει συνάρτηση και η C_1 παριστάνει την παράγωγό της.

Η C_1 βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ σε δύο διαστήματα και πάνω από τον άξονα $x'x$ σε άλλα δύο διαστήματα.. Άρα η συνάρτηση που παριστάνεται από τη C_2 αλλάζει τρεις φορές μονοτονία άτοπο.

Επομένως η C_2 παριστάνει την γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης που παριστάνει η C_1 .

30. Αφού η g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης είναι $g(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η f' παριστάνεται είτε από την C_2 είτε από την C_4 .

Έστω ότι η C_2 παριστάνει την f' , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x < 0$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα $f \nearrow (-\infty, 0]$ και $f \searrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0$ πράγμα άτοπο. Άρα η f' παριστάνεται από την C_4 . Επειδή $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$ τότε η h ορίζεται για κάθε $x \neq 0$, άρα παριστάνεται είτε από την C_1 είτε από την C_3 . Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

και αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ τότε το πρόσημο της h' είναι το ίδιο με την f' . Άρα $h'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $h \searrow (-\infty, 0)$ και $h \nearrow (0, +\infty)$. Επομένως η h παριστάνεται από την C_1 .

Μελέτη μονοτονίας

31.α) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$, $\searrow (-\infty, -1]$, $[0, 1]$ και $\nearrow [-1, 0]$, $[1, +\infty)$

β) $f'(x) = \ln x + 1$, $\searrow \left(0, \frac{1}{e}\right]$ και $\nearrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

$$\gamma) f'(x) = \frac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+8}}. \text{ Είναι } f \searrow(-\infty, 2] \text{ και } \nearrow[4, +\infty)$$

$$\delta) f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}, \text{ είναι } \nearrow(-\infty, 1], [3, +\infty) \text{ και } \searrow[1, 2), (2, 3]$$

$$\epsilon) f'(x) = (3x^2-12)e^{x^3-12x}, \nearrow(-\infty, -2], [2, +\infty) \text{ και } \searrow[-2, 2]$$

$$\sigma\tau) f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}, \nearrow(0, \sqrt{e}] \text{ και } \searrow[\sqrt{e}, +\infty)$$

$$\zeta) f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \searrow(-\infty, 0), (0, 1] \text{ και } \nearrow[1, +\infty)$$

$$\eta) f'(x) = \frac{2(x-1)+\ln x}{4x\sqrt{x}}.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $x-1 > 0$, $\ln x > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και $\nearrow[1, +\infty)$. Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $x-1 < 0$, $\ln x < 0$, άρα $f'(x) < 0$ και $\searrow(0, 1]$.

$$32. \alpha) f \nearrow(-\infty, 1], \left[\frac{5}{2}, +\infty\right), \searrow\left[1, \frac{5}{2}\right],$$

$$\beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1 - \sqrt{2-x}) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x^2-2x}+1) = 1 = f(2), \text{ άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 2.$$

$$\text{Για κάθε } x < 2 \text{ είναι } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} > 0 \Rightarrow f \nearrow(-\infty, 2].$$

$$\text{Για κάθε } x > 2 \text{ είναι } f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{\mathcal{Z}'(x-1)}{\mathcal{Z}'\sqrt{x^2-2x}} > 0 \Rightarrow f \nearrow[2, +\infty).$$

$$\gamma) \searrow(-\infty, 1], \nearrow[1, +\infty), \quad \delta) \searrow(-\infty, -3], [0, 3], \nearrow[-3, 0], [3, +\infty)$$

$$33. 3f^2(x)f'(x) - 4f(x)f'(x) + 5f'(x) = e^x + 5 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(3f^2(x) - 4f(x) + 5) = e^x + 5. \text{ Είναι } e^x + 5 > 0 \text{ και}$$

$$3f^2(x) - 4f(x) + 5 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}.$$

34. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) οπότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 άρα

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0) > 0$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 οπότε υπάρχει υποσύνολο Δ του (α, β) , με $x_0 \in \Delta$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αυξημένης δυσκολίας

35. $f'(x) = 6(2x^2 - \lambda x + 2)$, $\Delta = (\lambda - 4)(\lambda + 4)$.

Αν $\lambda < -4$ ή $\lambda > 4$ τότε $\Delta > 0$, η f' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο, άρα η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν $\lambda \in (-4, 4)$ τότε

$$\Delta < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}.$$

Αν $\lambda = 4$ τότε $f'(x) = 12(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αν $\lambda = -4$ τότε

$f'(x) = 12(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq -1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τελικά $\lambda \in [-4, 4]$.

36. Είναι $f'(x) = \frac{\lambda^2 - 4}{(x+1)^2}$. Αν $\lambda = 2$ ή -2 , τότε $f'(x) = 0$ οπότε f σταθερή.

Αν $\lambda \in (-2, 2)$, τότε $f'(x) < 0$, αν $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, τότε $f'(x) > 0$.

Επομένως για $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

37. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x_0]$ $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Ισχύουν οι

υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$. Είναι $0 < \xi < x \Leftrightarrow f'(0) > f'(\xi) > f'(x)$, άρα

$\frac{f(x) - f(0)}{x} > f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) < 0$, οπότε $h'(x) < 0$ στο $(0, x_0]$ επομένως $h \searrow (0, x_0]$.

38. Η g παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$g'(x) = e^{2x} + \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \ln 2$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f

στο $[0, x], x > 0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$. Ομως
 $0 < \xi < x \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$, άρα $\frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0$,
 άρα $g'(x) > 0$ οπότε $g \nearrow (0, +\infty)$.

39.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$g'(x) = \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \frac{f'(x)e^x - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{e^x(f'(x) - f(x))}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0 \text{ Επομένως η } g \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω ότι δεν υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε: $f(\xi) \geq f'(\xi)$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα ισχύει $f(x) < f'(x)$. Τότε η g θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $g(0) < g(2) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{e^0} < \frac{f(2)}{e^2} \Leftrightarrow 4 < 0$ που είναι άτοπο. Άρα υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε $f(\xi) \geq f'(\xi)$.

40. Είναι $f'(x) > (1-x)f''(x) \Leftrightarrow f'(x) - (1-x) \cdot f''(x) > 0$

$$\Leftrightarrow f'(x) + (x-1) \cdot f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)' \cdot f'(x) + (x-1) \cdot (f'(x))' > 0$$

$$\Leftrightarrow [(x-1)f'(x)]' > 0 \quad (1).$$

Θέτουμε $g(x) = (x-1) \cdot f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$$g'(x) = ((x-1)f'(x))' > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}.$$

Αν $x > 1$, τότε $g(x) > g(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, αν $x < 1$, τότε

$$g(x) < g(1) \Leftrightarrow (x-1)f'(x) < 0 \stackrel{x-1 < 0}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0 \text{ άρα } f'(x) > 0, \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής, στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

41. Έστω $g(x) = (x-3)f'(x)$. Είναι $g'(x) > 0$, άρα $g \nearrow \mathbb{R}$.

$$\text{Αν } x > 3 \stackrel{g \nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) > g(3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x) > 0 \stackrel{x-3 > 0}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0, \text{ αν}$$

$x < 3 \Leftrightarrow g(x) < g(3) = 0 \Leftrightarrow (x-3)f'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής, στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

42. Με παραγωγήσιμη κατά μέλη της σχέσης που μας δίνεται έχουμε Είναι $f'(x) = -f'(2-x)(1)$. Από τη σχέση (1) για $x = 1$ έχουμε $f'(1) = 0$. Είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x < 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 1]$ και για κάθε

$x > 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty)$

43. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ και υπάρχει διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$ τέτοιο ώστε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_1$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ_1 , πράγμα άτοπο αφού $f \nearrow \Delta$.

Αντιστρόφως, αν οι ρίζες της $f'(x) = 0$ στο Δ είναι διακριτές τιμές στο Δ (άπειρες ή πεπερασμένες), έστω $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_v, \dots$, τότε μεταξύ των ριζών θα είναι $f'(x) > 0$, η f είναι συνεχής στο Δ άρα $f \nearrow \Delta$.

44.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

Επειδή $f'(x) > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Επειδή $1 < \alpha < \beta$ είναι $f(1) < f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow 0 < f(\alpha) < f(\beta)$, άρα:

$$\begin{cases} f(\alpha)f(\alpha) < f(\alpha)f(\beta) \\ f(\alpha)f(\beta) < f(\beta)f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(\alpha) < f(\alpha)f(\beta) \\ f(\alpha)f(\beta) < f^2(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) < \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} \\ \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} < f(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) < \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} < f(\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Ε.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : f(\xi) = \sqrt{f(\alpha)f(\beta)} \Leftrightarrow f^2(\xi) = f(\alpha)f(\beta)$.

45.α) Είναι $15x + [f'(x)]^2 = 5x^2 \Leftrightarrow [f'(x)]^2 = 5x^2 - 15x = 5x(x-3) > 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$, άρα $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$ οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(3, +\infty)$.

β) Επειδή η f' είναι συνεχής, $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (3, +\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή επιπλέον $f'(5) < 0$, είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (3, +\infty)$

Μονοτονία με χρήση παραγώγων ανώτερης τάξης

46.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2e^{x+1} - 2x - 4$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2e^{x+1} - 2$.

Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x+1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2e^{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow e^{x+1} \geq 1 = e^0 \Leftrightarrow$

$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Επομένως $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, η f' είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$, άρα $f' \nearrow [-1, +\infty)$.

Άρα για κάθε $x > -1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(-1) = 0$, οπότε $f \nearrow [-1, +\infty)$.

Επίσης $f''(x) < 0$ για κάθε $x < -1$, η f' είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ άρα

$f' \searrow (-\infty, -1]$. Επομένως για κάθε $x < -1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(-1) = 0$, άρα $f \nearrow [-1, +\infty)$. Άρα $f \nearrow \mathbb{R}$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2 \ln x + 2 - 2x$ και

δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2 \frac{1-x}{x}$.

Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \frac{1-x}{x} \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Επομένως $f''(x) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$, η f' είναι συνεχής στο $(0, 1]$, άρα

$f' \nearrow (0, 1]$. Άρα για κάθε $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0$, οπότε $f \searrow (0, 1]$.

Επίσης $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 1$, η f' είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα

$f' \searrow [1, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0$, άρα $f \searrow [1, +\infty)$.

Άρα $f \searrow \mathbb{R}$.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 4e^x + 4x - 4$ και

δεύτερη παράγωγο, $f''(x) = 4e^x + 4 > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ οπότε είναι $\nearrow [0, +\infty)$ και

για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$ οπότε είναι $\searrow (-\infty, 0]$.

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = x - 1 + \sin x$ και

δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 1 - \eta \mu x > 0$ για κάθε $x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, άρα $f' \nearrow \mathbb{R}$. Για

κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ οπότε $f \nearrow [0, +\infty)$. Επίσης για κάθε $x < 0$

είναι $f'(x) < f'(0) = 0$ οπότε $f \searrow (-\infty, 0]$.

ε) Η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 6\sin x - 6 + 3x^2$, δευτέρα παράγωγο $f''(x) = 6x - 6\eta\mu x$ και τρίτη παράγωγο

$$f^{(3)}(x) = 6 - 6\cos x > 0 \text{ για κάθε } x \neq 2k\pi, \text{ άρα } f'' \nearrow \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > f''(0) = 0$ οπότε $f' \nearrow [0, +\infty)$.

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ οπότε $f \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < f''(0) = 0$ οπότε $f' \searrow (-\infty, 0]$.

Άρα για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ οπότε $f \nearrow (-\infty, 0]$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

47. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = f(1)$, άρα f συνεχής στο 1.

Για $x < 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0$.

Για κάθε $x > 1$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = (e^{x \ln x} - \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) - \frac{1}{x} \text{ και δευτέρα παράγωγο}$$

$$f''(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1)^2 + e^{x \ln x} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, +\infty).$$

Επομένως για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$. Άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μελέτη μονοτονίας με βοηθητική συνάρτηση

48.α) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}. \text{ Έστω } g(x) = x-1-x \ln x, x > 0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = -\ln x$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$, άρα $g \searrow [1, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 1$ ισχύει $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \searrow (1, +\infty)$.

Για κάθε $0 < x < 1$, είναι $g'(x) > 0$ άρα $g \nearrow (0, 1]$.

Άρα για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ οπότε $f \searrow (0, 1)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2}$. Έστω

$g(x) = x - \ln x - 1, x > 0$. Είναι $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0, 1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, οπότε $g(x) > g(1) = 0$. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε $g(x) > g(1) = 0$. Άρα για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι $g(x) > 0$, οπότε $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{x \sin x - \eta \mu x}{x^2}$.

Έστω $g(x) = x \sin x - \eta \mu x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $g'(x) = -x \eta \mu x < 0, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα $g \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως για κάθε $0 < x < \frac{\pi}{2}$

είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g(x) < g(0) = 0$, άρα $f'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα $f \searrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

49.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln x}{x+1} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1) - x \ln x}{x(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

Επειδή $x > 1$ είναι $x+1 > 2$ και $\ln^2(x+1) > 0$, οπότε το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $(x+1)\ln(x+1) - x \ln x$. Έστω $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \ln x, x \geq 1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$

$$\text{με: } g'(x) = \ln(x+1) + \cancel{(x+1)} \frac{1}{x+1} - \ln x - \cancel{x} \frac{1}{x} = \ln(x+1) - \ln x$$

Είναι $1 < x < x+1$ άρα $\ln x < \ln(x+1) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Για κάθε $x > 1$ είναι

$g(x) > g(1) = 2 \ln 2 > 0$, οπότε $f'(x) > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2 \cdot \frac{1 + \ln x - x}{x}$.

Έστω $g(x) = 1 + \ln x - x$, $x > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = \frac{1-x}{x}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0$, άρα $g \searrow [1, +\infty)$, οπότε $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ στο $(1, +\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα $f \searrow [1, +\infty)$. Για κάθε $0 < x < 1$, είναι $g'(x) > 0$, η g συνεχής στο $(0, 1]$ άρα $g \nearrow (0, 1]$. Επομένως για $0 < x < 1$ ισχύει $g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ άρα $f \searrow (0, 1]$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, k)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{1 - \frac{k}{x} - \ln x + \ln k}{(x-k)^2}$.

Έστω $g(x) = 1 - \frac{k}{x} - \ln x + \ln k$, $x \in (0, k]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, k]$ με $g'(x) = \frac{k-x}{x^2}$. Είναι $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, k)$, η g συνεχής στο $(0, k]$ άρα $g \nearrow (0, k]$. Επομένως για κάθε $0 < x < k$ είναι $g(x) < g(k) = 0$, άρα $f'(x) < 0$ στο $(0, k)$ επομένως $f \searrow (0, k)$.

Εύρεση προσήμου

50.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = 2 \ln(x+1) - 2x \text{ και δεύτερη παράγωγο } f''(x) = -\frac{2x}{x+1} < 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in [0, +\infty)$. Η f' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, άρα $f' \searrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$, η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα $f \searrow [0, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \leq f(0) = -5 < 0$, άρα $f(x) < 0$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = 1 - 2x - e^x \text{ και δεύτερη παράγωγο } f''(x) = -2 - e^x < 0 \Rightarrow f' \searrow [0, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$, άρα $f \searrow [0, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο

$f'(x) = 2e^x + 2x - 2$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = 2e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \nearrow [0, +\infty)$. Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$,

άρα $f \nearrow [0, +\infty)$. Επομένως Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq f(0) = 5 > 0$.

δ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x) = e^x + 18x^5 + 4x - 1$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = e^x + 90x^4 + 4 > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$,

οπότε $f \nearrow [0, +\infty)$. Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$,

οπότε $f(x) > f(0) = 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

ε) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με παράγωγο $f'(x) = \chi_{\text{ημ}x} > 0$ για κάθε

$x \in (0, \pi)$, άρα $f \nearrow [0, \pi]$. Για κάθε $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 = f(0) < f(x) < f(\pi)$.

στ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$f'(x) = \frac{1}{x} + v > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$, οπότε για $x > 1$

είναι $f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$

51.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με παράγωγο

$f'(x) = \eta_{\mu x}(e^{\sin x} - \sin x - 1)$. Έστω $g(x) = e^{\sin x} - \sin x - 1$, $x \in [0, \pi]$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x + 1$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x =$

0 , οπότε για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $e^{\sin x} - \sin x - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ και

επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό.

β) Είναι $\frac{5\pi}{9} > 0$, άρα $f\left(\frac{5\pi}{9}\right) > f(0) = \frac{1}{2} + e > 0$.

γ) $0 < \frac{1}{2} < 1 < \pi$ και $f \nearrow$ στο $[0, \pi]$, άρα $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1)$.

Αυξημένης δυσκολίας

52.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + 2e^{2x} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β) $-\frac{1}{100} < 0 < \frac{1}{100} \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{100}\right) < f(0) < f\left(\frac{1}{100}\right) \Leftrightarrow f\left(-\frac{1}{100}\right) < 0 < f\left(\frac{1}{100}\right)$

γ) Έστω $g(x) = x^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{\ln x}{2x}}$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = e^{\frac{\ln x}{2x}} \frac{1 - \ln x}{2x^2} < 0$ για κάθε $x > e$, άρα $g \searrow [e, +\infty)$. Είναι

$$5 < 10 < 15 \stackrel{g \searrow}{\Leftrightarrow} g(5) > g(10) > g(15) \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{10}} > 10^{\frac{1}{20}} > 15^{\frac{1}{30}} \Leftrightarrow \sqrt[10]{5} > \sqrt[20]{10} > \sqrt[30]{15} \Leftrightarrow f(\sqrt[10]{5}) > f(\sqrt[20]{10}) > f(\sqrt[30]{15})$$

53.α) Επειδή $f''(x) \neq 0$ και η f'' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν $f''(x) > 0$, τότε $f' \nearrow [\alpha, \beta]$, ενώ αν $f''(x) < 0$, τότε $f' \searrow [\alpha, \beta]$.

Άρα η f' είναι γνησίως μονότονη.

β) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle άρα υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$. Είναι $f''(\alpha) > 0$ άρα $f''(x) > 0$ στο $[\alpha, \beta]$. Τότε για κάθε

$$\alpha < x < x_1 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \searrow [\alpha, x_1] \text{ οπότε } f(\alpha) > f(x) \Rightarrow f(x) < 0.$$

Για κάθε $x_1 < x < \beta \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1) < f'(x) < f'(\beta) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [x_1, \beta]$, οπότε $f(x_1) < f(x) < f(\beta) = 0$.

Σύνολο τιμών

54.α) $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

$$f(A) = \mathbb{R}.$$

β) $f'(x) = 4x^3 - 4$, $f' \searrow (-\infty, 1]$ και $\nearrow [1, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f(1) = 3 \text{ άρα } f(A) = [3, +\infty)$$

γ) $f'(x) = -\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} < 0 \Rightarrow f' \searrow \mathbb{R}.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^{2x^0}}{e^{2x^0} + 1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x} - 1}{1 + e^{-2x}} = -1, \text{ άρα } f(A) = (-1, 1)$$

$$\delta) f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}, f \searrow (-\infty, -1], [1, +\infty) \text{ και } \nearrow [-1, 1],$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, f(-1) = -\frac{1}{2}, f(1) = \frac{1}{2}, \text{ άρα } f(A) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\epsilon) f'(x) = \frac{1}{x} + 1 - \eta\mu x > 0, \text{ αφού } 1 - \eta\mu x \geq 0 \text{ και } \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα}$$

$$f \nearrow (0, +\infty). \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + x \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) \right) = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) \text{ οπότε από το}$$

$$\text{Κριτήριο Παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0, \text{ άρα } f(A) = \mathbb{R}.$$

$$\sigma\tau) f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(A) = \mathbb{R}.$$

55.α) Είναι $f'(x) = \ln x$. Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$.

$$\beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\ln x - 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty. \text{ Στο διάστημα } \Delta_1 = (0, 1] \text{ είναι}$$

$$f(\Delta_1) = [0, 1] \text{ και στο } \Delta_2 = [1, +\infty) \text{ είναι } f(\Delta_2) = [0, +\infty), \text{ οπότε}$$

$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, +\infty).$$

56. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(t) = \frac{8t^3(t^4+1) - 8t^7}{(t^4+1)^2} = \frac{8t^3}{(t^4+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } t > 0. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο}$$

$$[0, +\infty) \text{ άρα } f \nearrow [0, +\infty). \text{ Επομένως οι μετοχές της εταιρείας συνεχώς}$$

αυξάνονται. Επειδή f συνεχής και $f \nearrow [0, +\infty)$ είναι

$f([0, +\infty)) = [f(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)] = [f(0), 2f(0))$ αφού $f(0) = 2$ και

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2t^4}{t^4 + 1} + 2 \right) = 4 = 2f(0) \text{ γιατί } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^4}{t^4 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{t^4}} = 2$$

Άρα οι μετοχές της εταιρείας συνεχώς αυξάνονται χωρίς να ξεπερνούν το διπλάσιο της αρχικής αξίας.

Αυξημένης δυσκολίας

57.α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$, άρα f συνεχής στο 0 και επειδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{x \sin x - \eta \mu x + x^2}{x^2}. \text{ Έστω } g(x) = x \sin x - \eta \mu x + x^2, x \in \mathbb{R}. \text{ Η } g \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = -x \eta \mu x + 2x = x(2 - \eta \mu x)$. Για

κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$, οπότε $g(x) > g(0) = 0$, άρα

$f'(x) > 0$ επομένως $f \nearrow (0, +\infty)$. Για $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$,

οπότε $g(x) > g(0) = 0$, άρα $f'(x) > 0$ επομένως $f \nearrow (-\infty, 0)$. Είναι

$$\left| \frac{\eta \mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) \text{ οπότε από το}$$

Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ επομένως } f(A) = \mathbb{R}.$$

58.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = e^{e^x \ln x} \cdot e^x \cdot \frac{x \ln x + 1}{x}. \text{ Έστω } g(x) = x \ln x + 1, x > 0. \text{ Η } g \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = \ln x + 1, x > 0$.

Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, $g'(x) > 0$ για κάθε $x > \frac{1}{e}$, $g'(x) < 0$ για κάθε

$$0 < x < \frac{1}{e} \text{ οπότε } g \nearrow \left[\frac{1}{e}, +\infty \right) \text{ και } g \searrow \left[\frac{1}{e}, +\infty \right).$$

Επομένως για κάθε $x > \frac{1}{e}$ είναι $g(x) > g\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow g(x) > 1 - \frac{1}{e} > 0$ άρα

$f'(x) > 0$. Επίσης για κάθε $0 < x < \frac{1}{e}$ είναι $g(x) > g\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow g(x) > 1 - \frac{1}{e} > 0$

άρα $f'(x) > 0$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα $f \nearrow (0, +\infty)$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x \cdot e^x} \stackrel{u = \ln x \cdot e^x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+, \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0,$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln x \cdot e^x} \stackrel{u = \ln x \cdot e^x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow +\infty}} e^u = +\infty$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, +\infty)$ οπότε $f(A) = (0, +\infty)$.

59.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x(e^x - 1)}$

Έστω $g(x) = (x-1)e^x + 1, x \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = xe^x$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0$, η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα για κάθε

$x > 0 \stackrel{g'}{\Leftrightarrow} g(x) > g(0) = 0$ οπότε $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε $f \nearrow (0, +\infty)$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ οπότε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{e^x - 1}{x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{e^x - 1}{x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και $f \nearrow A = (0, +\infty)$, είναι $f(A) = (0, +\infty)$.

60. Για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x-1) - x \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2}$. Έστω $g(x) = x - \ln x - 1, x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Είναι

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g'(x) < 0$, για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) > 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Επομένως για $x > 1$ ισχύει $g(x) > g(1) = 0$ και για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g(x) < g(1) = 0$. Επομένως $f'(x) > 0$ σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1), (1, +\infty)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + 1}{1} = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{1} = +\infty. \text{ Στο διάστημα } \Delta_1 = (0, 1) \text{ η } f \text{ είναι}$$

συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (0, 1)$

Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty), \text{ άρα}$$

$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

61. Η f' είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Είναι $f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow [a, \beta]$.

Για κάθε $x \in (a, \xi)$ είναι $f''(x) < f''(\xi) = 0 \Rightarrow f' \searrow [a, \xi]$, οπότε

$$f'(x) < f'(a) = \beta. \text{ Για κάθε } x \in (\xi, \beta) \text{ είναι } f''(x) > f''(\xi) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [\xi, \beta],$$

οπότε $f'(x) < f'(\beta) = \beta$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με παράγωγο

$$g'(x) = f'(x) - \beta < 0 \Rightarrow g \searrow [a, \beta]. \text{ Επομένως } g([a, \beta]) = [\beta(2 - \beta), \alpha(2 - \beta)]$$

62.α) Η αρχική θερμοκρασία είναι $\theta(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ δεκάδες βαθμούς C άρα είναι $\frac{10}{4} = 2,5$ °C.

β) i) Η συνάρτηση θ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $t > 0$ με παράγωγο

$$\theta'(t) = -\frac{-2\eta\mu t + 2t}{(2\sigma\upsilon\nu t + t^2)^2} = -\frac{2(\eta\mu t - t)}{(2\sigma\upsilon\nu t + t^2)^2} < 0 \text{ για κάθε } t > 0 \text{ αφού}$$

$$|\eta\mu t| \leq |t| \stackrel{t>0}{\Leftrightarrow} |\eta\mu t| < t \Leftrightarrow -t < \eta\mu t < t \text{ οπότε } \eta\mu t - t < 0 \text{ για κάθε } t > 0.$$

Η θ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε η θερμοκρασία συνεχώς μειώνεται.

ii) Αφού θ συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, έχει σύνολο τιμών

$$\theta([0, +\infty)) = \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t), \theta(0) \right] = (-\theta(0), \theta(0)] . \text{ (Είναι}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu t + t^2} - \frac{1}{4} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{t}}{2\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t} + t} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t} + t} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{4} = -\theta(0).$$

$$\text{Όμως } \left| \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu t|}{|t|} \leq \frac{1}{|t|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|t|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t} \leq \frac{1}{|t|}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{|t|} = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|t|} \right) \text{ άρα}$$

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{t} = 0$ επομένως

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2\frac{\sigma\upsilon\nu t}{t} + t \right) = +\infty . \text{ Άρα είναι } \theta(t) > -\theta(0) \text{ για κάθε } t \geq 0.$$

Μονοτονία και ανισώσεις

63.α) Έστω $f(x) = \ln(x-1) - x + 2, x \geq 2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο

$[2, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{2-x}{x-1}$. Για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) < 0$, η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ οπότε $f \searrow [2, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 2$ είναι $f(x) < f(2) \Leftrightarrow \ln(x-1) - x + 2 < 0$.

β) Έστω $f(x) = e^x(x+1) - 1, x \geq 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

παράγωγο $f'(x) = e^x(x+2) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+1) - 1 > 0$

γ) $f(x) = e^x - ex$, $x \in [1, +\infty)$, Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = e^x - e > 0$ για κάθε $x > 1$, άρα $f \nearrow [1, +\infty)$

Επομένως για κάθε $x > 1 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow e^x > ex$.

δ) Έστω $f(x) = x \sin x - \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με παράγωγο $f'(x) = -x \eta \mu x$ οπότε $f'(x) < 0$ στο $(0, \pi)$ άρα $f \searrow [0, \pi]$.

Επομένως για κάθε $0 < x < \pi$ ισχύει $f(\pi) < f(x) < f(0) \Rightarrow x \sin x < \eta \mu x$

ε) Έστω $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ οπότε $f \nearrow (0, +\infty)$.

$x > 1 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{x-1}{x}$.

η) Είναι $e^x < (1+x)^{1+x} \Leftrightarrow \ln e^x < \ln(1+x)^{1+x} \Leftrightarrow x < (1+x) \ln(1+x)$, $x > 0$.

Έστω $f(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$, $x \in [0, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο

$[0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \ln(1+x) + (1+x) \frac{1}{1+x} - 1 = \ln(1+x) > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε $f \nearrow [0, +\infty)$.

$x > 0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow (1+x) \ln(1+x) - x > 0 \Leftrightarrow (1+x) \ln(1+x) > x$.

64.α) Έστω $f(x) = \sin x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$, $x \geq 0$. Η f είναι τρεις φορές

παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = -\eta \mu x + x - \frac{x^3}{6}$,

δεύτερη παράγωγο $f''(x) = -\sigma \nu x + 1 - \frac{x^2}{2}$ και τρίτη παράγωγο

$f^{(3)}(x) = \eta \mu x - x < 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε $f'' \searrow [0, +\infty)$. Επομένως για κάθε

$x > 0$ είναι $f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow f' \searrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(0) = 0$ οπότε $f \searrow [0, +\infty)$. Άρα για κάθε $x > 0$

είναι $f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow \sin x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

β) Έστω $f(x) = x + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο $f'(x) = 1 + \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$. Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $f'(x) > 0$ γιατί $1 - \eta\mu x > 0$, $\sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $f \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως για κάθε $0 < x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(0) < f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, άρα

$$f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow x + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 1.$$

γ) Έστω $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$, $x \in [0, +\infty)$. Η f είναι τρεις φορές

παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, δεύτερη παράγωγο $f''(x) = e^x - 1 - x$ και τρίτη παράγωγο $f^{(3)}(x) = e^x - 1 > 0$ άρα $f'' \nearrow [0, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > f''(0) = 0$ οπότε $f' \nearrow [0, +\infty)$. Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ οπότε $f \nearrow [0, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

δ) Έστω $f(x) = 2\ln(\eta\mu x) - \eta\mu^2 x$, $x \in (0, \pi)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$.

Για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, άρα

$$f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0.$$

Επομένως για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $f(x) < 0 \Leftrightarrow 2\ln(\eta\mu x) < \eta\mu^2 x$.

65.α) Έστω $f(x) = x \ln x$, $x > 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \ln x + 1 > 0$ οπότε $f \nearrow (1, +\infty)$. Επομένως για κάθε

$$1 < \alpha < \beta \text{ είναι } f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \beta \ln \beta < \alpha \ln \alpha \Leftrightarrow \frac{\ln \beta}{\alpha} > \frac{\ln \alpha}{\beta}.$$

β) Είναι $\ln(\alpha+1)+\beta > \alpha + \ln(\beta+1) \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)-\alpha > \ln(\beta+1)-\beta$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα } (0, +\infty).$$

$$\text{Είναι } \alpha < \beta \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) - \alpha > \ln(\beta+1) - \beta$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + e^{-2x} - x$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = -e^{-x} - 2e^{-2x} - 1 < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}$.

Επομένως για κάθε $\alpha < \beta \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow$

$$e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} - \alpha > e^{-\beta} + e^{-2\beta} - \beta \Leftrightarrow e^{-\alpha} - e^{-\beta} + e^{-2\alpha} - e^{-2\beta} - (\alpha - \beta) > 0$$

Αυξημένης δυσκολίας

66.α) Έστω $f(x) = x \ln^2 x + 2x + 2 - 2x \ln x - e^{-x}$, $x > 0$. Η f είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \ln^2 x + e^{-x} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$

. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2 \ln x}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{-\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 + 0 + 2 - 0 - 1 = 1. \text{ Επίσης}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln^2 x + 2x + 2 - 2x \ln x - e^{-x}) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \ln x (\ln x - 2) + 2x + 2 - e^{-x}] = +\infty. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής και}$$

γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = (1, +\infty)$, άρα

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \ln^2 x + 2x + 2 - 2x \ln x - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \ln^2 x + 2x + 2 > 2x \ln x + e^{-x} \text{ για κάθε } x > 0.$$

β) Έστω $f(x) = 2x - x^2 - 2 \ln(x+1)$, $x \geq 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο

$[0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = -\frac{2x^2}{x+1} < 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε $f \searrow [0, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 < 2\ln(x+1)$.

Έστω $g(x) = 2\ln(x+1) - 2x$, $x \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

παράγωγο $g'(x) = -\frac{2x}{x+1} < 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε $g \searrow [0, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 0 \stackrel{g \searrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x+1) < 2x$.

Αρα $2x - x^2 < 2\ln(x+1) < 2x$.

γ) Έστω $f(x) = x^2 \ln x + 3x + e$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x \ln x + x + 3$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3$. Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}}$

Η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, για κάθε $x \in \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ είναι $f''(x) < 0$, για

κάθε $x > e^{-\frac{3}{2}}$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε $f' \searrow \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και $f' \nearrow \left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$. Επομένως

για κάθε $x \in \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ είναι $f'(x) > f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = 3 - \frac{2}{e\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow f \nearrow \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και

για κάθε $x > e^{-\frac{3}{2}}$ είναι $f'(x) > f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = 3 - \frac{2}{e\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$, άρα

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x + 3x + e) = e$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επομένως

$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right) = (e, +\infty)$, οπότε

$f(x) > e > 0 \Leftrightarrow x(x \ln x + 3) + e > 0$.

67. Έστω $f(x) = \sin x - \eta \mu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

με παράγωγο $f'(x) = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x < 0$ γιατί $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα είναι γνησίως

φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή για $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu x < \eta\mu x$,

έχουμε: $f(\sigma\upsilon\nu x) > f(\eta\mu x) \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x) - \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) > \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) - \eta\mu(\eta\mu x) \Leftrightarrow$

$\eta\mu(\eta\mu x) - \eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) > \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) - \sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x).$

68.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty).$$

β) Είναι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow f(|\alpha + \beta|) \leq f(|\alpha| + |\beta|) \Leftrightarrow$

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} = \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha| + |\beta|} + \frac{|\beta|}{1 + |\alpha| + |\beta|} \leq \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|}.$$

69.α) Έστω $f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$, $x \geq 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με

παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$ οπότε $f \nearrow [1, +\infty)$.

Επομένως κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 - \frac{1}{x}$

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} < 0$

από α) άρα $g \searrow (1, +\infty)$.

γ) Είναι $(\kappa - 1) \ln \lambda = (\lambda - 1) \ln \kappa \Leftrightarrow \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} = \frac{\ln \kappa}{\kappa - 1} \Leftrightarrow g(\lambda) = g(\kappa) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \lambda = \kappa.$

70.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1 > 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ αφού}$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 1, \text{ άρα } f \nearrow \text{ στο } (1, +\infty).$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \ln x - \ln(x+1) \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{f(x) - f(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x}. \text{ Είναι } 1 < x < x+1 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f(x) < f(x+1) \text{ οπότε}$$

$$f(x) - f(x+1) < 0, \text{ άρα } g'(x) < 0 \text{ επομένως } g \searrow (1, +\infty).$$

β) Είναι $f(x) < f(x+1)$ για κάθε $x > 1$, οπότε: $x \ln x < (x+1) \ln(x+1) \Leftrightarrow$
 $\ln x^x < \ln(x+1)^{x+1} \Leftrightarrow x^x < (x+1)^{x+1}.$

γ) Είναι: $(\alpha+1)^{\ln \beta} > (\beta+1)^{\ln \alpha} \Leftrightarrow \ln[(\alpha+1)^{\ln \beta}] > \ln[(\beta+1)^{\ln \alpha}] \Leftrightarrow$

$$\ln \beta \cdot \ln(\alpha+1) > \ln \alpha \cdot \ln(\beta+1) \Leftrightarrow \frac{\ln(\alpha+1)}{\ln \alpha} > \frac{\ln(\beta+1)}{\ln \beta} \Leftrightarrow g(\alpha) > g(\beta) \text{ που}$$

ισχύει, γιατί $1 < \alpha < \beta$ και $g \searrow$.

71.α) Πρέπει $\frac{1 - \ln x}{\ln x} > 0 \Leftrightarrow x \in (1, e)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με

$$\text{παράγωγο } f'(x) = -\frac{1}{x(1 - \ln x) \ln x} < 0 \Rightarrow f \searrow (1, e).$$

β) Για $\alpha < \beta \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow \ln \frac{1 - \ln \alpha}{\ln \alpha} > \ln \frac{1 - \ln \beta}{\ln \beta} \Leftrightarrow \frac{1 - \ln \alpha}{\ln \alpha} > \frac{1 - \ln \beta}{\ln \beta} \Leftrightarrow$
 $\frac{\ln \beta}{\ln \alpha} > \frac{1 - \ln \beta}{1 - \ln \alpha}.$

72.α) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[\kappa, \kappa+1]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (\kappa, \kappa+1) : f'(\xi) = \frac{f(\kappa+1) - f(\kappa)}{1} \text{ ..Όμως}$$

$$f'(\xi) < f(\kappa+1) \text{ άρα } \cancel{f(\kappa+1)} - f(\kappa) < \cancel{f(\kappa+1)} \Leftrightarrow f(\kappa) > 0.$$

Όμως $f'(x) > f(\kappa) > 0$ οπότε $f \nearrow$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - f(\kappa) > 0$ άρα $h \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε $h(\kappa) < h(\kappa+1) \Leftrightarrow$

$$f(\kappa) - \kappa f(\kappa) < f(\kappa+1) - (\kappa+1)f(\kappa) \Leftrightarrow$$

$$f(\kappa) - \cancel{\kappa f(\kappa)} < f(\kappa+1) - \cancel{\kappa f(\kappa)} - f(\kappa) \Leftrightarrow 2f(\kappa) < f(\kappa+1) \Leftrightarrow$$

$$f(\kappa) < \frac{f(\kappa+1)}{2}$$

73.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$. Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ οπότε $f \searrow (0, 1]$, $\nearrow [1, +\infty)$.

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[e, x]$, $x > e$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (e, x) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \frac{\ln^2 x - 1}{x - e}. \text{ Η } f' \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f''(x) = \frac{\frac{2}{x}x - 2 \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$

για κάθε $x > e$, άρα $f' \searrow$ στο $[e, +\infty)$. Επειδή $\xi < x$, είναι

$$f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - 1}{x - e} > \frac{2 \ln x}{x} \Leftrightarrow x(\ln^2 x - 1) > 2 \ln x(x - e).$$

$$\mathbf{74.α)} f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(8-x)^2} - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{(8-x)^2}}, x \in (0, 8). \text{ Είναι}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(8-x)^2} \geq \sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow 64 - 16x + x^2 \geq x^2 \Leftrightarrow x \leq 4$$

Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, 4]$ και για κάθε $x \in (4, 8)$ είναι

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [4, 8]$$

$$\mathbf{β)} 2 < 3 \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(2) < f(3) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

$$\mathbf{75.α)} \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με παράγωγο } f'(x) = \frac{e^x - e^{x+1}}{(1 + e^{x+1})^2} < 0,$$

αφού $e^x < e^{x+1}$, άρα $f \searrow \mathbb{R}$.

$$\mathbf{β)} \text{ Για } x < 0 \text{ είναι } \left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^x > 1 \Leftrightarrow 5^x > 6^x \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(5^x) < f(6^x) \text{ και}$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^x > \left(\frac{7}{8}\right)^0 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^x > 1 \Leftrightarrow 7^x > 8^x \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(7^x) < f(8^x), \text{ άρα}$$

$$f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x).$$

76.α) Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ οπότε } f \nearrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$\beta) \text{ Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\text{θέτω}}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{\omega + 1} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega}{\omega} = 1. \text{ Άρα } f(A) = (0, 1).$$

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f''(x) = \frac{e^x \cdot (e^x + 1)^2 - 2(e^x + 1)e^{2x}}{(e^x + 1)^4} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^3} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} < 0 \text{ οπότε η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$\bullet \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x < 1 \Leftrightarrow 3^x < 5^x \Leftrightarrow f(3^x) < f(5^x) \quad (1)$$

$$\bullet 3^x < 5^x \Leftrightarrow f'(5^x) < f'(3^x) \quad (2)$$

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $f(3^x) + f'(5^x) < f(5^x) + f'(3^x)$.

77. Οι εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ γράφονται:

$$\varepsilon_1: y = \frac{x-6}{2}, \varepsilon_2: y = \frac{x-30}{8}, \frac{x-6}{2} - \frac{x-30}{8} = \frac{3x+6}{8}.$$

$$\text{Είναι } \frac{x-6}{2} > \frac{x-30}{8} \Leftrightarrow 8x-48 > 2x-60 \Leftrightarrow 6x > -12 \Leftrightarrow x > -2 \text{ ισχύει για}$$

$$x \in (2, 8). \text{ Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι } \frac{x-30}{8} < \frac{8}{x-2} \ln \frac{4}{x+2} < \frac{x-6}{2}.$$

$$\text{Θεωρούμε την συνάρτηση } g(x) = \ln \frac{4}{x+2} - \frac{(x-2)(x-30)}{64}. \text{ Η } g \text{ είναι}$$

$$\text{παραγωγίσιμη στο } (2, 8) \text{ με παράγωγο } g'(x) = \frac{x(14-x)}{32} > 0 \Rightarrow g \nearrow. \text{ Άρα για}$$

$$x > 2 \text{ είναι } g(x) > g(2) \Leftrightarrow \ln \frac{4}{x+2} - \frac{(x-2)(x-30)}{64} > 0. \text{ Όμοια,}$$

αποδεικνύουμε ότι $\frac{8}{x-2} \ln \frac{4}{x+2} < \frac{x-6}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{4}{x+2} < \frac{(x-6)(x-2)}{16}$,

θεωρώντας την $h(x) = \ln \frac{4}{x+2} - \frac{(x-6)(x-2)}{16}$ και δείχνοντας ότι η h είναι $\searrow$ στο $(2, 8)$.

78. Είναι $27^{27} > 28^{26} \Leftrightarrow 27 \ln 27 > 26 \ln 28 \Leftrightarrow \frac{\ln 27}{26} > \frac{\ln 28}{27}$.

Έστω $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

παράγωγο $f'(x) = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}$. Έστω $g(x) = x-1-x \ln x$, $x \geq 1$. Η g είναι

παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = -\ln x$.

Η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, $g'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ οπότε $g \searrow [1, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) < g(1) = 0$ οπότε $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (1, +\infty)$.

Είναι $27 < 28$, άρα: $f(27) > f(28) \Leftrightarrow \frac{\ln 27}{26} > \frac{\ln 28}{27} \Leftrightarrow 27 \ln 27 > 26 \ln 28 \Leftrightarrow \ln 27^{27} > \ln 28^{26} \Leftrightarrow 27^{27} > 28^{26}$.

79. Έστω $f(x) = \eta\mu^v x + \sigma\upsilon\nu^v x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

με παράγωγο $f'(x) = v\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x (\eta\mu^{v-2} x - \sigma\upsilon\nu^{v-2} x)$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x > 0, \sigma\upsilon\nu x > 0$ και

$$\eta\mu^{v-2} x - \sigma\upsilon\nu^{v-2} x \geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu^{v-2} x \geq \sigma\upsilon\nu^{v-2} x \Leftrightarrow \epsilon\phi^{v-2} x \geq 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x \geq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $f'(x) > 0$ για

κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $f \searrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $f \nearrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{1-\frac{v}{2}}$.

Επίσης για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2^{1-\frac{v}{2}}$.

Πρέπει $f(x) > \frac{1}{2}$. Για $x = \frac{\pi}{4}$ είναι $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$2^{\frac{1-\nu}{2}} > 2^{-1} \Leftrightarrow 1 - \frac{\nu}{2} > -1 \Leftrightarrow \nu < 4. \text{ Όμως } \nu > 2, \text{ άρα } \nu = 3.$$

80.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \ln \frac{x}{x-1} + x \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{x}{x-1} \right)' + \frac{1}{x-1} \left(\frac{x-1}{x} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \ln \frac{x}{x-1} + \cancel{x} \cdot \frac{\cancel{x}-1}{\cancel{x}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{\cancel{x}}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2} = \ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \ln \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x} \text{ και δεύτερη παράγωγο}$$

$$f''(x) = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} \left(\frac{x}{x-1} \right)' + \frac{1}{x^2} = \frac{\cancel{x}-1}{x} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-\cancel{x} + \cancel{x}-1}{x^2(x-1)} > 0, \text{ άρα}$$

$$f' \nearrow (-\infty, 0).$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x}{x-1} \stackrel{u = \frac{x}{x-1}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty, u \rightarrow 1}} \ln u = 0$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0. \text{ Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(-x) - \ln(1-x) - \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(-x) - \frac{1}{x} \right) \stackrel{k = -x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+, k \rightarrow 0^+}} \left(\ln k + \frac{1}{k} \right) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{k \ln k + 1}{k} =$$

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} (k \ln k + 1) \frac{1}{k} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

$$\left(\lim_{k \rightarrow 0^+} k \ln k = \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\ln k}{\frac{1}{k}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{\cancel{k}}{\frac{1}{\cancel{k}}} = \lim_{k \rightarrow 0^+} (-k) = 0 \right).$$

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f'((-\infty, 0)) = (0, +\infty)$, άρα $f'(x) > 0$ και $f \nearrow (-\infty, 0)$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x}{x-1} \stackrel{t = \frac{x}{x-1}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty, t \rightarrow 1}} \ln t = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x-1}{x} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1$ οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x-1}{x} \stackrel{a=\frac{x-1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty, \\ a \rightarrow 1}} \ln a = 0$ επομένως,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 + 0 = 1$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει

σύνολο τιμών το $f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = \left(1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right)$, άρα

$f(x) > 1$ για κάθε $x < 0$.

Λύση ανίσωσης

81.α) Έστω $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

παράγωγο $f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1} < 0$ για κάθε $x \neq 1$ άρα

$f \searrow \mathbb{R}$. Είναι $\ln(x^2 + 1) < x \Leftrightarrow f(x) < f(0) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} x > 0$.

β) Έστω $f(x) = \ln x - e^{x-1} + 1$, $x > 0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο

$(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x} - e^{x-1}$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{x-1} < 0 \Rightarrow f' \searrow (0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f' \searrow [1, +\infty)$ και για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$. Αν $x \in (0, 1)$ τότε $f(x) < f(1)$ και αν $x > 1$, τότε $f(x) < f(1)$.

Επομένως η ανίσωση $\ln x < e^{x-1} - 1 \Leftrightarrow \ln x - e^{x-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(1)$ έχει λύσεις την ένωση των διαστημάτων $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

γ) $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$. $f'(x) = e^x - 1 - x$, $f''(x) = e^x - 1$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$ και για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$, επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x < 0 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0$ και για κάθε

$x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0$, άρα $f(x) > f(0) = 0$, άρα για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 $e^x - 1 > x + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$.

82.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = \frac{(\eta\mu x)'(1 + \sigma\upsilon\nu x) - \eta\mu x(1 + \sigma\upsilon\nu x)'}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu x(1 + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x \cdot \eta\mu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \sigma\upsilon\nu x}. \text{ Επειδή } x \in [0, \pi), \text{ είναι } \sigma\upsilon\nu x > -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x + 1 > 0, \text{ άρα}$$

$f'(x) > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi)$.

$$\beta) \eta\mu x < 1 + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} < 1 \Leftrightarrow f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

83.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2)$ με παράγωγο :

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{2-x} < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 2).$$

β) Πρέπει $\frac{5-2x}{4-3x} > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ οπότε η ανίσωση ορίζεται στο

$$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right). \text{ Είναι } e^{2-3x} - e^{3-2x} > \ln \frac{5-2x}{4-3x} \Leftrightarrow$$

$$e^{-(3x-2)} + \ln[2-(3x-2)] > e^{-(2x-3)} + \ln[2-(2x-3)] \Leftrightarrow$$

$$f(3x-2) > f(2x-3) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} 3x-2 < 2x-3 \Leftrightarrow x < -1 \text{ οι οποίες είναι οι λύσεις}$$

της ανίσωσης αφού ανήκουν στο $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$.

Αυξημένης δυσκολίας

84.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο :

$$f'(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x \ln \frac{3}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^x \ln \frac{4}{7} < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R} \text{ γιατί } \ln \frac{3}{7} < \ln 1 = 0, \ln \frac{4}{7} < \ln 1 = 0$$

$$\text{και } \left(\frac{3}{7}\right)^x, \left(\frac{4}{7}\right)^x > 0$$

$$\beta) (3^{x-5} + 4^{x-5})7^{4-2x} > (3^{4-2x} + 4^{4-2x})7^{x-5} \Leftrightarrow \frac{3^{x-5}}{7^{x-5}} + \frac{4^{x-5}}{7^{x-5}} > \frac{3^{4-2x}}{7^{4-2x}} + \frac{4^{4-2x}}{7^{4-2x}} \Leftrightarrow$$

$$f(x-5) > f(4-2x) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} x-5 < 4-2x \Leftrightarrow x < 3.$$

85.α) Έστω $f(x) = \ln x + 2^x$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\text{παράγωγο } f'(x) = \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 > 0 \text{ οπότε } f \nearrow (0, +\infty).$$

$$\text{Είναι } \ln(x^2 - 3x + 7) + 2^{x^2 - 3x + 7} < \ln(2x + 1) + 2^{2x + 1} \Leftrightarrow$$

$$f(x^2 - 3x + 7) < f(2x + 1) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 - 3x + 7 < 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Το $(2, 3) \subseteq (0, +\infty)$ οπότε οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $(2, 3)$.

$$\beta) \text{ Είναι } e^{x^2 - x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x < e^{x+3} + (x+3)^3 + 3 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^2 - x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - x < e^{x+3} + (x+3)^3 + x + 3 \quad (1). \text{ Έστω}$$

$f(x) = e^x + x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}.$$

$$(1) \Rightarrow f(x^2 - x) < f(x + 3) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 - x < x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$$

86. Αν $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ τότε η ανισότητα αληθεύει. Αν $x > -1$, τότε

$$\ln 2^{x^2} \geq \ln(x + 1) \Leftrightarrow x^2 \ln 2 \geq \ln(x + 1) \Leftrightarrow x^2 \ln 2 - \ln(x + 1) \geq 0.$$

Έστω $f(x) = x^2 \ln 2 - \ln(x + 1)$, $x > -1$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη

στο $(0, 1)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x \ln 2 - \frac{1}{x+1}$, $f(0) = f(1) = 0$, οπότε

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο,

ώστε $f'(x_0) = 0$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με παράγωγο

$$f''(x) = 2 \ln 2 + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow (-1, +\infty). \text{ Για κάθε}$$

$$-1 < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \searrow (-1, x_0]. \text{ Επομένως για κάθε}$$

$$-1 < x < 0 \text{ είναι } f(x) > f(0) = 0, \text{ για κάθε } 0 < x < x_0 \text{ είναι } f(x) < f(0) = 0.$$

Επίσης για κάθε $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$ οπότε $f \nearrow [x_0, +\infty)$. Για κάθε $x_0 < x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) > f(1) = 0$. Άρα η σχέση $f(x) = x^2 \ln 2 - \ln(x+1) \geq 0$ ισχύει όταν $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.

87.α) Είναι $f(0) = 0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο

$f'(x) = e^x - 2x + 2$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = e^x - 2$. Είναι

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$. Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

για κάθε $x < \ln 2$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, \ln 2]$

και για $x > \ln 2$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [\ln 2, +\infty)$. Η

f' έχει ελάχιστο το

$f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 + 2 = 2(2 - \ln 2) > 0$, άρα

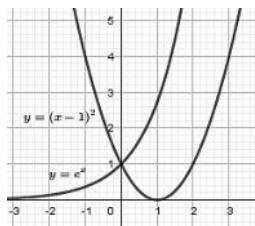
$f'(x) \geq f'(\ln 2) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$ οπότε η $x = 0$ είναι η

μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = (x-1)^2$

Η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η τετμημένη του κοινού σημείου των

$y = e^x$ και $y = (x-1)^2$. Επειδή τέμνονται στον άξονα $y'y$, λύση είναι η $x = 0$.



Ανισοτικές σχέσεις με άγνωστες συναρτήσεις

88. Έστω $g(x) = f(x) - x$, $x \in [0, +\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 1 > 0$, η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα $g \nearrow$ στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > x$.

89. Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με

παράγωγο $h'(x) = f'(x) - g'(x) < 0$, η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα $h \searrow$ στο $[\alpha, \beta]$. Για κάθε $\alpha < x < \beta$ είναι $h(x) > h(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

90. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - 2e^{2x}$. Είναι

$f'(x) < 2e^{2x} \Leftrightarrow f'(x) - 2e^{2x} < 0$, οπότε $g'(x) < 0$ και η g είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$.

α) Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) > g(0)$. Όμως, $g(0) = f(0) - e^0 = 0$, άρα

$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > e^{2x}$.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) - e^{2x} < 0 \Leftrightarrow f(x) < e^{2x}$.

Αυξημένης δυσκολίας

91. Η f είναι συνεχής στο $[α, β]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, $f(α) = f(β)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $ξ \in (α, β) : f'(ξ) = 0$.

α) Για κάθε $α < x < ξ \Rightarrow f'(x) < f'(ξ) = 0 \Rightarrow f \searrow [α, ξ]$. Επομένως για κάθε $α < x \leq ξ \Rightarrow f(x) < f(α)$. Για κάθε $ξ < x < β \Rightarrow f'(ξ) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [ξ, β]$, άρα $f(x) < f(β) = f(α)$ επομένως $f(x) < f(α)$ για κάθε $x \in (α, β)$.

β) Για κάθε $α < x < ξ \Rightarrow f'(x) > f'(ξ) = 0 \Rightarrow f \nearrow [α, ξ]$. Επομένως για κάθε $α < x \leq ξ \Rightarrow f(x) > f(α)$. Για κάθε $ξ < x < β \Rightarrow f'(ξ) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [ξ, β]$, άρα $f(x) > f(β) = f(α)$ επομένως $f(x) > f(α)$ για κάθε $x \in (α, β)$.

92. Είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [α, β]$. Η f είναι συνεχής στο $[α, β]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, $f(α) = f(β) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $ξ \in (α, β) : f'(ξ) = 0$.

Για κάθε $α < x < ξ \Rightarrow f'(x) > f'(ξ) = 0 \Rightarrow f \nearrow [α, ξ]$. Άρα για κάθε $α < x \leq ξ \Rightarrow f(x) > f(α) = 0$.

Για κάθε $ξ < x < β \Rightarrow f'(ξ) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [ξ, β]$, άρα $f(x) > f(β) = 0$, επομένως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (α, β)$.

93. Είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [α, β]$. Η f είναι συνεχής στο $[α, β]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, $f(α) = f(β) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $ξ \in (α, β) : f'(ξ) = 0$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε για κάθε $α < ξ < β$ ισχύει $f'(α) > f'(ξ) > f'(β) \Leftrightarrow f'(α) > 0 > f'(β)$, άρα $f'(α)f'(β) < 0$.

94. Είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [0, 3]$. Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, $f(1) = f(2) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (1, 2) : f'(\xi) = 0$.

Για κάθε $0 < x < \xi \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow [0, \xi]$.

Άρα $\varepsilon \quad 0 < 1 < \xi \xRightarrow{f \nearrow} f(0) < f(1) = 0$

Για κάθε $\xi < x < 3 \xRightarrow{f' \searrow} f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [\xi, 3]$,

Επομένως $\xi < 2 < 3 \xRightarrow{f \searrow} f(2) > f(3)$ οπότε $f(3) < 0$. Άρα $f(0)f(3) > 0$.

95.α) Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [0, 2]$ στο $[0, 2]$.

Άρα $0 < 1 < 2 \Leftrightarrow f'(0) < f'(1) < f'(2) \Leftrightarrow f'(0) < 0 < f'(2)$.

β) Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$.

- Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$, άρα $f \searrow$ στο $[0, 1]$.

Επομένως για κάθε $0 \leq x < 1$ είναι $f(x) > f(1)$.

- Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$, άρα $f \nearrow$ στο $[1, 2]$.

Επομένως για κάθε $1 \leq x \leq 2$ είναι $f(x) \geq f(1)$.

Άρα, $f(x) \geq f(1)$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

96.α) Έστω $g(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) + 1$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > -1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) + x < -1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < -x$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < -1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Άρα για κάθε $x \geq 0$ είναι

$g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow f(x) + x \leq -1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < -x$. Τελικά για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) < -x$.

β) Έστω $h(x) = f(x) - \ln(x^2 + 1) + 1$, $x \geq 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < -1 \Leftrightarrow$

$$f'(x) - \frac{2x}{x^2 + 1} < -1 - \frac{2x}{x^2 + 1} < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0 \text{ και επειδή η } h \text{ είναι συνεχής στο}$$

$[0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) = f(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$f(x) - \ln(x^2 + 1) + 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < \ln(x^2 + 1) - 1.$$

97. Η ε_1 διέρχεται από τα σημεία $(0, -1)$ και $(1, 0)$, οπότε έχει εξίσωση $y = x - 1$.

Η ε_2 είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από το $(0, 2)$ άρα έχει εξίσωση

$y = x + 2$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > x - 1$ και

$$f'(x) \leq x + 2 \text{ με το ίσον να ισχύει μόνο για } x = 0.$$

α) Έστω $g(x) = x^2 - 2x - 2f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = 2x - 2 - 2f'(x) = -2(f'(x) - (x - 1)).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 2f(x)$.

Έστω $h(x) = 2f(x) - x^2 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = 2f'(x) - 2x - 4 = 2(f'(x) - (x + 2)). \text{ Για κάθε } x \neq 0 \text{ είναι } h'(x) < 0$$

και η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) \Leftrightarrow 2f(x) - x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow 2f(x) < x^2 + 4x$.

β) Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2f(x) > 0 \Leftrightarrow$

$$2f(x) < x^2 - 2x \text{ και } h(x) > h(0) \Leftrightarrow 2f(x) - x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow 2f(x) > x^2 + 4x.$$

98. Είναι $f(x) \geq x \ln x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \ln x \geq 0$.

Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \ln x$, $x \geq 1$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με

$$\text{παράγωγο } g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) > \frac{f(x) + x}{x} \Leftrightarrow xf'(x) > f(x) + x \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > x \Leftrightarrow$$

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} > \frac{x}{x^2} \Leftrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1, \text{ και}$$

επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\text{αυτό. Άρα για κάθε } x \geq 1 \text{ είναι } g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x \ln x.$$

99. Έστω $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty). \text{ Άρα για κάθε } x > 0 \text{ είναι}$$

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} > 2 \quad (1). \text{ Επειδή } f(x) \neq 0 \text{ και } f \text{ συνεχής στο } [0, +\infty) \text{ θα}$$

διατηρεί πρόσημο στο διάστημα αυτό. Όμως $f(0) = 1 > 0$ οπότε $f(x) > 0$. Άρα

$$(1) \Leftrightarrow f'(x) > 2f(x) \Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) > 0 \Rightarrow (e^{-2x}f(x))' > 0$. Έστω $h(x) = e^{-2x}f(x)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο

$$h'(x) = e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) > 0 \Rightarrow (e^{-2x}f(x))' > 0 \text{ οπότε } h \nearrow [0, +\infty).$$

Επομένως για κάθε $x \geq 0$ είναι $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq e^{2x}$.

100. Έστω $g(x) = f(x) - \frac{\alpha}{\beta}x$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με

παράγωγο $g'(x) = f'(x) - \frac{\alpha}{\beta}$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x) = f''(x)$. Είναι

$g''(x) < 0$, άρα $g' \searrow$ στο $[a, \beta]$. Η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) , $g(a) = g(\beta) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi \in (a, \beta) : g'(\xi) = 0$. Για κάθε $a < x < \xi$ είναι $g'(x) > g'(\xi) > 0$, άρα $g \nearrow$ στο $[a, \xi]$. Για κάθε $\xi < x < \beta$ είναι $g'(x) < g'(\xi) = 0$, άρα $g \searrow$ στο $[\xi, \beta]$. Για κάθε $a < x < \xi$ είναι $g(x) > g(a) > 0$ και για κάθε $\xi \leq x < \beta$ είναι

$$g(x) > g(\beta) > 0, \text{ άρα } g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{\alpha}{\beta}x > 0 \Leftrightarrow f(x) > \frac{\alpha}{\beta}x \text{ για κάθε}$$

$$x \in (a, \beta).$$

101. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0 \Rightarrow h \searrow \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } 0 < 1 \stackrel{h'}{\Leftrightarrow} h(0) > h(1) \Leftrightarrow \frac{f(0)}{g(0)} > \frac{f(1)}{g(1)} \Leftrightarrow f(0) > f(1).$$

102. Έστω $f(x) = (2-x)g(x)$, $x \in [0, 2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με παράγωγο $f'(x) = (2-x)g'(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, 2]$.

$$\text{Άρα } 0 < 2 \stackrel{f}{\Leftrightarrow} f(0) > f(2) \Leftrightarrow 2g(0) > 0 \Leftrightarrow g(0) > 0.$$

103. Έστω $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - x$, $x \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - x^2 - 1 > 0$ οπότε $g \nearrow [0, +\infty)$.

$$\text{Άρα για κάθε } x > 0 \text{ είναι } g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) > \frac{x^3}{3} + x + f(0).$$

Έστω $h(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$, $x \geq 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - x^2 - x - 2 < 0$ οπότε $h \searrow [0, +\infty)$.

$$\text{Επομένως για κάθε } x > 0 \text{ είναι } h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) < \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + f(0).$$

$$\text{Άρα } \frac{x^3}{3} + x + f(0) < f(x) < \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + f(0) \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3} < \frac{f(x)}{x^3} < \frac{1}{3} + \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3}. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3} \right) = \frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2x} + \frac{2}{x^2} + \frac{f(0)}{x^3} \right) \text{ οπότε από το κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

104. Αν ε_1 η μία από τις δύο παράλληλες που διέρχεται από τα σημεία $(0, 2)$ και $(-2, 0)$ τότε έχει εξίσωση $y = x + 2$.

Αν ε_2 η ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην ε_1 και διέρχεται από το $(1,1)$ και την αρχή των αξόνων τότε έχει εξίσωση $y=x$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > x$ και $f'(x) \leq x+2$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x=0$.

Έστω $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - x > 0$ οπότε $g \nearrow [0, +\infty)$.

Αρα για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) > \frac{x^2}{2} + f(0)$ Έστω

$h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} - 2x$, $x \geq 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - x - 2 < 0$ οπότε $h \searrow [0, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) < \frac{x^2}{2} + 2x + f(0)$, άρα

$\frac{x^2}{2} + f(0) < f(x) < \frac{x^2}{2} + 2x + f(0) \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{f(0)}{x^2} < \frac{f(x)}{x^2} < \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + \frac{f(0)}{x^2}$ Όμως
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{f(0)}{x^2} \right) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{f(0)}{x^2} \right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής
 έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

105. Έστω $g(x) = f(x) - x^3 - 1$, $x \geq 0$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 3x^2$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x) = f''(x) - 6x < 0 \Rightarrow g' \searrow [0, +\infty)$. Αρα για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) < g'(0) = 0 \Rightarrow g \searrow [0, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) < x^3 + 1$.

Έστω $h(x) = f(x) - (x-1)^2$, $x \geq 0$. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - 2(x-1)$ και δεύτερη παράγωγο $h''(x) = f''(x) - 2 > 0 \Rightarrow h' \nearrow [0, +\infty)$. Αρα για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > h'(0) = 2 > 0 \Rightarrow h \nearrow [0, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) > h(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > (x-1)^2$.

106. Έστω $g(x) = f(x) - e^x + x^2$, $x \in [0, 1]$. Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - e^x + 2x$ και δεύτερη παράγωγο $g''(x) = f''(x) - e^x + 2 > 0 \Rightarrow g' \nearrow [0, 1]$. Επομένως για κάθε $0 < x < 1 \Rightarrow g'(0) < g'(x) \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, 1]$, άρα $g(0) < g(1) \Leftrightarrow f(0) - 1 < f(1) - e + 1 \Leftrightarrow f(0) - f(1) = 2 - e < 0$.

107. Έστω $g(x) = f(x) - 2x^3 + 3x^2$, $x \in [1, 5]$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 6x^2 + 6x$ και $g''(x) = f''(x) - 12x + 6 > 0 \Rightarrow g' \nearrow [1, 5]$. $1 < x < 5 \Rightarrow g'(1) < g'(x) \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [1, 5]$, άρα $g(1) < g(5) \Leftrightarrow f(5) - f(1) > 176$

108. $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow \mathbb{R}$. Από το ΘΜΤ $\exists \xi_1 \in (-2, -1): f'(\xi_1) = f(-1) - f(-2)$ και $\exists \xi_2 \in (1, 2): f'(\xi_2) = f(2) - f(1)$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \searrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(-1) - f(-2) > f(2) - f(1) \Leftrightarrow f(-1) + f(1) > f(-2) + f(2) \Leftrightarrow A > B$

109. $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$. Επειδή τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, είναι διαδοχικοί όροι μίας γνησίως αύξουσας αριθμητικής προόδου, ισχύει ότι $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ και $\beta - \alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma$. Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\gamma, \delta): f'(\xi_1) = f(\beta) - f(\alpha)$ και $f'(\xi_2) = f(\delta) - f(\gamma)$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) < f(\delta) - f(\gamma) \Leftrightarrow f(\beta) + f(\gamma) > f(\alpha) + f(\delta)$

110. α) $h'(x) = 4f'(x) - 4x^3 = 4[f'(x) - x^3] < 0 \Rightarrow h \searrow \mathbb{R}$
β) ΘΜΤ στο $[2, 3]: f'(\xi) = f(3) - f(2) \xrightarrow{h \searrow} h(2) > h(3) \Rightarrow 4f(2) - 16 > 4f(3) - 81 \Leftrightarrow f(3) - f(2) < \frac{65}{4} < 17$ άρα $f'(\xi) < 17$

111. Λόγω Θ.Μ.Τ. για την g στο $[-\rho, \rho]$, $x \in (-\rho, \rho)$, υπάρχει

$\xi \in (-\rho, x) : g'(\xi) = \frac{g(x) - g(-\rho)}{x + \rho}$. Είναι $-\rho < \xi < x < \rho$, άρα:

$$g'(\xi) < g'(\rho) \Leftrightarrow \frac{g(x) - g(-\rho)}{x + \rho} < g'(\rho) \Leftrightarrow g(x) < (x + \rho)g'(\rho) + g(-\rho).$$

112. α' τρόπος: Έστω

$$g(x) = 6f(x) - (f(8) - f(2))x - 8f(2) + 2f(8), \quad x \in [2, 8]$$

$$g'(x) = 6f'(x) - (f(8) - f(2)). \text{ Από το ΘΜΤ } \exists \xi \in (2, 8) : f'(\xi) = \frac{f(8) - f(2)}{6}.$$

$$\text{Για } 2 < x < \xi \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) < \frac{f(8) - f(2)}{6} \Leftrightarrow$$

$$6f'(x) - f(8) + f(2) < 0, \text{ άρα } g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [2, 8]. \text{ Για κάθε } 2 < x < 8 \text{ είναι}$$

$$g(x) < g(2) = 0$$

β' τρόπος

Έστω $x \in (2, 8)$, σε καθένα από τα διαστήματα $[2, x]$ και $[x, 8]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Συνεπώς υπάρχουν $\xi_1 \in (2, x)$ και $\xi_2 \in (x, 8)$

$$\text{τέτοια, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(8) - f(x)}{8 - x}.$$

Επειδή $f''(x) > 0$, τότε η f' θα είναι γνησίως αύξουσα και αφού $\xi_1 < \xi_2$, θα

$$\text{είναι } f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} < \frac{f(8) - f(x)}{8 - x} \Leftrightarrow$$

$$(8 - x)[f(x) - f(2)] < (x - 2)[f(8) - f(x)] \Leftrightarrow$$

$$8f(x) - 8f(2) - xf(x) + xf(2) < xf(8) - xf(x) - 2f(8) + 2f(x) \Leftrightarrow$$

$$6f(x) < xf(8) - xf(2) + 8f(2) - 2f(8) \Leftrightarrow$$

$$f(x) < \frac{f(8) - f(2)}{6}x + \frac{8f(2) - 2f(8)}{6}$$

Μονοτονία και εξισώσεις

113. Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow \mathbb{R}$ οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ έχει το πολύ μία ρίζα.

114. Αρκεί για κάθε $x > 0$ η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = 2x - x \ln x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - 2 + \ln x = 0$$

να έχει το πολύ μια ρίζα. Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x} - 2 + \ln x$, $x > 0$. Η h είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \frac{1}{x}$. Ισχύουν οι

υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την h στο $[0, x]$, $x > 0$ οπότε υπάρχει

$\xi \in (0, x) : f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$. Είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, +\infty)$ άρα για κάθε $0 < \xi < x$ ισχύει $f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow$

$xf'(x) - f(x) > 0$ άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow (0, +\infty)$ οπότε η $h(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

115. Έστω $h(x) = f(x) - \ln(x^2 + 2x + 5) - 2$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - \frac{2x+2}{x^2+2x+5} > 0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα

116. Έστω $f(x) = x^7 + 7x - \lambda$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 7x^6 + 7 > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$. Στο διάστημα $(0, 1)$ η f έχει σύνολο τιμών το $f((0, 1)) = (-\lambda, 8 - \lambda)$. Για να έχει η f ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$ πρέπει $0 \in f((0, 1))$ και αυτό συμβαίνει όταν

$-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$ και $8 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 8$. Άρα $0 < \lambda < 8$.

117. α) Έστω $f(x) = x^5 + 4x^3 + 7x + \eta\mu x - 1$, $x \in [0, 1]$. Είναι

$f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 11 + \eta\mu 1 > 0$ και f συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1) : f(x_0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 7 + \sin x > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

β) Έστω $f(x) = 6x^3 + 5x - 3x^2 - 3, x \in [0,1]$. Είναι $f(0) = -3 < 0, f(1) = 5 > 0$ και f συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (0,1) : f(x_0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $f'(x) = 18x^2 - 6x + 5 > 0$ ($\Delta = -324 < 0$) οπότε $f \nearrow [0,1]$ άρα x_0 μοναδικό.

γ) Έστω $f(x) = 3x^4 + 7 \ln x - 1, x \in (0,1]$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ οπότε υπάρχει $\alpha > 0$ που βρίσκεται πολύ κοντά στο 0, τέτοιο, ώστε $f(\alpha) < 0$. Επίσης $f(1) = 2 > 0$ οπότε $f(\alpha)f(1) < 0$, f συνεχής στο $[\alpha,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,1) : f(x_0) = 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $f'(x) = 12x^3 + \frac{7}{x} > 0$ οπότε $f \nearrow (0,1] \Rightarrow x_0$ μοναδικό.

δ) Έστω $f(x) = e^x + 3x + 4$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ οπότε υπάρχει

$\alpha < 0 : f(\alpha) < 0$ όπου ο α είναι πολύ μικρός αρνητικός αριθμός. Επίσης

$f(-1) = \frac{1}{e} + 1 > 0$ άρα $f(\alpha)f(-1) < 0$, f συνεχής στο $[\alpha,-1]$ ως άθροισμα

συνεχών συναρτήσεων, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,-1) : f(x_0) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με παράγωγο $f'(x) = e^x + 3 > 0 \Rightarrow f \nearrow (0,1] \Rightarrow x_0$ μοναδικό.

118. Έστω $h(x) = f(x) - x(1 - \ln x), x \in [1,e]$. Δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα του πεδίου ορισμού της άρα $f(1) < 1, f(e) > 0$. Επομένως

$h(1) = f(1) - 1 < 0, h(e) = f(e) > 0$ οπότε $h(1)h(e) < 0$ και επειδή η h είναι

συνεχής στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in (1,e) : f(x_0) = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) + \ln x > 0$ για κάθε $x \in (1,e) \Rightarrow h \nearrow [1,e] \Rightarrow x_0$ μοναδικό.

119. Έστω $f(x) = x^4 - 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 4x^3 - 4$, οπότε για $x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 1]$ ενώ για $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$. Για κάθε $x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 3$ και για κάθε $x \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 3$ άρα η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

Αυξημένης δυσκολίας

120. α) Είναι $x \ln x \geq x - 1 \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 \geq 0$. Έστω $f(x) = x \ln x - x + 1$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) \geq f(1) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

β) Έστω $g(x) = 2x^2 \ln x - 3x^2 + 4x - 1$, $x > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = 4x \ln x + 2x - 6x + 4 = 4(x \ln x - x + 1) = 4f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0$, οπότε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 \ln x - 3x^2 + 4x - 1) = -1$. Επίσης

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(2 \ln x - 3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right] = +\infty$ οπότε η f έχει σύνολο τιμών :

$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-1, +\infty)$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

121. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι η e :

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Για να διέρχεται από το O πρέπει

$-f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0}(x_0 - 1) + e^{-x_0}(x_0 + 1) = 0$

Έστω $g(x) = e^x(x-1) + e^{-x}(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = x(e^x - e^{-x}) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

(Για $x > 0$ είναι $x > -x \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0$ και για $x < 0$ είναι $x < -x \Leftrightarrow e^x < e^{-x} \Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0$. Επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $g(0) = 0$ η $x = 0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$.

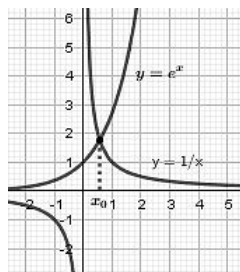
122. Έστω $f(x) = 6\eta\mu x - x + x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 6\sigma\upsilon\nu x - 1 + 3x^2$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x) = -6\eta\mu x + 6x = 6(x - \eta\mu x)$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$. Για $x < 0$ είναι $|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x$ οπότε $x - \eta\mu x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 0]$. Για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$ οπότε $x - \eta\mu x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 5$ οπότε $f \nearrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 5$ οπότε $f \nearrow [0, +\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) = 0$, η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6\eta\mu x - x + x^3 = 0$

123. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = \ln \alpha \cdot (\alpha^x - 1) + \ln \beta \cdot (\beta^x - 1)$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$ άρα $f(x) \geq f(0) = 2$ και για $x < 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$, οπότε $f(x) \geq f(0) = 2$. Άρα $f(x) \geq 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

124. Έστω $f(x) = xe^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x > -1$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [-1, +\infty)$. Είναι



$f(-1) = -\frac{1}{e} - 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$
 οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 οπότε έχει
 αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left[-1 - \frac{1}{e}, -1\right)$. Επειδή $0 \notin f(\Delta_1)$ η εξίσωση
 $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_1 . Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2 ,
 άρα $f(\Delta_2) = \left[-1 - \frac{1}{e}, +\infty\right)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία
 τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in \Delta_2$, οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως
 αύξουσα στο Δ_2 .
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 1$. Αν $x = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε για $x \neq 0$ είναι
 $e^x = \frac{1}{x}$. Η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η τετμημένη του κοινού σημείου
 των $y = e^x$ και $y = \frac{1}{x}$.

125. Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x) = 3x^2 - 3$. Είναι $f'(x) = 3x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 1$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

• για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, -1]$ άρα $f((-\infty, -1]) = (-\infty, 3]$. Το

$0 \in (-\infty, 3)$, άρα υπάρχει μοναδικός $x_1 < -1 < 0$ τέτοιος, ώστε $f(x_1) = 0$.

• για κάθε $-1 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [-1, 1]$. Στο $[-1, 0]$ είναι

$f([-1, 0]) = [1, 3]$ άρα η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $[-1, 0]$ και στο $(0, 1)$ είναι

$f((0, 1)) = (-1, 1)$. Επειδή $0 \in (-1, 1)$ υπάρχει μοναδικός $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιος, ώστε

$f(x_2) = 0$.

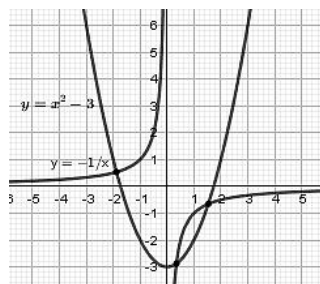
• για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$

άρα $f([1, +\infty)) = [-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in [-1, +\infty)$

υπάρχει μοναδικός $x_3 > 1 > 0$ τέτοιος, ώστε

$f(x_3) = 0$.

$x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = -1$.



Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία αρνητική ρίζα την x_1 και δύο θετικές ρίζες τις x_2, x_3 .

Αν $x = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, οπότε για $x \neq 0$ είναι $x^2 - 3 = -\frac{1}{x}$. Οι

γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2 - 3$ και $y = -\frac{1}{x}$ τέμνονται σε 3 σημεία, από τα οποία το ένα έχει αρνητική τετμημένη και τα άλλα δύο θετική τετμημένη.

126. α) Έστω $f(x) = x(e^x - e^{-x}) - e^x - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = x(e^x + e^{-x})$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f \nearrow [0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x(x-1) - e^{-x}(x+1)] = 0 - (+\infty) = -\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x}(x+1)) = +\infty.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x(x-1) - e^{-x}(x+1)] = +\infty - 0 = +\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x(x-1)) = +\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ είναι $f(\Delta_1) = (-2, +\infty)$ και στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$ είναι $f(\Delta_2) = (-2, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_1), 0 \in f(\Delta_2)$, υπάρχουν μοναδικοί $x_1 \in \Delta_1$, $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιοι, ώστε $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$. Οι x_1, x_2 μοναδικοί αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1, Δ_2 .

β) Έστω $f(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 2x - x\sigma\upsilon\nu x = x(2 - \sigma\upsilon\nu x)$. Επειδή $2 - \sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

- για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$ και
- για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$.

Είναι $f(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) \right] = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) \right] = +\infty.$$

$$(\text{Είναι } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right)$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0. \text{ Όμοια } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0.)$$

Επομένως στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ είναι $f(\Delta_1) = (-1, +\infty)$ και στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$ είναι $f(\Delta_2) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$, $0 \in f(\Delta_2)$ υπάρχουν μοναδικοί $x_1 \in \Delta_1$, $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιои, ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$. Οι x_1, x_2 μοναδικοί αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα Δ_1, Δ_2 .

127. Αρκεί η εξίσωση $\ln x = ax$ να έχει δύο ρίζες. Έστω $g(x) = \ln x - ax$, $x > 0$. Είναι $g(1) = -a < 0$, $g(e) = 1 - ae > 0$, οπότε $g(1)g(e) < 0$. Η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_1 \in (1, e)$: $g(x_1) = 0$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - a \right) \right] = -\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0, \text{ οπότε υπάρχει } \beta > e \text{ τέτοιιος, ώστε } g(\beta) < 0. \text{ Είναι}$$

$g(e)g(\beta) < 0$, g είναι συνεχής στο $[e, \beta]$ επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_2 \in (e, \beta)$: $g(x_2) = 0$.

Έστω ότι η g έχει και τρίτη ρίζα, την $x_3 > x_2 > x_1$.

Η g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα (x_1, x_2) , (x_2, x_3) ,

$$f(x_1) = f(x_2) = 0, f(x_2) = f(x_3) = 0 \text{ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος Rolle άρα εξίσωση $g'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες.

Όμως $\frac{1}{x} - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$. Άρα, η εξίσωση $g(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει 3 ρίζες οπότε και έχει ακριβώς 2 ρίζες.

128. α) Έστω $f(x) = \ln x^2 - x - 2$, $x \neq 0$. Όταν $x > 0$ τότε

$f(x) = 2 \ln x - x - 2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$:

• για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, 2]$ οπότε

$f(x) \leq f(2) = 2(\ln 2 - 2) < 0$.

• για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [2, +\infty)$ άρα $f(x) \leq f(2) < 0$. Οπότε η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$.

β) Για $x < 0$ είναι $f(x) = 2 \ln(-x) - x - 2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$

με παράγωγο $f'(x) = \frac{2-x}{x} > 0$ άρα $f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα

στο $(-\infty, 0)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 \frac{\ln(-x)}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) \right] = +\infty$ γιατί

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{-x}}{1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty - 0 - 2 = -\infty$. Επομένως στο

διάστημα $A = (-\infty, 0)$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$ και επειδή $0 \in f(A)$

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, 0)$. Η ρίζα είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

129. Έστω $f(x) = 4\eta\mu x - 2\chi\sigma\upsilon\nu x - x - 1$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 2\chi\eta\mu x - 1$ και

δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2\chi\sigma\upsilon\nu x$. Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

• για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ οπότε

$f'(x) \geq f'(0) = 1$ και

• για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε $f'(x) \geq f'(0) = 1$.

Επομένως για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) \geq 1 > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -5 + \frac{\pi}{2} < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \frac{\pi}{2} > 0$ άρα $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, η f είναι συνεχής

στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Το x_0 είναι μοναδικό αφού $f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

130.α) Έστω $f(x) = \ln^2 x - 2x \ln x + 1$, $x \in (0, +\infty)$. Η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} - 2 \ln x + 2$ και δεύτερη

παράγωγο $f''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} - \frac{2}{x} = 2 \frac{1 - \ln x - x}{x^2}$.

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1 - \ln x - x$. Έστω $g(x) = 1 - \ln x - x$, $x \in (0, +\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = -\frac{1}{x} - 1 < 0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο

$(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$.

- Για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) < g(1) = 0$, άρα $f''(x) < 0$ οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα $f'(x) < f'(1) = -2 < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

- Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g(x) > g(1) = 0$, άρα $f''(x) > 0$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$. Άρα $f'(x) < f'(1) = -2 < 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x - 2x \ln x + 1) = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \text{ Ακόμη}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \right] = -\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Έστω $f(x) = e^x + x^2 - 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = e^x + 2x - 2$ και δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \text{ οπότε η } f' \text{ έχει σύνολο τιμών το } \mathbb{R}, \text{ άρα}$$

υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R} : f'(x_1) = 0$. Το x_1 είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(0) = -1 < 0$, $f'(1) = e > 0$ οπότε $f'(0) \cdot f'(1) < 0$, η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Bolzano επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε ταυτίζεται με το x_1 . Άρα $x_1 \in (0, 1)$.

Για κάθε $x < x_1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0$ οπότε $f \searrow (-\infty, x_1]$ και για κάθε

$$x > x_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_1) = 0 \text{ οπότε } f \nearrow [x_1, +\infty). \text{ Είναι } f(0) = -1, f(1) = e - 3,$$

οπότε $0 < x_1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(0) < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Στα

διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, $\Delta_2 = [0, x_1]$, $\Delta_3 = [x_1, +\infty)$ η f έχει αντίστοιχα σύνολα τιμών $f(\Delta_1) = (-\infty, -1)$, $f(\Delta_2) = [f(x_1), -1]$ και $f(\Delta_3) = [f(x_1), +\infty)$.

Το 0 ανήκει μόνο στα διαστήματα $f(\Delta_1), f(\Delta_3)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα στο Δ_1 , η οποία είναι αρνητική ρίζα και μία στο Δ_3 , η οποία είναι θετική.

131. α) Έστω $f(x) = e^x + x^2 + 5x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = e^x + 2x + 5$, και δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = e^x + 2. \text{ Είναι } f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$$

οπότε $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f'(\mathbb{R})$, υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R} : f'(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{x_1} = -2x_1 - 5. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}, \text{ για κάθε } x < x_1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0$$

οπότε $f \searrow (-\infty, x_1]$ και για κάθε $x > x_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_1) = 0$ οπότε $f \nearrow [x_1, +\infty)$.

Είναι

$$f(x_1) = e^{x_1} + x_1^2 + 5x_1 + 1 = -2x_1 - 5 + x_1^2 + 5x_1 + 1 = x_1^2 + 3x_1 - 4 = (x_1 - 1)(x_1 + 4)$$

Είναι $f'(1) = e + 7 > 0$, $f'(-4) = e^{-4} - 3 < 0$ οπότε $f'(-4) \cdot f'(1) < 0$, η f' είναι

συνεχής στο $[-4,1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Θ.Bolzano επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-4,1)$, η οποία ταυτίζεται με την x_1 αφού η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα. Επομένως,

$x_1 \in (-1,4)$. Άρα $-4 < x_1 \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(-4) < 0$ Ακόμη

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, x_1]$ είναι

$f(A_1) = [f(x_1), +\infty)$ και στο $A_2 = [x_1, +\infty)$ είναι $f(A_2) = [f(x_1), +\infty)$. Επειδή το 0 περιέχεται σε καθένα από τα $f(A_1), f(A_2)$,

υπάρχουν $x_2 \in A_1, x_3 \in A_2$ τέτοια, ώστε $f(x_2) = 0 = f(x_3)$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα A_1, A_2 , τα x_2, x_3 είναι μοναδικά.

β) Έστω $f(x) = x^2 - 2x \ln x - x - 1, x > 0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 2x - 2 \ln x - 3$ και δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = 2 \frac{x-1}{x}$. Η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$,

• για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (0,1]$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$ και

$f'(1) = -1$, οπότε στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ η f' έχει σύνολο τιμών το

$f'(\Delta_1) = [-1, +\infty)$, άρα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$: $f'(x_1) = 0$.

- Επομένως για κάθε $0 < x < x_1 \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \nearrow (0, x_1]$.

Είναι $f'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 2 \ln x_1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x_1 = 2x_1 - 3$ (1).

Είναι $f(x_1) = x_1^2 - x_1 \cdot 2 \ln x_1 - x_1 - 1 \overset{(1)}{=} x_1^2 - x_1(2x_1 - 3) - x_1 - 1 = -(x_1 - 1)^2 < 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$, άρα

στο διάστημα $A_1 = (0, x_1]$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(A_1) = (-1, f(x_1)]$. Επειδή $0 \notin f(A_1)$ η $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο A_1 .

- Για κάθε $x_1 < x < 1 \overset{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \searrow [x_1, 1]$, οπότε $f(x) < f(x_1) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, 1]$.

• Για κάθε $x > 1$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 - 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{3}{x} \right) \right] = +\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$ η f' έχει σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = [-1, +\infty)$, άρα υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$: $f'(x_2) = 0$.

Είναι $f'(x_2) = 0 \Leftrightarrow 2x_2 - 2 \ln x_2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x_2 = 2x_2 - 3$ (2) οπότε

$$f(x_2) = x_2^2 - x_2 \cdot 2 \ln x_2 - x_2 - 1 \stackrel{(2)}{=} -(x_2 - 1)^2 < 0.$$

- Για κάθε $1 < x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) < 0 \Rightarrow f \searrow [1, x_2]$, άρα $f(x) < f(1) = -1$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right] = +\infty.$$

Στο διάστημα $A_2 = [x_2, +\infty)$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(A_2) = [f(x_2), +\infty)$.

Επειδή $0 \in f(A_2)$ η $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα στο A_2 , η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0, +\infty)$.

132. Έστω $g(x) = f(x) - 4x$, $x \in [1, 3]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 3]$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 4 > 0 \Rightarrow g \nearrow [1, 3]$.

Επομένως $g(1) < g(3) \Leftrightarrow f(1) - 4 < f(3) - 12 \Leftrightarrow f(3) > 5$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, $f(1) \cdot f(3) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος Bolzano άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει

τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 3)$. Επειδή $f'(x) > 4 > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, 3]$ η ρίζα είναι μοναδική.

133. Έστω $g(x) = f(x) - x$, $x \in [1, 2]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow [1, 2]$.

Είναι $1 < 2 \stackrel{g \nearrow}{\Leftrightarrow} g(1) < g(2) \Leftrightarrow f(1) - 1 < f(2) - 2 \Leftrightarrow f(2) > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, $f(1) \cdot f(2) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano

άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$. Επειδή

$f'(x) > 1 > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, 2]$ η ρίζα είναι μοναδική.

134. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$, $x > 0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$

τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$. Είναι $f'(\xi) > 1 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} > 1 \Leftrightarrow$

$f(x) > x + f(0)$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x, 0]$, $x < 0$ οπότε υπάρχει $\xi' \in (x, 0)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi') = \frac{f(0) - f(x)}{-x}$. Είναι $f'(\xi) > 1 \Leftrightarrow \frac{f(0) - f(x)}{-x} > 1 \Leftrightarrow f(x) < x + f(0)$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + f(0)) = -\infty$ είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Είναι $f'(x) > 1 > 0 \Rightarrow$

$f \nearrow \mathbb{R}$ οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \mathbb{R} : f(x_1) = 0$.

135. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 4x + 1821 \Leftrightarrow f(x) - 4x - 1821 = 0$ να έχει ακριβώς

μία ρίζα. Έστω $g(x) = f(x) - 4x - 1821$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 4 > 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$. Για την g εφαρμόζεται το

Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$, $x > 0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε

$g'(\xi) = \frac{g(x) - g(0)}{x}$. Είναι $g'(\xi) > 1 \Leftrightarrow \frac{g(x) - g(0)}{x} > 1 \Leftrightarrow g(x) > x + g(0)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + g(0)) = +\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Για την g εφαρμόζεται το

Θ.Μ.Τ. στο $[x, 0]$, $x < 0$ οπότε υπάρχει $\xi' \in (x, 0)$ τέτοιο, ώστε

$g'(\xi') = \frac{g(0) - g(x)}{-x}$. Είναι $g'(\xi) > 1 \Leftrightarrow \frac{g(0) - g(x)}{-x} > 1 \Leftrightarrow g(x) < x + g(0)$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + g(0)) = -\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επειδή

$0 \in g(\mathbb{R})$ υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R} : g(x_1) = 0$, μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα

Λύση εξίσωσης

136. α) Έστω $f(x) = 2x^2 + x + \ln x - 3$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο

$(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 4x + 1 + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$. Επειδή $f(1) = 0$, η

$x = 1$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Έστω $f(x) = e^x + e^{3x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

παράγωγο $f'(x) = e^x + 3e^{3x} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

Επειδή $f(0) = 0$, η $x = 0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Έστω $f(x) = 3^{-x} + 3^{-2x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = -3^{-x} \ln 3 - 3^{-2x} \ln 3 < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}$.

Επειδή $f(0) = 0$, η $x = 0$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

δ) Έστω $f(x) = \ln(x-1) + x^2 + x - 6$, $x > 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{x-1} + 2x + 1 > 0 \Rightarrow f \nearrow (1, +\infty)$. Επειδή $f(2) = 0$, η $x = 2$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

137. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x) = e^{x-3} + 1 > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

β) Επειδή $f(3) = 0$, η $x = 3$ είναι μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Είναι $e^{2x^2} - e^{2x+12} = 2x - 2x^2 + 12 \Leftrightarrow$

$e^{(2x^2+3)-3} + (2x^2+3) - 4 = e^{(2x+15)-3} + 2x + 15 - 4 \Leftrightarrow$

$f(2x^2+3) = f(2x+15) \Leftrightarrow 2x^2+3 = 2x+15 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -2$

Αυξημένης δυσκολίας

138. α) Έστω $f(x) = \ln(xe^x + 1) - x$. Για να ορίζεται η f πρέπει $xe^x + 1 > 0$.

Έστω $g(x) = xe^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$.

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

• για κάθε $x < -1$ είναι $g'(x) < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο

$(-\infty, -1]$. Επομένως για κάθε $x \leq -1 \Leftrightarrow g(x) \geq g(-1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$.

• για κάθε $x > -1$ είναι $g'(x) > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.

Για κάθε $x > -1$ είναι $g(x) > g(-1) > 0$. Άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $A_f = \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{xe^x + e^x}{xe^x + 1} - 1 = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}. \text{ Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$.

- για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$. Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Επομένως η $x = 0$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$\beta) \text{ Είναι } x^x = 2^{x+4} \Leftrightarrow \ln x^x = \ln 2^{x+4} \Leftrightarrow x \ln x = (x+4) \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$x \ln x - x \ln 2 - 4 \ln 2 = 0.$$

Έστω $f(x) = x \ln x - x \ln 2 - 4 \ln 2, x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

$$\text{με παράγωγο } f'(x) = \ln x + 1 - \ln 2 = \ln \frac{x}{2} + 1.$$

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x}{2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x}{2} \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{e}.$$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$,

- $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$, οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{2}{e}\right]$.
- $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{2}{e}, +\infty\right)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{e}, +\infty\right)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -4 \ln 2 \text{ και } f\left(\frac{2}{e}\right) = -\frac{2}{e} - 4 \ln 2, \text{ άρα η } f \text{ στο διάστημα } \Delta_1 = \left(0, \frac{2}{e}\right],$$

$$\text{έχει σύνολο τιμών: } f(\Delta_1) = \left[-\frac{2}{e} - 4 \ln 2, -4 \ln 2\right]. \text{ Επομένως } f(x) < 0 \text{ για κάθε}$$

$$x \in \left(0, \frac{2}{e}\right]. \text{ Επειδή } f(4) = 4 \ln 4 - 4 \ln 2 - 4 \ln 2 = 0 \text{ και } f \text{ γνησίως αύξουσα στο}$$

$$\left[\frac{2}{e}, +\infty\right), \text{ η } x = 4 \text{ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης } f(x) = 0.$$

139. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x^4 - x^4 + 1, x \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$f(1) = 0$ και $f(-1) = 0$, δηλαδή το 1 και το -1 είναι προφανείς ρίζες της εξίσωσης. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{4(1-x)(1+x)(1+x^2)}{x}. \text{ Είναι}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) \geq 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$,

• $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, οπότε f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$.

Επομένως για κάθε $x < -1$ είναι $f(x) < f(-1) = 0$.

• $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$, οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0)$.

Επομένως για κάθε $-1 < x \leq 0$ είναι $f(x) < f(-1) = 0$.

Άρα το -1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(-\infty, 0)$.

• $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$.

Επομένως για κάθε $0 < x \leq 1$ είναι $f(x) \leq f(1) = 0$.

• $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) \leq f(1) = 0$.

Άρα το 1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(0, +\infty)$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, το -1 και το 1.

β) Έστω $f(x) = 4^x + 4^{\frac{1}{x}} - 18$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\text{παράγωγο } f'(x) = 4^x \ln 4 + 4^{\frac{1}{x}} \ln 4 \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{\ln 4 \left(x^2 4^x - 4^{\frac{1}{x}} \right)}{x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης

$x^2 4^x - 4^{\frac{1}{x}}$. Οπότε, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 4^x - 4^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x) = 2x \cdot 4^x + x^2 \cdot 4^x \cdot \ln 4 + 4^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 4 \cdot \frac{1}{x^2} > 0, \text{ οπότε η } g \text{ είναι } \nearrow \text{ στο } (0, +\infty)$$

. Παρατηρούμε ότι $g(1) = 4 - 4 = 0$, οπότε για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > g(1) = 0$,

άρα $f'(x) > 0$, οπότε $f \nearrow$ στο $[1, +\infty)$. Για κάθε $0 < x < 1$ είναι

$g(x) < g(1) = 0$, άρα $f'(x) < 0$, οπότε $f \searrow$ στο $(0, 1]$. Στο διάστημα $[1, +\infty)$

η f έχει προφανή ρίζα την $x = 2$, γιατί $f(2) = 4^2 + 4^{\frac{1}{2}} - 18 = 16 + 2 - 18 = 0$

.Επειδή η f είναι $\nearrow$ στο $[1, +\infty)$, η $x = 2$ είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$

στο διάστημα αυτό. Στο διάστημα $(0, 1]$ η f έχει ρίζα την $x = \frac{1}{2}$, γιατί

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{\frac{1}{2}} + 4^2 - 18 = 2 + 16 - 18 = 0. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι } \searrow \text{ στο } (0, 1], \text{ η } x = \frac{1}{2}$$

είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4^x + 4^{\frac{1}{x}} = 18$ αληθεύει μόνο για $x = 2$ ή $x = \frac{1}{2}$.

140. α) Είναι $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0 \quad (1).$

Έστω $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}.$$

Από τη (1) έχουμε : $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = 2$.

β) Είναι $4^x + 2^x = 6^x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{6}\right)^x + \left(\frac{2}{6}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 = 0 \quad (1).$

Έστω $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^x \ln \frac{1}{3} < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}.$$

Από τη (1) έχουμε : $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} x = 1$.

γ) Έστω $f(x) = 3^x - 2x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Προφανείς ρίζες οι $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Έστω ότι υπάρχει και 4^η ρίζα, η ρ , με $\rho > 2$.

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1], [1, 2], [2, \rho]$

, παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1), (1, 2), (2, \rho)$ με παράγωγο

$$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 - 4x, \quad f(0) = f(1), f(1) = f(2), f(2) = f(\rho) \text{ άρα ισχύουν οι}$$

υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν

$x_1 \in (0, 1), x_2 \in (1, 2), x_3 \in (2, \rho)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0$ και

$f'(x_3) = 0$. Η f' είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$,

παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ με παράγωγο

$f''(x) = 3^x \cdot \ln^2 3 - 4$, $f'(x_1) = f'(x_2) = 0, f'(x_2) = f'(x_3) = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2), \xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = 0, f''(\xi_2) = 0$.

Η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με παράγωγο $f^{(3)}(x) = 3^x \cdot \ln^3 3$, $f''(\xi_1) = f''(\xi_2) = 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε $f'''(\xi) = 0$ άτοπο Άρα έχει μοναδικές ρίζες τις $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

δ) Έστω $f(x) = 2^x + 2 \cdot 3^x - 5x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = 2^1 + 2 \cdot 3^1 - 5 \cdot 1 - 3 = 2 + 6 - 5 - 3 = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2^x \ln 2 + 2 \cdot 3^x \ln 3 - 5$ και $f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 \cdot 3^x \ln^2 3 > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$, $f(0) = f(1) = 0$ άρα ικανοποιούνται για την f οι προϋποθέσεις του θ. Rolle, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.

- Για κάθε $x > \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi, +\infty)$. Επειδή το 1 περιέχεται στο διάστημα $(\xi, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το 1 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(\xi, +\infty)$.

- Για κάθε $x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \xi]$. Επειδή το 0 περιέχεται στο διάστημα $(-\infty, \xi)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το 0 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο $(-\infty, \xi)$. Επειδή $\xi < 1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\xi, +\infty)$ ισχύει ότι $f(\xi) < f(1) \Leftrightarrow f(\xi) < 0$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες τα 0 και 1.

141. Οι τετμημένες των σημείων τομής των C_f , C_g , είναι οι λύσεις της

$$\text{εξίσωσης } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2(2 \ln x - 1) = 2x^3 - 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$6x^2 \ln x - 3x^2 - 2x^3 + 6x - 1 = 0 .$$

Έστω $h(x) = 6x^2 \ln x - 3x^2 - 2x^3 + 6x - 1$, $x > 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο

$$(0, +\infty) \text{ με παράγωγο } h'(x) = 12x \ln x + 6x^2 \cdot \frac{1}{x} - 6x - 6x^2 + 6 = 12x \ln x - 6x^2 + 6 .$$

Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$h''(x) = 12 \ln x + 12x \cdot \frac{1}{x} - 12x = 12 \ln x + 12 - 12x = 12(\ln x - x + 1) < 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ άρα η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

(Γνωρίζουμε ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$)

Η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$,

- για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h'(x) > h'(1) = 0$, άρα $h \nearrow$ στο $(0, 1]$.

Επομένως για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h(x) < h(1) = 0(1)$.

- για κάθε $x > 1$ είναι $h'(x) < h'(1) = 0$, άρα $h \searrow$ $[1, +\infty)$.

Επομένως για κάθε $x > 1$ είναι $h(x) < h(1) = 0$ (2). Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Επειδή $h(1) = 0$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

142. α) Η εξίσωση γίνεται $3^x - 2^x = 5^x - 4^x$ (1). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t) = t^x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(t) = xt^{x-1}$. Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $[2, 3]$ και $[4, 5]$, παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(2, 3)$, $(4, 5)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (2, 3)$

$$\text{και } \xi_2 \in (4, 5) \text{ τέτοια, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow x\xi_1^{x-1} = 3^x - 2^x \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} \Leftrightarrow x\xi_2^{x-1} = 5^x - 4^x. \text{Οπότε, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη}$$

με την εξίσωση: $x\xi_1^{x-1} = x\xi_2^{x-1} \Leftrightarrow x(\xi_1^{x-1} - \xi_2^{x-1}) = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \text{ ή}$

$$(\xi_1^{x-1} = \xi_2^{x-1}) \quad (2).$$

Από την (2) έχουμε $\frac{\xi_1^{x-1}}{\xi_2^{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{x-1} = 1$ και επειδή $\frac{\xi_1}{\xi_2} \neq 1$ γιατί $\xi_1 \neq \xi_2$ θα

είναι $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα, η εξίσωση (1) έχει ακριβώς δύο λύσεις, $(x = 0)$ ή $(x = 1)$.

β) Όμοια Θ.Μ.Τ. στα $[7, 8]$ και $[9, 10]$ για την $f(x) = t^x$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Όμοια Θ.Μ.Τ. στο $[2, 3]$ για την $f(x) = t^x$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

143. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \neq -1$ και επειδή η f είναι συνεχής, , είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2+1)) =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{\ln(x^2+1)}{\frac{1}{x}} \right) = -\infty(+\infty) = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2+1) \stackrel{u=x^2+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty, u \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(x^2+1)) = +\infty$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) \stackrel{k=x^2+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty \\ k \rightarrow +\infty}} \ln k = +\infty. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών}$$

$$\text{το } \mathbb{R}. \text{ Είναι } e^x(x^2+1) = e^a \Leftrightarrow x^2+1 = \frac{e^a}{e^x} \Leftrightarrow x^2+1 = e^{a-x} \Leftrightarrow$$

$$\ln(x^2+1) = \ln e^{a-x} \Leftrightarrow \ln(x^2+1) = a-x \Leftrightarrow x + \ln(x^2+1) = a \Leftrightarrow f(x) = a.$$

Επειδή το a ανήκει στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x) = a$ έχει ακριβώς μία λύση.

$$\gamma) \text{ Είναι } x-3 = \ln \frac{10}{x^2+1} \Leftrightarrow x-3 = \ln 10 - \ln(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$x + \ln(x^2+1) = \ln 10 + 3 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x = 3$$

$$\delta) \ln \frac{x^2+1}{x^6+1} < x^3 - x \Leftrightarrow \ln(x^2+1) + x < \ln(x^6+1) + x^3 \Leftrightarrow f(x) < f(x^3) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow}$$

$$x < x^3 \Leftrightarrow x - x^3 < 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) < 0 \Leftrightarrow x(1-x)(1+x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

144. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \neq 1 \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής, είναι } \nearrow \mathbb{R}.$$

$$\beta) \text{ Είναι } \sqrt{2} < \sqrt{3} \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{3}) \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{2}}}{2+1} < \frac{e^{\sqrt{3}}}{3+1} \Leftrightarrow \frac{4}{3} < \frac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > \frac{4}{3}$$

$$\gamma) \text{ Είναι } e^{x^2-x} > \frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{e^x} > \frac{x^4+1}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4+1} > \frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) > f(x) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} x^2 > x \Leftrightarrow x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow (x < 0) \text{ ή } (x > 1).$$

$$\delta) \text{ Είναι } e^x = \frac{4x^2+4x+2}{x^2+2x+2} \Leftrightarrow e^{(2x+1)-(x+1)} = \frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}} = \frac{(2x+1)^2+1}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{(2x+1)^2+1} = \frac{e^{x+1}}{(x+1)^2+1} \Leftrightarrow$$

$$f(2x+1) = f(x+1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} 2x+1 = x+1 \Leftrightarrow x = 0$$

145. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι συναρτήσεις

$f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x)$ και $e^x - e^{-x} - 2x$ είναι παραγωγίσιμες, με παραγωγήση κατά μέλη της σχέσης που μας δίνεται έχουμε

$$[f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x)]' = (e^x - e^{-x} - 2x)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x) + 4f(x)f'(x) + 3f'(x) = e^x + e^{-x} - 2 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(3f^2(x) + 4f(x) + 3) = e^x + e^{-x} - 2 \quad (1). \text{ Το τριώνυμο } 3f^2(x) + 4f(x) + 3$$

έχει $\Delta < 0$ άρα $3f^2(x) + 4f(x) + 3 > 0$ (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης

$$e^x + e^{-x} - 2 = e^x + \frac{1}{e^x} - 2 = \frac{e^{2x} + 1 - 2e^x}{e^x} = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x} > 0 \quad (3) \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Από (1),(2),(3) $\Rightarrow f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι $\nearrow \mathbb{R}$.

$$\beta) \text{ Είναι } f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = e^x - e^{-x} - 2x \Leftrightarrow$$

$$f(x)(f^2(x) + 2f(x) + 3) = e^x - e^{-x} - 2x \quad (1).$$

Αν στη παράσταση $f^2(x) + 2f(x) + 3$ θέσουμε $f(x) = \omega$ προκύπτει το τριώνυμο

$$\omega^2 + 2\omega + 3, \text{ το οποίο έχει διακρίνουσα } \Delta = -8 < 0 \text{ οπότε}$$

$$\omega^2 + 2\omega + 3 > 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2f(x) + 3 > 0.$$

$$\text{Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε } f(x) = \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{f^2(x) + 2f(x) + 3} \quad (2).$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $e^x - e^{-x} - 2x = 0$.

Έστω $g(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$g'(x) = e^x + e^{-x} - 2 > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ και επειδή η } g \text{ είναι συνεχής, είναι } \nearrow \mathbb{R}.$$

Επειδή $g(0) = 0$ η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ άρα και της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$ και για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0$.

δ) Είναι $\alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$ (3) και $\gamma < \delta \Leftrightarrow f(\gamma) < f(\delta)$ (4). Από (3) + (4) $\Rightarrow f(\alpha) + f(\gamma) < f(\beta) + f(\delta)$.

πλήθος ριζών

146. α) Έστω $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 4x + 7 > 0$ ($\Delta < 0$) $\Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, είναι $f(A) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A = \mathbb{R} : f(x_0) = 0$.

β) Έστω $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 4x(x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,1] \cup [2,+\infty)$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$, $f(0) = -2$, άρα $f(\Delta_1) = [-2, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1 : f(x_1) = 0$.

- για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $\Delta_2 = [0,1]$. Είναι $f(1) = -1$, άρα $f(\Delta_2) = [-2, -1]$. Επειδή $0 \notin f(\Delta_2)$ η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_2 .

- για κάθε $x \in (1,2)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $\Delta_3 = [1,2]$. Είναι $f(2) = -2$, άρα $f(\Delta_3) = [-2, -1]$. Επειδή $0 \notin f(\Delta_3)$ η $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_3 .

- για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $\Delta_4 = [2, +\infty)$. Είναι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$, άρα $f(\Delta_4) = [-2, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_4)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_4 : f(x_2) = 0$. Άρα η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες.

γ) Είναι $\frac{2x^3 + 3x^2}{6} = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6 = 0$. Έστω

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 1$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- για κάθε $x < -2$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, -2]$. Είναι

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-2) = 26$, οπότε $f(\Delta_1) = [26, +\infty)$. Επειδή $0 \notin f(\Delta_1)$ η $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_1 .

- για κάθε $-2 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $\Delta_2 = [-2, 1]$. Είναι $f(1) = -1$, άρα $f(\Delta_2) = [-1, 26]$. Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_2 : f(x_1) = 0$.

- για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, άρα $f(\Delta_3) = [-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_3)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $x_3 \in \Delta_3 : f(x_3) = 0$. Άρα η $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες.

147. α) Έστω $f(x) = 2x^2 \ln x + x - 1 + 5x^2$, $x > 0$. Η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = 4x \ln x + 12x + 1$

και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 4 \ln x + 16 \geq 0$. Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-4}$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

- για κάθε $0 < x < e^{-4}$ είναι

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (0, e^{-4}] \text{ οπότε } f'(x) > f'(e^{-4}) = 1 - \frac{4}{e^4} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, e^{-4}].$$

- για κάθε $x > e^{-4}$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [e^{-4}, +\infty)$ οπότε

$$f'(x) > f'(e^{-4}) = 1 - \frac{4}{e^4} > 0 \Rightarrow f \nearrow [e^{-4}, +\infty).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(2 \ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 5 \right) \right] = +\infty, \text{ οπότε η } f \text{ έχει σύνολο}$$

τιμών το $f(A) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $A = (0, +\infty)$.

β) Έστω $f(x) = 2e^x - x^2 - 3x - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 2e^x - 2x - 3$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 2e^x - 2$.

$$\text{Είναι } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 0]$.

Είναι $f'(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 \frac{e^x}{x} - 2 - \frac{3}{x} \right) \right] = +\infty$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο

$\Delta_1 = (-\infty, 0]$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = [-1, +\infty)$.

Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 < 0 : f'(x_1) = 0$.

Είναι $f'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x_1} = 2x_1 + 3$ οπότε

$$f(x_1) = 2e^{x_1} - x_1^2 - 3x_1 - 3 = 2x_1 + 3 - x_1^2 - 3x_1 - 3 = -x_1^2 - x_1 = -x_1(x_1 + 1)$$

Είναι $f'(-1) = 2e^{-1} - 1 < 0$, $f'(-2) = 2e^{-2} - 1 > 0$, άρα $f'(-1)f'(-2) < 0$, οπότε λόγω του Θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, -1)$. Όμως για $x < 0$ το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της f' , άρα $x_1 \in (-2, -1)$, οπότε $f(x_1) < 0$.

- Για κάθε $x < x_1 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, x_1]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ οπότε $f((-\infty, x_1]) \stackrel{f' \nearrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(x_1) \right] = (-\infty, f(x_1)]$.

Το $0 \notin f((-\infty, x_1])$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο $(-\infty, x_1]$

- για κάθε $x_1 < x < 0 \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \searrow [x_1, 0]$.

Επομένως $f([x_1, 0]) \stackrel{f' \searrow}{=} [f(0), f(x_1)] = [-1, f(x_1)]$.

Το $0 \notin f([x_1, 0])$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο $[x_1, 0]$

• για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [0, +\infty)$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = [-1, +\infty)$. Το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$

οπότε υπάρχει $x_2 > 0 : f'(x_2) = 0$. Είναι $f'(x_2) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x_2} = 2x_2 + 3$ οπότε

$$f(x_2) = 2e^{x_2} - x_2^2 - 3x_2 - 3 = 2x_2 + 3 - x_2^2 - 3x_2 - 3 = -x_2^2 - x_2 = -x_2(x_2 + 1) < 0$$

- Για κάθε $0 < x < x_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_2) = 0 \Rightarrow f \searrow [0, x_2]$ και

Επομένως $f([0, x_2]) \stackrel{f' \searrow}{=} [f(x_2), f(0)] = [f(x_2), -1]$.

Το $0 \notin f([0, x_2])$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζες στο $[0, x_2]$

- για κάθε $x > x_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_2) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_2, +\infty)$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 \frac{e^x}{x} - 2 - \frac{3}{x} \right) \right] = +\infty (+\infty - 2 - 0) = +\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \text{ οπότε } f([x_2, +\infty)) \stackrel{f'}{=} [f(x_2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [f(x_2), +\infty)$$

Επειδή το $0 \in f([x_2, +\infty))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_3 > x_2 : f(x_3) = 0$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

148. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$.

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 12(x^3 - 2x^2 - x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$12(x^2 - 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty).$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα για κάθε

$x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, -1] \cup [1, 2]$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^4 = +\infty, \quad f(-1) = -19, \quad f(1) = 13$$

και $f(2) = 8$.

Στα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty, -1)$, $\Delta_2 = [-1, 1]$, $\Delta_3 = (1, 2]$ και $\Delta_4 = (2, +\infty)$ έχει

αντίστοιχα σύνολα τιμών :

$$f(\Delta_1) \stackrel{f'}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-19, +\infty), \quad f(\Delta_2) \stackrel{f'}{=} [f(-1), f(1)] = [-19, 13],$$

$$f(\Delta_3) \stackrel{f'}{=} \left[\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(1) \right) = [8, 13) \text{ και } f(\Delta_4) \stackrel{f'}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (8, +\infty).$$

- Αν $\lambda < -19$ τότε το λ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$, δεν έχει πραγματικές ρίζες.
- Αν $\lambda = -19$, τότε το λ ανήκει μόνο στο $f(\Delta_2)$ οπότε $f(x) = \lambda$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα, την $\rho_1 = -1$.
- Αν $-19 < \lambda < 8$, τότε το λ ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1), f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει δύο ρίζες, $\rho_2 \in (-\infty, -1)$ και $\rho_3 \in (-1, 1)$.
- Αν $\lambda = 8$, τότε το λ ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_3)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 3 ρίζες, $\rho_4 \in (-\infty, -1)$, $\rho_5 \in (-1, 1)$ και $\rho_6 = 2$.

- Αν $8 < \lambda < 13$, τότε λ ανήκει σε καθένα από τα διαστήματα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_3), f(\Delta_4)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 4 ρίζες, $\rho_7 \in (-\infty, -1)$, $\rho_8 \in (-1, 1)$, $\rho_9 \in (1, 2)$ και $\rho_{10} \in (2, +\infty)$.
- Αν $\lambda = 13$, τότε το λ ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_4)$, και η εξίσωση έχει 3 ρίζες, $\rho_{11} \in (-\infty, -1)$, $\rho_{12} = 1$ και $\rho_{13} \in (2, +\infty)$.
- Τέλος, αν $\lambda > 13$, τότε το λ ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1), f(\Delta_4)$, οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες, $\rho_{14} \in (-\infty, -1)$ και $\rho_{15} \in (2, +\infty)$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + \lambda$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 4x^3 - 4$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, 1]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(1) = \lambda - 3$.

Επομένως, $f((-\infty, -1)) = (\lambda - 3, +\infty)$ και $f([1, +\infty)) = [\lambda - 3, +\infty)$.

- Αν $\lambda > 3$, τότε $0 \notin f(A)$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = 3$ τότε το 0 ανήκει μόνο στο $f([1, +\infty))$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 1$.

- Αν $\lambda < 3$ τότε $0 \in f((-\infty, -1)), f([1, +\infty))$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-\infty, 1)$ και $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = 0 = f(x_2)$ και επειδή στα αντίστοιχα

διαστήματα η f είναι γνήσια μονότονη, οι ρίζες αυτές είναι μοναδικές.

γ) Έστω $f(x) = 2 \ln x - 1 + \lambda x^2$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

παράγωγο $f'(x) = \frac{2}{x} + 2\lambda x > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ οπότε $f(A) = \mathbb{R}$, άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Για $x = 0$ είναι $-1 = 0$ άτοπο άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα το 0.

είναι $2x^3 + 6\lambda x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda x^2 = 1 - 2x^3 \Leftrightarrow \frac{1 - 2x^3}{6x^2} = \lambda$. Έστω

$f(x) = \frac{1 - 2x^3}{6x^2}$, $x \neq 0$. Για $x \neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$f'(x) = -\frac{x^3 + 1}{3x^3}$. Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$,

- Για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $(-\infty, -1]$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3}{6x^2} = +\infty, \quad f(-1) = \frac{1}{2}, \quad \text{άρα } f(\Delta_1) = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ όπου}$$

$$\Delta_1 = (-\infty, -1).$$

- Για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ στο $\Delta_2 = [-1, 0)$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left((1 - 2x^3) \frac{1}{6x^2} \right) = +\infty, \quad \text{άρα } f(\Delta_2) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

- Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $\Delta_3 = (0, +\infty)$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((1 - 2x^3) \frac{1}{6x^2} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3}{6x^2} = -\infty, \quad \text{άρα}$$

$$f(\Delta_3) = \mathbb{R}.$$

-Αν $\lambda < \frac{1}{2}$, τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$, $\lambda \notin f(\Delta_2)$ και $\lambda \in f(\Delta_3)$, οπότε υπάρχει μοναδικός $x_1 \in \Delta_3$ τέτοιος ώστε $f(x_1) = \lambda$.

-Αν $\lambda > \frac{1}{2}$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$ και $\lambda \in f(\Delta_3)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις, μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

-Αν $\lambda = \frac{1}{2}$, τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$ και $\lambda \in f(\Delta_3)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μία σε κάθε ένα από τα διαστήματα Δ_2, Δ_3 . Η μοναδικότητα των λύσεων προκύπτει από το γεγονός ότι f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

149. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 4[x^3 - (2-x)^3]$.

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq (2-x)^3 \Leftrightarrow x \geq 2-x \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ στο $(1, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = [1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = (-\infty, 1]$.

$$\text{β)} \text{ Είναι } f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [2, +\infty),$$

$$f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [2, +\infty) \text{ οπότε } f(A) = [2, +\infty).$$

γ) Αν $\lambda = 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη ($0=1$).

Για $\lambda \neq 0$ είναι $\lambda x^4 + \lambda(2-x)^4 = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\lambda}$.

Αν $\frac{1}{\lambda} < 2 \Leftrightarrow \frac{1-2\lambda}{\lambda} < 0 \Leftrightarrow \lambda(1-2\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ το $\frac{1}{\lambda}$ δεν

ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\lambda}$ δεν έχει

πραγματικές λύσεις.

Αν $\frac{1}{\lambda} = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ έχει μία λύση την $x = 1$.

Αν $\frac{1}{\lambda} > 2 \Rightarrow \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ δύο λύσεις.

Σύνθετες ασκήσεις

150. α) Έστω $g(x) = f(x) - x^2 - 2$, $x \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = f'(x) - 2x > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > x^2 + 2$.

Έστω $h(x) = f(x) - e^x - 1$, $x \geq 0$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με παράγωγο $h'(x) = f'(x) - e^x < 0 \Rightarrow h \searrow [0, +\infty)$. Για κάθε

$x > 0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) < e^x + 1$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 2) = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $f([0, +\infty)) = [2, +\infty)$. Αν $\alpha \geq 2$ τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα αφού το α ανήκει στο σύνολο τιμών της f . Αν $\alpha < 2$ τότε $\alpha \notin [2, +\infty)$ οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

γ) Έστω $\varphi(x) = xf(x) - 10$, $x \in [1, 2]$. Είναι $\varphi(1) = f(1) - 10$ και

$\varphi(2) = 2f(2) - 10$. Από τη σχέση του α) για $x = 1$: είναι

$1^2 + 2 < f(1) < e + 1 \Leftrightarrow -7 < f(1) - 10 < e - 9 < 0$, άρα $\varphi(1) < 0$.

Επίσης για $x = 2$ είναι $2^2 + 2 < f(2) < e^2 + 1 \Leftrightarrow 12 < 2f(2) < 2e^2 + 2 \Leftrightarrow$

$2 < 2f(2) - 10 < 2e^2 - 8$, άρα $\varphi(2) > 2 > 0$. Επειδή $\varphi(1)\varphi(2) < 0$ και η φ είναι

συνεχής στο $[1, 2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε

υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f(x_0) = 10$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με παράγωγο $\varphi'(x) = f(x) + xf'(x)$.

Για $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4$ οπότε $f'(x) > 2x \geq 2 > 0$ άρα $xf'(x) > 0$ στο $[1, 2]$

.Επίσης $f(x) > x^2 + 1 > 1 > 0$ επομένως $\varphi'(x) > 0$ άρα φ γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ οπότε x_0 μοναδικό.

$$\text{Είναι } \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) - 10. \text{ Όμως } \frac{17}{4} < f\left(\frac{3}{2}\right) < e^{\frac{3}{2}} + 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{51}{8} < \frac{3}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{29}{8} < \frac{3}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) - 10 < \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{17}{2}. \text{ Δηλαδή}$$

$$h\left(\frac{3}{2}\right) < \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{17}{2} = \frac{1}{2}\left(3e^{\frac{3}{2}} - 17\right) < 0 \text{ γιατί } 3e^{\frac{3}{2}} < 17 \Leftrightarrow$$

$$\left(3e^{\frac{3}{2}}\right)^2 < 17^2 \Leftrightarrow 9e^3 < 289 \text{ που ισχύει αφού } e < 3 \Leftrightarrow e^3 < 27 \Leftrightarrow 9e^3 < 243 < 289$$

Επειδή $\varphi(2)\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ και η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, ισχύουν οι υποθέσεις

του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$. Όμως το x_0 είναι

μοναδική λύση της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$ στο $[1, 2]$ άρα το x_1 ταυτίζεται με το x_0 .

Επομένως $x_0 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ οπότε βρίσκεται πιο κοντά στο 2.

151. α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0 = f(0)$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{1} = 1 = f(1)$ άρα η f είναι συνεχής στο 1. Επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$ σαν πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{-\ln x + x - 1}{(x-1)^2}. \text{ Έστω } g(x) = -\ln x + x - 1, x > 0. \text{ Η } g \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $g'(x) = -\frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x}$.

Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$,

- για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (0, 1]$ άρα

$$g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, 1].$$

- για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [1, +\infty)$ άρα

$g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{\ln x}{x-1} \quad \text{οπότε } f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = \frac{\ln x}{x-1} + \ln x =$$

$$\frac{\cancel{\ln x} + x \ln x - \cancel{\ln x}}{x-1} = f(x).$$

$$\delta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \ln e^x}{e^{f(x)}(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^{f(x)}(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{x}{e^{f(x)}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{e^{\ln x}}{e^{f(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \cdot e^{\ln x - f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x} - 1} \cdot e^{-f\left(\frac{1}{x}\right)} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} \cdot e^{-\frac{\ln x}{x-1}} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH} \frac{x}{1} = 0 \quad \text{οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x-1}} \stackrel{u = \frac{\ln x}{x-1}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow 0^+}} e^u = 1.$$

152.α) Έστω $g(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$. Επειδή

$g(0) = 0$, η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$

β) i. Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$ (1)

τότε $e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_2)}$ (2). Από (1) + (2) $\Rightarrow 3x_1 + 1 \geq 3x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ άτοπο. Άρα

$f(x_1) < f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο

$\mathbb{R}$.

ii. Για $x=0$ είναι $f(0)+e^{f(0)}=1 \Leftrightarrow g(f(0))=g(0) \Leftrightarrow f(0)=0$

iii. Με παραγωγή της σχέσης $f(x)+e^{f(x)}=3x+1$ έχουμε

$$(f(x)+e^{f(x)})' = (3x+1)' \Leftrightarrow f'(x)+e^{f(x)}f'(x)=3 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{3}{1+e^{f(x)}} > 0.$$

H f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f''(x) = -\frac{3}{(1+e^{f(x)})^2} e^{f(x)} f'(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow \mathbb{R}. \text{ Για την } f \text{ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ.}$$

στο $[x, x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$:

$$f'(\xi) = f(x+1) - f(x). \text{ Είναι } x < \xi < x+1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) > f(x+1) - f(x) > f'(x+1)$$

iv. Είναι $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1} \searrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ αντιστρέφεται. Είναι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = A_{f^{-1}}$.

Θέτουμε $f(x) = y$ οπότε έχουμε: $y + e^y = 3x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(y + e^y - 1)$ άρα

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y + e^y - 1), y \in \mathbb{R} \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + e^x - 1), x \in \mathbb{R}.$$

153. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση $y = \ln f(x) + f(x) - 1$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$$(\ln f(x) + f(x) - 1)' = (x)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} + 1 \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \cdot \frac{1+f(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1}.$$

β) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$, ισχύει ότι $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1} > 0$ άρα η

f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)+1}$$

είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων,

οπότε η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x) = \frac{f'(x)(f(x)+1) - f(x)f'(x)}{(f(x)+1)^2} = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2}. \text{ Επειδή για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι}$$

$f(x) > 0$ και $f'(x) > 0$, είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

γ) Για $x = 0$ είναι $\ln f(0) + f(0) - 1 = 0$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$, οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι 1-1.

Η (1) γίνεται $\varphi(f(0)) = 0 \Leftrightarrow \varphi(f(0)) = \varphi(1) \Leftrightarrow f(0) = 1$.

δ) Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x \geq 0$ είναι $\frac{x}{2} + 1 \leq f(x)$ και $f(x) \leq xf'(x) + 1$

Έστω $g(x) = \frac{x}{2} + 1 - f(x)$, $x \geq 0$. Είναι

$$g'(x) = \frac{1}{2} - f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{f(x)}{f(x)+1} = \frac{1-f(x)}{2(f(x)+1)}.$$

Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 1 \Leftrightarrow 1 - f(x) < 0$, άρα $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 1 - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 1 \leq f(x).$$

Έστω $h(x) = f(x) - xf'(x) - 1$, $x \geq 0$. Είναι

$h'(x) = f'(x) - f'(x) - xf''(x) = -xf''(x)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $h(x) \leq h(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq xf'(x) + 1$.

154. α) Η σχέση $f^3(x) + 2f(x) + 3x = 0$ (1) αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις οπότε :

$$(f^3(x) + 2f(x) + 3x)' = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + 2f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{3}{3f^2(x) + 2} < 0 \Rightarrow f \searrow_{\mathbb{R}}.$$

β) Από τη σχέση (1) για $x = 1$ έχουμε :

$$f^3(1) + 2f(1) + 3 = 0 \Leftrightarrow (f(1) + 1)(f^2(1) - f(1) + 3) = 0 \Leftrightarrow f(1) = -1.$$

Έστω $h(x) = f(x) + 3 - x \cdot 4^x$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Είναι $h\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 2 > 0$ γιατί

$$\frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1) = -1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) + 2 > 1 \text{ και } h(1) = f(1) - 1 - 2 < 0. \text{ Επειδή η } h$$

είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και $h(1)h\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + 3 = \rho \cdot 4^\rho.$$

γ) Είναι $f \searrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1 \Rightarrow f$ αντιστρέφεται. Από την σχέση (1) έχουμε $f^3(x) + 2f(x) = -3x$ (2). Η f έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ άρα $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Θέτουμε $f(x) = y$, (2) $\Rightarrow y^3 + 2y = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}(y^3 + 2y)$, άρα

$$f^{-1}(y) = -\frac{1}{3}(y^3 + 2y), y \in \mathbb{R} \text{ οπότε } f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}(x^3 + 2x), x \in \mathbb{R}.$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(x+1)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \xrightarrow{f \searrow} f(x_1) > f(x_2)$ (3) και

$x_1 + 1 < x_2 + 1 \xrightarrow{f \searrow} f(x_1 + 1) > f(x_2 + 1)$ (4). Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $f(x_1) + f(x_1 + 1) > f(x_2) + f(x_2 + 1) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως $f(x) + f(x+1) = f(x^2) + f(x^2+1) \Leftrightarrow g(x) = g(x^2) \xrightarrow{g \uparrow} x = x^2 \Leftrightarrow (x=0) \text{ ή } (x=1)$.

ε) $\eta \mu^3 x + 2\eta \mu x = x^3 + 2x \xrightarrow{(2)} -3\eta \mu x = -3x \Leftrightarrow \eta \mu x = x \Leftrightarrow x = 0$.

(Γνωρίζουμε ότι $|\eta \mu x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.)

155. α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \text{ και δευτέρα παράγωγο } f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2}. \text{ Είναι}$$

$f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$, οπότε: για κάθε

$x > 1 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$ και για κάθε

$0 < x < 1 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{x-1} \left(1 - \frac{\ln x}{e^{x-1}} \right) \right] = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{x-1}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^{x-1}} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x-1} - \ln x) = +\infty$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1, +\infty) . \text{ Στο διάστημα } \Delta_2 = [1, +\infty) \text{ η } f \text{ είναι συνεχής}$$

και γνησίως αύξουσα, άρα $f(\Delta_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty) .$ Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [1, +\infty) .$

$$\beta) \text{ Αρχικά πρέπει } \begin{cases} f(x) - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{2} \text{ ισχύει} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 .$$

Για κάθε $x > 1 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f(x) > f(1)$ και για κάθε $0 < x < 1 \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f(x) > f(1)$, οπότε:

$$f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1 = f(1) \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$$

Επειδή το $\frac{3}{2}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του $[1, +\infty)$, υπάρχει x_1 στο εσωτερικό

του $(0, 1]$ και x_2 στο εσωτερικό του $[1, +\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = \frac{3}{2}$ και

$$f(x_2) = \frac{3}{2} . \text{ Επειδή επιπλέον η } f \text{ είναι γνησίως μονότονη στα αντίστοιχα}$$

διαστήματα, τα x_1, x_2 είναι τα μοναδικά στα διαστήματα αυτά.

156. α) Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$h'(x) = e^x (f(x) + f'(x)) \text{ και δεύτερη παράγωγο}$$

$$h''(x) = e^x (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) > 0 \Rightarrow$$

$$h' \nearrow (0, +\infty) . \text{ Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την } h \text{ στο } [x-1, x], x > 1$$

οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1, x)$, $\xi_2 \in (x, x+1)$, τέτοια ώστε

$$h'(\xi_1) = h(x) - h(x-1) = e^x f(x) - e^{x-1} f(x-1) \text{ και}$$

$$h'(\xi_2) = h(x+1) - h(x) = e^{x+1} f(x+1) - e^x f(x) . \text{ Είναι}$$

$$\xi_1 < x < \xi_2 \stackrel{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(\xi_1) < h'(x) < h'(\xi_2) \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) - e^{x-1} f(x-1) < e^x (f(x) + f'(x)) < e^{x+1} f(x+1) - e^x f(x) \stackrel{:e^x}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) - \frac{f(x-1)}{e} < f(x) + f'(x) < ef(x+1) - f(x), x > 1.$$

β) Από τη σχέση (1) έχουμε $h(x) - h(x-1) < h'(x) < h(x+1) - h(x)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x-1) \stackrel{x-1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x+1) \stackrel{x+1=k}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} h(k) = 2 \quad \text{οπότε} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - h(x-1)) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x+1) - h(x)) = 0. \text{ Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x f(x) + e^x f'(x)) = 0. \text{ Θέτουμε}$$

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = \varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0. \text{ Τότε } e^x f'(x) = \varphi(x) - e^x f(x)$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi(x) - e^x f(x)) = 0 - 2 = -2.$$

γ) Έστω $e^x f'(x) = t(x) \Leftrightarrow f'(x) = t(x)e^{-x}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} t(x)e^{-x} = -2 \cdot 0 = 0.$$

157. α) Είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [2, 3]$, οπότε $f'(x) \geq f'(3) = 1 > 0 \Rightarrow f \nearrow [2, 3]$.

β) Είναι $f([2, 3]) \stackrel{f'}{=} [f(2), f(3)] = [0, 2]$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 3$ έχει εξίσωση

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y = x - 1$$

δ) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2, 3]$ οπότε υπάρχει

$\xi_1 \in (2, 3) : f'(\xi_1) = f(3) - f(2) = 2$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την

$$f' \text{ στο } [\xi_1, 3] \text{ οπότε υπάρχει } \xi \in (\xi_1, 3) : f''(\xi) = \frac{f'(3) - f'(\xi_1)}{3 - \xi_1} = \frac{1 - 2}{3 - \xi_1} = \frac{-1}{3 - \xi_1}.$$

$$\text{Είναι } f''(\xi) < -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{3 - \xi_1} < -1 \Leftrightarrow 3 - \xi_1 > 0 \Leftrightarrow \xi_1 < 3 \text{ που ισχύει.}$$

ε) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα

$[2, x], [x, 3], 2 < x < 3$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (2, x), x_2 \in (x, 3)$:

$$f'(x_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x)}{x - 2} \quad \text{και} \quad f'(x_2) = \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \frac{2 - f(x)}{3 - x} \quad \text{Είναι}$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x - 2} > \frac{2 - f(x)}{3 - x} \Leftrightarrow$$

$$3f(x) - \cancel{xf(x)} > 2x - 4 - \cancel{xf(x)} + 2f(x) \Leftrightarrow f(x) > 2(x - 2). \text{ Επειδή}$$

$$f(2) = 2(2 - 2) = 0 \text{ και } f(3) = 2(3 - 2) = 2 \text{ τελικά } f(x) \geq 2(x - 2) \text{ για}$$

κάθε $x \in [2, 3]$.

158. α) Αν υπήρχε $\rho \in (0, 2)$ με $f(\rho) = 0$ τότε $[f'(\rho)]^2 + f(\rho)f''(\rho) = -1 \Leftrightarrow [f'(\rho)]^2 = -1$ άτοπο, άρα $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, 2)$. Επειδή $f(1) = \sqrt{3} > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$.

β) Είναι $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = -1 \Leftrightarrow [f'(x)f(x)]' = (-x)' \Leftrightarrow f'(x)f(x) = -x + c, c \in \mathbb{R}$. Για $x = 1$ είναι $f'(1)f(1) = -1 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα $f'(x)f(x) = -x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = -2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (-x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = -x^2 + c'$. Για $x = 1$ είναι $f^2(1) = -1 + c' \Leftrightarrow c' = 4$, άρα $f^2(x) = 4 - x^2$. Επειδή $f(x) > 0$ είναι $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in (0, 2)$. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow f(2) = 0$.

Επομένως $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (0, 2)$ με παράγωγο

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} < 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [0, 2].$$

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = y \text{ με } y \geq 0 \text{ (1) οπότε } 4 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow 4 - y^2 = x^2 \text{ (2).}$$

Πρέπει $4 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 4 \Leftrightarrow |y| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$ οπότε από την (1) είναι

$$0 \leq y \leq 2. \text{ Η (2) γίνεται: } x = \sqrt{4 - y^2}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \sqrt{4 - y^2}, y \in [0, 2], \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}, x \in [0, 2].$$

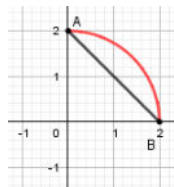
ε) Είναι $4 - y^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ με $x \in [0, 2], y \in [0, 2]$. Η γραφική παράσταση της f είναι το τεταρτοκύκλιο του διπλανού σχήματος και το AB είναι χορδή του. Η μέγιστη χορδή είναι αυτή του σχήματος και έχει μήκος

$$(AB) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \text{ άρα } (AB) \leq 2\sqrt{2}$$

στ) Έστω $M(x(t), y(t))$ όπου t ο χρόνος σε sec με $t \geq 0$.

$$\text{Είναι } y(t) = \sqrt{4 - x^2(t)} \text{ και } x'(t) = 0,1 \text{ μ.μ./sec.}$$

ι. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το A , τότε:



$x(t_0) = \sqrt{3}$, $y(t_0) = 1$. Είναι $y'(t) = \left(\sqrt{4-x^2(t)}\right)' = \frac{-2x(t)x'(t)}{2\sqrt{4-x^2(t)}}$ και την

$$\text{χρονική στιγμή } t_0 : y'(t_0) = -\frac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{4-x^2(t_0)}} = -\frac{0,1 \cdot \sqrt{3}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{10} \text{ μ.μ. / sec}$$

ii. $E(t) = (OK)(O\Lambda) = x(t)y(t)$

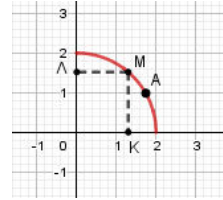
Είναι $E'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$ και την χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0) = x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) = -0,2(\text{μ.μ.})^2 / \text{sec}$$

ζ) Έστω $K(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f , Η εφαπτομένη της

C_f στο K είναι η

$$\text{ευθεία } \varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



$$\Leftrightarrow y - \sqrt{4-x_0^2} = -\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x - x_0). \text{ Για } y = 0 \text{ είναι } x = \frac{4}{x_0} \text{ και για } x = 0 \text{ είναι}$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}, \text{ δηλαδή η } \varepsilon \text{ τέμνει τους άξονες στα σημεία } B\left(\frac{4}{x_0}, 0\right) \text{ και}$$

$$\Gamma\left(0, \frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}\right). \text{ Είναι } (OB\Gamma) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OB)(O\Gamma) = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{x_0} \cdot \frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}} = 2\alpha \Leftrightarrow 8 = \alpha x_0 \sqrt{4-x_0^2} \Leftrightarrow 64 = \alpha^2 x_0^2 (4-x_0^2) \quad (3). \text{ Θέτουμε}$$

$$x_0^2 = \omega \geq 0 \text{ οπότε η (3) γίνεται: } 64 = \alpha^2 \omega (4-\omega) \Leftrightarrow 64 = 4\alpha^2 \omega - \alpha^2 \omega^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \omega^2 - 4\alpha^2 \omega + 64 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Η (4) είναι 2ου βαθμού ως προς } \omega \text{ με } \Delta = 16\alpha^4 - 256\alpha^2 = 16\alpha^2(\alpha^2 - 16).$$

$$\text{Αν } \Delta > 0 \Leftrightarrow 16\alpha^2(\alpha^2 - 16) > 0 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 16 \Leftrightarrow \alpha > 4 \text{ η (4) έχει ρίζες}$$

$$\text{τις } \omega = \frac{4\alpha^2 \pm 4\alpha\sqrt{\alpha^2 - 16}}{2\alpha^2} = 2 \pm \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}. \text{ Επειδή } x_0 \in [0, 2], \text{ είναι}$$

$$0 \leq x_0^2 \leq 4, \text{ άρα } 0 \leq \omega \leq 4.$$

$$\text{Αν } \omega = 2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}, \text{ τότε } 2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 - 16} \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 \leq \alpha^2$$

$$\text{που ισχύει. Αν } \omega = 2 - \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}, \text{ τότε}$$

$$2 - \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16} \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt{\alpha^2 - 16} \Leftrightarrow \alpha^2 \geq \alpha^2 - 16 \text{ ισχύει.}$$

$$\text{Τότε } x_0^2 = 2 + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16} \quad x_0 \in [0, 2] \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2 + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16}} \text{ ή}$$

$$x_0^2 = 2 - \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16} \quad x_0 \in [0, 2] \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2 - \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16}}. \text{Οπότε η } C_f \text{ δέχεται δύο}$$

εφαπτόμενες που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α .

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$, τότε η (4) γίνεται

$$16\omega^2 - 64\omega + 64 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 4\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2.$$

Τότε $x_0^2 = 2 \quad x_0 \in [0, 2] \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2}$ και η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη στη περίπτωση αυτή.

Τέλος αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 4$ η (4) είναι αδύνατη και δεν υπάρχουν τέτοιες εφαπτόμενες. Επομένως έχει δύο εφαπτομένες για $\alpha > 4$.

159. α) Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με παράγωγο

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) + 1 - \sin x \text{ και δεύτερη παράγωγο}$$

$$g''(x) = 2f'(x) + xf''(x) + \eta \mu x \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = 2f'(x) + x \left(-\frac{2f'(x) + \eta \mu x}{x} \right) + \eta \mu x = 2f'(x) - 2f'(x) - \eta \mu x + \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{Είναι}$$

$$g'(\pi) = f(\pi) + \pi f'(\pi) + 1 - \sin \pi = -1 - 1 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ άρα}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c', c' \in \mathbb{R}. \text{Είναι } g(\pi) = -\pi + \pi - 0 = 0, \text{ άρα } g(x) = 0 \text{ για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\beta) \text{Είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) + x - \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow xf(x) = \eta \mu x - x. \text{Για } x \in (0, \pi]$$

$$\text{είναι } f(x) = \frac{\eta \mu x}{x} - 1. \text{Επειδή η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } [0, \pi] \text{ είναι συνεχής}$$

$$\text{στο } x = 0, \text{ άρα } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0, \text{ επομένως}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x} - 1, & 0 < x \leq \pi \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x \left(\frac{\eta \mu x}{x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\eta \mu x - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\eta \mu x - x} \right] = +\infty(-\infty) = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta \mu x - x} \stackrel{\eta \mu x - x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1}{u} = -\infty \text{ αφού } |\eta \mu x| \leq |x| \text{ και για } x > 0 \text{ είναι}$$

$$|\eta \mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta \mu x < x \Rightarrow \eta \mu x - x < 0.$$

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi]$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{x \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x}{x^2}$. Έστω

$h(x) = x \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x$, $x \in [0, \pi]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με παράγωγο

$h'(x) = \sigma \upsilon \nu x - x \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x = -x \eta \mu x < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, η h είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Για κάθε $0 < x < \pi$ είναι $h(x) < h(0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, \pi]$.

ε) Έστω $t(x) = f(x) + \frac{1}{6}x^2$, $x \in [0, \pi]$. Είναι $t'(x) = \frac{3x \sigma \upsilon \nu x - 3\eta \mu x + x^3}{3x^2}$.

Έστω $\varphi(x) = 3x \sigma \upsilon \nu x - 3\eta \mu x + x^3$, $x \in [0, \pi]$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με παράγωγο $\varphi'(x) = 3x(x - \eta \mu x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ άρα η φ είναι $\nearrow [0, \pi]$. Για κάθε $0 < x \leq \pi$ είναι $\varphi(x) > \varphi(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > -\frac{1}{6}x^2$.

160. α) Για $x > 0$ η $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0 = 0$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1 = f(0). \text{ Άρα η } f \text{ συνεχής στο } [0, +\infty).$$

β) Για $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \frac{x - \ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1) - x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2x+2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} \frac{x - \ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)} & , x > 0 \\ -\frac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}$$

γ) Έστω $g(x) = x - \ln(x+1)(x+1)$, $x \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = -\ln(x+1) < 0$ για $x > 0$, άρα $g \searrow [0, +\infty)$.

Επομένως για $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) = 0$. Άρα

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x+1)} < 0 \Rightarrow f \searrow (0, +\infty), \text{ άρα } 0 < x < x+1 \Rightarrow$$

$$f(x) > f(x+1) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x} > \frac{\ln(x+2)}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)^{x+1} > (x+2)^x, \text{ οπότε για } x = 1820 \text{ προκύπτει } 1821^{1821} > 1822^{1820}, \text{ δηλαδή } \alpha > \beta.$$

δ) Είναι $f(e^x) \leq \frac{x+k}{e^x} \Leftrightarrow \frac{\ln(e^x+1)}{e^x} \leq \frac{x+k}{e^x} \Leftrightarrow \ln(e^x+1) - x \leq k$ για κάθε $x \geq 0$.

Έστω $\varphi(x) = \ln(e^x+1) - x$, $x \geq 0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - 1 = \frac{e^x - e^x - 1}{e^x+1} = -\frac{1}{e^x+1} < 0, \text{ άρα } \varphi \searrow \text{ στο } [0, +\infty). \text{ Συνεπώς για } x \geq 0 \text{ είναι } \varphi(x) \leq \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \ln 2. \text{ Άρα } k_{\min} = \ln 2.$$

ε) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)} - e + \lambda x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{f(x)} - e}{x} + \lambda \right] = 0 \quad (1)$. Αρκεί να

υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)} - e}{x}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1, \text{ οπότε το όριο είναι της μορφής } \left(\frac{0}{0} \right). \text{ Έχουμε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)} - e}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{1} \text{ με } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{f(x)} = e^1 = e \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{x - \ln(x+1)(x+1)}{x^2} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(x+1)(x+1)}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1 - \ln(x+1)}{2x} \stackrel{0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x+1}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} e^{f(x)} \cdot f'(x) = e \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{e}{2}. \text{ Συνεπώς από (1)} \Rightarrow -\frac{e}{2} + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{e}{2}.$$

161. α) i. Έστω $g(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$, $x > 0$. Η g είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $g'(t) = \frac{1}{t}$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε :

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x. \text{ Είναι } x < \xi < x+1 \text{ άρα}$$

$$\frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} - \ln x - \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (\ln(x+1) - \ln x) + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} = -\frac{1}{x+1} < 0, \text{ άρα}$$

$$f \searrow (0, +\infty).$$

$$\text{β)} \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\left(-\frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \stackrel{y=1+\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ y \rightarrow 1}} \ln y = 0.$$

γ) Είναι $f(x) = x \ln(x+1) - x \ln x - \ln x = x(\ln(x+1) - \ln x) - \ln x =$

$$x \ln \frac{x+1}{x} - \ln x = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \ln x. \text{ Είναι :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty. \text{ Για το σύνολο τιμών της } f, \text{ έχουμε :}$$

$$f(A) = f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) =]\mathbb{R}.$$

Επειδή $0 \in f(A)$ και $f \searrow (0, +\infty)$ υπάρχει μοναδικός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος, ώστε :
 $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \ln(\alpha+1) - (\alpha+1) \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)^\alpha = \ln \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow (\alpha+1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1}$.

162. α) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > -1$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{\ln(x+1) + x}{x+1}. \text{ Έστω } g(x) = \ln(x+1) + x, x > -1. \text{ Η } g \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη για κάθε $x > -1$ με παράγωγο $g'(x) = 1 + \frac{1}{x+1} > 0$. Επομένως η g

είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$ οπότε η g

έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$. Για κάθε $-1 < x < 0 \xRightarrow{g'} g(x) < g(0) = 0$ και για

κάθε $x > 0 \xRightarrow{g'} g(x) > g(0)$.

Επομένως για κάθε $-1 < x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-1, 0]$ και για κάθε $x > 0$

είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$ αφού η f είναι συνεχής στο $(-1, +\infty)$.

β) Είναι $2x + \ln^2(x+1) = 2 \ln(x+1) \xLeftrightarrow{\cdot 2} x + \frac{\ln^2(x+1)}{2} = \ln(x+1) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Όμως για κάθε $-1 < x < 0 \xRightarrow{f \searrow} f(x) > f(0) = 0$ και για κάθε $x > 0 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) > f(0)$

άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$.

γ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -1^+, u \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty$, είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{2} \frac{\ln^2(x+1)}{x} \right) \right] = +\infty \cdot (1 - 0 + 0) = +\infty$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\infty}{=} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(x+1)}{x} \stackrel{\infty}{=} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x+1)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} \stackrel{\infty}{=} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = 0$.

Για το $\Delta_1 = (-1, 0]$ είναι $f(\Delta_1) = [0, +\infty)$ και για το $\Delta_2 = [0, +\infty)$ είναι

$f(\Delta_2) = [0, +\infty)$, οπότε το $f(A) = [0, +\infty)$.

δ) Επειδή $f(\Delta_1) = [0, +\infty)$, υπάρχει $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 1$. Επειδή

$f(\Delta_2) = [0, +\infty)$, υπάρχει $x_2 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 1$. Στο διάστημα

$[x_1, x_2]$ η f είναι συνεχής, και επιπλέον είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$.

163. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$.

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

β) i. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $g'(x) = e^{f(x)} f'(x) > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών

$$g((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (1, +\infty) = A_{g^{-1}}.$$

$$\text{Θέτουμε } g(x) = y \Leftrightarrow e^{\ln^2 x} = y \Leftrightarrow \ln^2 x = \ln y \Leftrightarrow \ln x = \sqrt{\ln y} \Leftrightarrow x = e^{\sqrt{\ln y}} \Leftrightarrow$$

$$x = e^{\ln y^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} \text{ άρα } g^{-1}(x) = \sqrt{x}, x > 1.$$

ii. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, ισχύει:

$$g(x) > g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(x) > x \Leftrightarrow e^{\ln^2 x} > x \Leftrightarrow \ln^2 x > \ln x \Leftrightarrow$$

$$\ln x \cdot (\ln x - 1) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e.$$

$$\text{iii. Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g^{-1}(x) - 1}{\sqrt[4]{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\sqrt{\ln x}} - 1}{\sqrt{\ln x}} \stackrel{\sqrt{\ln x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \stackrel{\frac{0}{0}}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u}{1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln g^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{\sqrt{\ln x}}}{\ln^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{\ln^2 x} \stackrel{k = \ln x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ k \rightarrow +\infty}} \frac{\sqrt{k}}{k^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 0.$$

$$\gamma) 2\left(1 - \frac{e}{\pi}\right) \ln \pi < \ln \frac{\pi}{e} \ln(\pi e) < \frac{2\pi}{e} - 2 \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{\pi - e}{\pi}\right) \ln \pi < (\ln \pi - \ln e)(\ln \pi + \ln e) < 2\frac{\pi - e}{e} \Leftrightarrow$$

$$2\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln^2 \pi - \ln^2 e}{\pi - e} < 2\frac{\ln e}{e}. \text{ Για την } f \text{ εφαρμόζεται το } \Theta.M.T \text{ στο } [e, \pi] \text{ οπότε}$$

$$\text{υπάρχει } \xi \in (e, \pi) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} = \frac{\ln^2 \pi - \ln^2 e}{\pi - e}. \text{ Είναι}$$

$f''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ για κάθε $x > e$, άρα η f' είναι $\searrow [e, +\infty)$. Όμως

$$e < \xi < \pi \Leftrightarrow f'(\xi) > f'(\pi) \Leftrightarrow 2 \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln^2 \pi - \ln^2 e}{\pi - e} < 2 \frac{\ln e}{e}.$$

164. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = e^x + 3x^2$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ 1-1}$.

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow x = 0.$$

Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow xf(x) > 0$ και για κάθε

$x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow xf(x) > 0$. Άρα $xf(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $g(-1) = -3$, $g(0) = 1$, δηλαδή $g(-1)g(0) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολυωνμική στο $[-1, 0]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\rho \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho) = 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = 3x^2 - 2x + 2 > 0$ ($\Delta < 0$) $\Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$ οπότε το ρ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 0)$ άρα

$\alpha = -1$. Είναι $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$, δηλαδή $g\left(-\frac{1}{2}\right)g(0) < 0$ και επειδή η g είναι

συνεχής ως πολυωνμική στο $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος Θ.Bolzano, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Όμως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της g στο $(-1, 0)$, άρα $\rho \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

επομένως βρίσκεται πλησιέστερα στο 0.

γ) Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = e^x + x^2 - 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $h'(x) = e^x + 2x - 2$ και δεύτερη παράγωγο $h''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow h' \nearrow \mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} h'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = +\infty$ οπότε η h' έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R} : h'(x_1) = 0$. Επειδή $h'(0) = -1 < 0$, $h'(1) = e > 0$ δηλαδή $h'(0) \cdot h'(1) < 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_1 \in (0, 1) : h'(x_1) = 0$.

Για κάθε $x < x_1 \Leftrightarrow h'(x) < h'(x_1) = 0 \Rightarrow h \searrow (-\infty, x_1]$ και για κάθε

$x > x_1 \Leftrightarrow h'(x) > h'(x_1) = 0 \Rightarrow h \nearrow [x_1, +\infty)$. Είναι
 $h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{x_1} + 2x_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_1} = 2 - 2x_1$ (1), οπότε
 $h(x_1) = e^{x_1} + x_1^2 - 2x_1 - 2 = 2 - 2x_1 + x_1^2 - 2x_1 - 2 = x_1^2 - 4x_1 = x_1(x_1 - 4) < 0$.
Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.
Ακόμη $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.
Στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ είναι $h(\Delta_1) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό
 $\rho_1 \in \Delta_1$ άρα $\rho_1 < 0$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_1) = g(\rho_1)$.
Στο $\Delta_2 = [0, x_1]$ είναι $h(\Delta_2) = [h(x_1), -1]$ οπότε η h δεν έχει ρίζα στο Δ_2 .
Τέλος στο $\Delta_3 = [x_1, +\infty)$ είναι $h(\Delta_3) = [h(x_1), +\infty)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_3)$ υπάρχει
μοναδικό $\rho_2 \in \Delta_3$ άρα $\rho_2 > 0$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_2) = g(\rho_2)$.
Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

δ) Έστω $\varphi(x) = e^x + \frac{x^4}{4} - x - 1, x \in \mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x) = e^x + x^3 - 1 = f(x)$, οπότε:
για $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi \searrow (-\infty, 0]$ οπότε για $x \leq 0$ είναι
 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ και για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow [0, +\infty)$ άρα
 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ και για κάθε $x \geq 0$.
Άρα $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{x^4}{4} - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{x^4}{4} \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^v x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\eta\mu^v x)}{\eta\mu^v x} \cdot \frac{\eta\mu^v x}{x^v} \right)$ (1). Θέτουμε $\eta\mu^v x = u$ με $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$,
τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^v x)}{\eta\mu^v x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u + u^3 - 1}{u} \stackrel{\text{DLH } u \rightarrow 0}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u + 3u^2}{1} = 1$. Επίσης
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^v x}{x^v} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^v = 1$, οπότε (1) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^v x)}{x^v} = 1 \cdot 1 = 1$.

στ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο,
ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta + \beta^3 - \beta - e^\alpha - \alpha^3 - \alpha - 1}{\beta - \alpha} =$
 $\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{(\cancel{\beta - \alpha})(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)}{\cancel{\beta - \alpha}} \Leftrightarrow$

$f'(\xi_1) = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2$ (2). Έστω $a(x) = e^x$, $x \in [\alpha, \beta]$. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την a στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $a'(\xi_2) = \frac{a(\beta) - a(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{\xi_2} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}$ (3). Από τις (2), (3) $\Rightarrow f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2$.

165.α) Είναι $f'(0) = 2f(0)(0 - \eta\mu 0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^2}{x} = 0.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - e^2 f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(x) - e^2)}{x} = f(0)f'(0) = 0.$$

β) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει ότι $|\eta\mu x| < |x|$. Αν $x > 0$, τότε $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Rightarrow x - \eta\mu x > 0$ και επειδή $f(x) > 0$, από τη σχέση $f'(x) = 2f(x)(x - \eta\mu x)$ προκύπτει ότι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Αν $x < 0$, τότε $|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Rightarrow x - \eta\mu x < 0$ και επειδή $f(x) > 0$, από τη σχέση $f'(x) = 2f(x)(x - \eta\mu x)$ προκύπτει ότι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(x) = 2f(x)(x - \eta\mu x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x - 2\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$[\ln(f(x))]' = (x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow \ln(f(x)) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x + c, \quad c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } \ln(f(0)) = 2 + c \Leftrightarrow 2 = 2 + c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα}$$

$$\ln(f(x)) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x}$$

δ) Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0)$ και για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0)$. Όμως $f(0) = 0$ άρα $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x} \geq e^2 \Leftrightarrow x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\epsilon) \text{ Έστω } g(x) = f(x)f'(x) + x^2 - 1 - ef'(x) = f'(x)(f(x) - e) + x^2 - 1, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Είναι } g(0) = f'(0)^0 (f(0) - e) - 1 = -1 < 0 \text{ και}$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\right) + \frac{\pi^2}{4} - 1 = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\right) + \frac{\pi^2}{4} - 1 \Leftrightarrow$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\right) + \frac{\pi^2}{4} - 1 = 2e^{\frac{\pi^2}{4}}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(e^{\frac{\pi^2}{4}} - e\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) > 0$$

γιατί $\frac{\pi}{2} > 1 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{\pi^2}{4}} > e$. Επομένως $g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και επειδή η g είναι

συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

166.α) Επειδή $e^{-x} + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $A_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in A_f$ και

$$-x \in A_f. \text{ Επίσης } f(-x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -\frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -f(x), \text{ άρα}$$

η f είναι περιττή.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$(f(-x))' = (-f(x))' \Leftrightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x) \text{ άρα}$$

$$(f'(-x))' = f''(x) \Leftrightarrow -f''(-x) = f''(x) \text{ οπότε}$$

$$(-f''(-x))' = f^{(3)}(x) \Leftrightarrow f^{(3)}(-x) = f^{(3)}(x), \text{ άρα η } f^{(3)} \text{ είναι άρτια.}$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(e^{-x} + 1) - (e^{-x} - 1)(-e^{-x})}{(e^{-x} + 1)^2} = \frac{-2e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} < 0 \Rightarrow f \searrow_{\mathbb{R}}$$

δ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

1ος τρόπος εύρεσης αντιστροφής:

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \text{ άρα επειδή η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως}$$

$$\text{φθίνουσα στο } \mathbb{R} \text{ έχει σύνολο τιμών το } f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right) = (-1, 1).$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-1 < y < 1$ είναι :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = y \Leftrightarrow e^{-x} - 1 = ye^{-x} + y \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} - ye^{-x} = y + 1 \Leftrightarrow e^{-x}(1 - y) = y + 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y + 1}{1 - y} \Leftrightarrow$$

$$-x = \ln \frac{y + 1}{1 - y} \Leftrightarrow x = -\ln \frac{y + 1}{1 - y} \text{ άρα } f^{-1}(y) = -\ln \frac{y + 1}{1 - y}, y \in (-1, 1) \text{ οπότε}$$

$$f^{-1}(x) = -\ln \frac{x + 1}{1 - x}, x \in (-1, 1).$$

2ος τρόπος εύρεσης αντίστροφης:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = y \Leftrightarrow e^{-x} - 1 = ye^{-x} + y \Leftrightarrow e^{-x} - ye^{-x} = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}(1 - y) = y + 1 \quad (3). \text{ Αν } y = 1 \text{ τότε η (3) γίνεται } 0 = 2 \text{ και είναι αδύνατη.}$$

$$\text{Για } y \neq 1 \text{ είναι } e^{-x} = \frac{y + 1}{1 - y}. \text{ Επειδή για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } e^{-x} > 0, \text{ έχουμε}$$

$$\frac{y + 1}{1 - y} > 0 \Leftrightarrow (y + 1)(1 - y) > 0 \Leftrightarrow -1 < y < 1.$$

$$\text{Από τη σχέση (3) για } y \in (-1, 1) \text{ έχουμε: } -x = \ln \frac{y + 1}{1 - y} \Leftrightarrow x = -\ln \frac{y + 1}{1 - y}, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = -\ln \frac{y + 1}{1 - y}, y \in (-1, 1) \text{ οπότε } f^{-1}(x) = -\ln \frac{x + 1}{1 - x}, x \in (-1, 1).$$

$$\text{ε) Είναι } e^{f(x)}(f(x) + 1) + f(x) < 1 \Leftrightarrow f(x) + 1 + \frac{f(x)}{e^{f(x)}} < \frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(x)e^{-f(x)} < e^{-f(x)} - 1 \Leftrightarrow f(x)(1 + e^{-f(x)}) < e^{-f(x)} - 1 \Leftrightarrow f(x) < \frac{e^{-f(x)} - 1}{e^{-f(x)} + 1} \Leftrightarrow$$

$$f(x) < f(f(x)) \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} x > f(x) \Leftrightarrow f(x) - x < 0 \quad (5)$$

$$\text{Έστω } h(x) = f(x) - x, x \in \mathbb{R}. \text{ Παρατηρούμε ότι } h(0) = f(0) - 0 = 0.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$ και $-x_1 > -x_2$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη: $f(x_1) - x_1 > f(x_2) - x_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2) \Leftrightarrow h \searrow \mathbb{R}.$

$$\text{Η σχέση (5) γίνεται: } h(x) < h(0) \stackrel{h \searrow}{\Leftrightarrow} x > 0$$

στ) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = x + \kappa \Leftrightarrow f(x) - x = \kappa \Leftrightarrow h(x) = \kappa$ να έχει ακριβώς μία ρίζα για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. Από δ) ερώτημα είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$,

οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 1 + \infty = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1 - \infty = -\infty.$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε έχει σύνολο τιμών το

$$h(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = \mathbb{R}. \text{ Επειδή το } \kappa \text{ περιέχεται στο σύνολο τιμών}$$

της h και η h είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h(\rho) = 0$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται $e^x = e^{f(x)} + e^x e^{f(x)} \Leftrightarrow e^{f(x)} (e^x + 1) = e^x \Leftrightarrow$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{e^x + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = x - \ln(e^x + 1) \text{ και } f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

Επομένως, η εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{16}$ γίνεται

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow e^x + 1 = 16 \Leftrightarrow e^x = 15 \Leftrightarrow x = \ln 15. \text{ Σωστή απάντηση Γ.}$$

2. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f'(x)}{x} \right)^{1(+\infty)} = +\infty$, άρα $f'(x) > 1$ για κάθε $x > x_0$

οπότε η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0, +\infty)$ αφού

$$g'(x) = f'(x) - 1 > 0. \text{ Για } x > x_0 + 1 \text{ είναι } g(x) > g(x_0 + 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - x > f(x_0 + 1) - (x_0 + 1) \Leftrightarrow f(x) > x + f(x_0 + 1) - x_0 - 1$$

Με $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(x_0 + 1) - x_0 - 1) = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{Συνεπώς } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Σωστή απάντηση Γ.

3. Έστω $g(x) = f(x) - x^2$ με $g'(x) = f'(x) - 2x > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και για

$$x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x^2 > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x^2 + f(0) \quad (1)$$

Επίσης, θεωρούμε την $h(x) = f(x) - x^2 - x$ με $h'(x) = f'(x) - 2x - 1 < 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και για

$$x > 0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - x^2 - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x^2 + x + f(0) \quad (2)$$

Από (1),(2) είναι

$$x^2 + f(0) < f(x) < x^2 + x + f(0) \Leftrightarrow 1 + \frac{f(0)}{x^2} < \frac{f(x)}{x^2} < 1 + \frac{1}{x} + \frac{f(0)}{x^2}$$

Και από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$

Σωστή απάντηση Α.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = (1-x)f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = (1-x)f'(x) - f(x) > 0$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα για $0 < 1 \Leftrightarrow h(0) < h(1) \Leftrightarrow f(0) < 0$. **Σωστή απάντηση Δ.**

5. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 - (1-x)(\ln x - 2)$ είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = 2x - \left[-(\ln x - 2) + (1-x) \frac{1}{x} \right] = 2x - \frac{1}{x} + \ln x - 1 \quad \text{και}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{αφού } x > 0. \quad \text{Οπότε η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα και } f'(1) = 0.$$

Αν $0 < x < 1$ τότε $f'(x) < f'(1) = 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

$A_1 = (0, 1]$ και $x > 1$ θα είναι $f'(x) > f'(1) = 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$A_2 = [1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = -1$

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x + x \ln x - \ln x) = +\infty$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \quad \text{Άρα } f(A) = [-1, +\infty)$$

Σωστή απάντηση Β.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Λ	2. Λ	3. Σ	4. Λ	5. Σ	6. Λ	7. Σ	8. Λ	9. Σ
10. Λ	11. Σ	12. Λ	13. Σ	14. Σ	15. Λ	16. Σ	17. Σ	

28

Ακρότατα συνάρτησης

Μελέτη ακρότατου

25.α) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$. Για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, -1]$. Για κάθε $-1 < x < 2$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [-1, 2]$ και για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2, +\infty)$. Τοπ. μέγιστο το $f(-1) = 13$ και τοπ. ελάχιστο το $f(2) = -14$.

β) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$. Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [e, +\infty)$. Μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

γ) $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Για κάθε $x > 3$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [3, +\infty)$ και για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, -1]$. Τοπικά ελάχιστα τα $f(-1) = 0$ και $f(3) = 0$.

δ) $f'(x) = 2 - 4\eta\mu 2x \geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu 2x \leq \frac{1}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{12}$ ή $\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2x \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} \leq x \leq \pi$. Η f είναι $\nearrow$ στα $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{12}, \pi\right]$ και $\searrow$ στο $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$. Τοπικά ελάχιστα τα $f(0) = 2$, $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$ και τοπικά μέγιστα τα $f(\pi) = 2\pi + 2$, $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

ε) $f'(x) = (x-2)\ln x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$ ή $x \geq 2$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, 1]$. Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1, 2]$ και για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2, +\infty)$.

Τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{7}{4}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2) = 3 - 2\ln 2$.

στ) Επειδή $\ln x < x$ έχουμε $A_f = (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x - x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e. \text{ Για κάθε } x \in (0, e) \text{ είναι}$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [e, +\infty)$.

Ελάχιστο το $f(e) = \frac{1}{1-e}$.

26.α) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 0$, άρα f συνεχής στο 3. Για $x > 3$ είναι

$f'(x) = -2x + 4 < 0 \Rightarrow f \searrow [3, +\infty)$. Για $x < 3$ είναι

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$. Για κάθε $x < 1$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 1]$ και για κάθε $x \in (1, 3)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1, 3]$.

Μέγιστο το $f(1) = 20$.

β) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, & x \leq 2 \text{ ή } x \geq 4 \\ -x^2 + 6x - 8, & 2 < x < 4 \end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x < 2 \text{ ή } x > 4 \\ -2x + 6, & 2 < x < 4 \end{cases}$. Για κάθε $x < 2$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 2]$.

Για κάθε $x > 4$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [4, +\infty)$. Για κάθε $x \in (2, 3)$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2, 3]$ και για κάθε $x \in (3, 4)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [3, 4]$.

Τοπ. ελάχιστα τα $f(2) = 0$, $f(4) = 0$ και τοπ. μέγιστο το $f(3) = 1$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -8 = f(2)$ άρα η f είναι συνεχής στο 2.

$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 2 \\ 2x - 6, & x > 2 \end{cases}$. Για κάθε $x < 2$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 2]$, για

κάθε $x \in (2, 3)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [2, 3]$ και για κάθε $x > 3$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [3, +\infty)$. Τοπ. ελάχιστο το $f(3) = -9$ και τοπικό μέγιστο το

$f(2) = -8$.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Είναι $f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$ και

για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 0 το

$f(0) = -2$.

27.α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[a, \beta)$ και σύνολο τιμών το σύνολο $[f(a), \ell_1) \cup (\ell_2, \ell_1)$.

β) Η f δεν είναι συνεχής στα σημεία x_1, x_2 και x_3 .

γ) Παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = a$ το $f(a)$.

Παρατηρούμε ότι στο x_1 η τιμή της συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_1 , δηλαδή υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε $x \in (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 το $f(x_1)$.

Ομοίως παρατηρούμε ότι στο x_2 η τιμή της συνάρτησης είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του x_2 , δηλαδή ότι υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε $x \in (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_2 το $f(x_2)$.

Στο x_3 δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, καθώς βλέπουμε ότι υπάρχει $\delta_3 > 0$ για το οποίο ισχύει $f(x) \geq f(x_3)$ για κάθε $x \in (x_3 - \delta_3, x_3)$ και $\delta_4 > 0$ για το οποίο ισχύει $f(x) \leq f(x_3)$ για κάθε $x \in (x_3, x_3 + \delta_4)$.

Το $f(a)$ είναι ολικό ελάχιστο και το παρουσιάζει μόνον για $x = a$.

Η συνάρτηση f δεν έχει ολικό μέγιστο.

28.α) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως

πολυνωμική. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ άρα η f δεν

είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Είναι $f \searrow (-\infty, 0]$, $f \nearrow [0, 1]$ και $f \searrow (1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$. Στο $x_0 = 1$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο,

καθώς βλέπουμε ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ για το οποίο ισχύει $f(x) \leq f(1)$ για κάθε

$x \in (1 - \delta_1, 1)$ και $\delta_2 > 0$ για το οποίο ισχύει $f(x) \geq f(1)$ για

κάθε $x \in (1, 1 + \delta_2)$.

β) Η g είναι σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

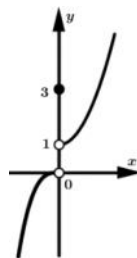
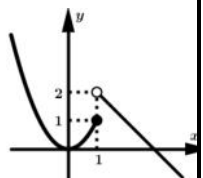
ως πολυνωμική. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ άρα η g δεν

είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Είναι $g \nearrow (-\infty, 0]$ και $g \nearrow (0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι στο $x_0 = 0$ η τιμή της συνάρτησης είναι

μεγαλύτερη από την τιμή της σε κάθε «γειτονικό» σημείο του $x_0 = 0$,

δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(x) \leq g(0)$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$ άρα η g



παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=0$ το $g(0)=3$.

γ) Η h είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ ως πολωνυμική και λογαριθμική αντίστοιχα. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 1 \neq h(1) = 0 \text{ άρα η } h \text{ δεν είναι συνεχής στο}$$

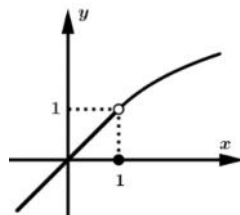
$$x_0 = 1. \text{ Είναι } h \nearrow (-\infty, 1) \text{ και } h \nearrow [1, +\infty).$$

Παρατηρούμε ότι στο $x_0 = 1$ η τιμή της συνάρτησης

είναι μικρότερη από την τιμή της σε κάθε

«γειτονικό» σημείο του $x_0 = 1$, δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$

τέτοιο ώστε $h(x) \geq h(1)$ για κάθε $x \in (1-\delta, 1+\delta)$ άρα η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το $h(1)=0$.

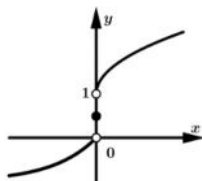


δ) Η φ είναι σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και

$(0, +\infty)$ ως εκθετική και πράξεις συνεχών αντίστοιχα.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 \text{ άρα η } \varphi \text{ δεν είναι}$$

συνεχής στο $x_0 = 0$. Είναι $\varphi \nearrow (-\infty, 0]$ και $\varphi \nearrow (0, +\infty)$.



Στο $x_0 = 0$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, καθώς βλέπουμε ότι υπάρχει

$\delta_1 > 0$ για το οποίο ισχύει $\varphi(x) \leq \varphi(1)$ για κάθε $x \in (-\delta_1, 0)$ και $\delta_2 > 0$ για το οποίο ισχύει $\varphi(x) \geq \varphi(1)$ για κάθε $x \in (0, \delta_2)$.

Αυξημένης δυσκολίας

29.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει ελάχιστο το -2 για $x = -2$, τοπικό μέγιστο

το 2 για $x = 0$ και τοπικό ελάχιστο το 1 για $x = 1$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2, 0)$, $[1, 3)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$.

β) Για κάθε $x \in [-2, 0)$ είναι $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in [0, 3)$ είναι $f'(x) > 0$,

επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2, 3]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο

$[-2, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$. Η f έχει τοπικά μέγιστα τα

$f(-2)=3$, $f(3)=4$ και ελάχιστο το $f(0)=1$. Το $f(3)=4$ είναι ολικό μέγιστο της f .

γ) Είναι $f([-2, 0]) = [1, 3]$ και $f((0, 3]) = (1, 4]$, οπότε $f([-2, 3]) = [1, 4]$.

Η f είναι γνησίως μονότονη στα $[-2, 0], (0, 3]$, το 2 περιέχεται στα $f([-2, 0])$,

$f((0, 3])$, οπότε υπάρχουν μοναδικά $x_1 \in [-2, 0]$ και $x_2 \in (0, 3]$ τέτοια, ώστε

$f(x_1) = 2 = f(x_2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο

(x_1, x_2) και $f(x_1) = f(x_2)$, εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$.

30.α) Είναι $f'(x) = e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln \lambda$. Για κάθε $x < \ln \lambda$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, \ln \lambda]$ και για κάθε $x > \ln \lambda$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [\ln \lambda, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(\ln \lambda) = \lambda - \lambda \ln \lambda - 1$.

β) Έστω $g(\lambda) = \lambda - \lambda \ln \lambda - 1$, $\lambda \geq 1$. Είναι $g'(\lambda) = -\ln \lambda < 0$ για $x \neq 1$, η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα $g \searrow [1, +\infty)$. Για κάθε $\lambda > 1$ είναι $g(\lambda) < g(1) = 0$. Άρα το ελάχιστο της f είναι αρνητικός αριθμός.

31.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

Η f είναι $\searrow (-\infty, -1]$, $\nearrow [-1, 0]$, $\searrow [0, 1]$ και $\nearrow [1, +\infty)$. Έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(-1) = \alpha - 1$, $f(1) = \alpha - 1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0) = \alpha$. Επομένως

$$A(-1, \alpha - 1), B(0, \alpha) \text{ και } \Gamma(1, \alpha - 1), \lambda_{AB} = \frac{\alpha - \alpha + 1}{1} = 1 \text{ και}$$

$$\lambda_{BF} = \frac{\alpha - 1 - \alpha}{1} = -1. \text{ Επειδή } \lambda_{AB} \cdot \lambda_{BF} = -1 \text{ είναι } AB \perp BF.$$

β) Είναι $f(0) = \alpha > 0$, $f(-1) = \alpha - 1 < 0$ και f συνεχής στο $[-1, 0]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 0)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0)$, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

32.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 4x^3 + 4x - 4\sigma\upsilon\nu x, f''(x) = 12x^2 + 4(1 + \eta\mu x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{άρα } f' \nearrow \mathbb{R}. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(4x^2 + 4 - 4 \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(4x^2 + 4 - 4 \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) \right] = +\infty.$$

$$(\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } \left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}). \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0 \text{ .)}$$

Επομένως $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ οπότε το $0 \in f'(\mathbb{R})$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$

τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Για κάθε $x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, x_0]$

και για κάθε $x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_0, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο στο x_0 .

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 2x - \eta\mu x + 1, f''(x) = 2 - \sigma\upsilon\nu x > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{x} \right) \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty.$$

(Για $x \neq 0$ είναι $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0 \text{ . Επομένως } f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \text{ οπότε το } 0 \in f'(\mathbb{R}) \text{ άρα υπάρχει}$$

μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Για κάθε

$x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, x_0]$ και για κάθε

$x > x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_0, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο x_0 .

33. Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = 2(e^x - 1) - 2\ln(x+1)$, $x > -1$. Η h είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$h'(x) = 2e^x - \frac{2}{x+1}, h''(x) = 2e^x + \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow h' \nearrow (-1, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > h'(0) = 0 \Rightarrow h' \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $-1 < x < 0$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow (-1, 0]$. Η h έχει ελάχιστο το $h(0) = 0$, οπότε $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της

εξίσωσης $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

34.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$f'(x) = 20x^3 - 60x + 20 = 20(x^3 - 3x + 1) \text{ και}$$

$$f''(x) = 20(3x^2 - 3) = 60(x^2 - 1).$$

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.

Για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [-1, 1]$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (20x^3 - 60x + 20) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 20x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 20x^3 = +\infty, f'(-1) = 60 \text{ και } f'(1) = -20. \text{ Η } f' \text{ είναι συνεχής}$$

και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = (-\infty, 60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [-1, 1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = [-20, 60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = 0$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3) = [-20, +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f'(x_3) = 0$.

Για κάθε $x < x_1 \Leftrightarrow$

$$f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow$$

$$f' \searrow (-\infty, x_1]$$

Για κάθε $x_1 < x < -1 \Rightarrow$

$f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [x_1, -1]$ Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_1)$. Για κάθε

$$-1 < x < x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [-1, x_2].$$

Για κάθε $x_2 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) = 0 \Rightarrow f' \searrow [x_2, 1]$. Η f έχει τοπικό μέγιστο

το $f(x_2)$. Για κάθε $1 < x < x_3 \Rightarrow f'(x) < f'(x_3) = 0 \Rightarrow f' \searrow [1, x_3]$ και για κάθε

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	1	x_3	$+\infty$
f'	$-\infty$		60		-20		$+\infty$
f		T.E.		T.M.		T.E.	

$x > x_3 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_3) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_3, +\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_3)$.

β) $x^4 + 4x + 1 = 6x^2 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^4 = +\infty$. Είναι

$x_1 < -1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(-1) = -40 < 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, x_1)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$. Είναι $x_2 < 1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής στο -1 , οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [x_1, x_2]$ και έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = [f(x_1), f(x_2)]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(A_2)$, υπάρχει μοναδικό ρ_2 στο εσωτερικό του A_2 τέτοιο, ώστε $f(\rho_2) = 0$. Επειδή $f(1) = 0$, η εξίσωση έχει ρίζα το 1 . Η f είναι συνεχής στο $x = 1$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = [x_2, x_3]$ και η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Είναι $x_3 > 1 \Leftrightarrow f(x_3) < f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_4 = [x_3, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_4) = [f(x_3), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_4)$ η f έχει μοναδική ρίζα ρ_3 στο A_4 . Τελικά η f έχει τέσσερις ρίζες. Ακέραια ρίζα της f είναι το 1 . Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 5 , δηλαδή οι $\pm 1, \pm 5$. Είναι $f(-1) = -40 \neq 0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα. Μοναδική ακέραια ρίζα της f είναι το 1 .

35. Είναι $f'(x) + (x-1)^3 f^2(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -(x-1)^3 f^2(x)$. Αν $x < 1$ τότε $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 1]$ και αν $x > 1$ τότε $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(1)$.

36. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + \sin x + 1$ και $f''(x) = 2 - \eta\mu x > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x} \right) \right] = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty.$$

(Για $x \neq 0$ είναι $\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$. Όμως

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 . \text{ Επειδή η } f' \text{ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο}$$

τιμών το $f'(A) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f'(A)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_1) = 0 . \text{ Για κάθε } x < x_1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, x_1] \text{ και για κάθε}$$

$$x > x_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [x_1, +\infty) . \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο στο } x_1 .$$

Παρατηρούμε ότι $f'(0) = 2 > 0 = f'(x_1) \Leftrightarrow x_1 < 0$. Είναι

$$x_1 < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(0) = -1, \text{ άρα } f(x_1) < 0 .$$

37.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = e^x + 2x - 2 \text{ και } f''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R} .$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x - 2) = 0 - \infty - 2 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x - 2) = +\infty + \infty - 2 = +\infty . \text{ Επειδή η } f' \text{ είναι συνεχής}$$

και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το $f'(A) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f'(A)$

υπάρχει μοναδικό $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = 0$.

$$\beta) \text{ Για κάθε } x < \rho \Leftrightarrow f'(x) < f'(\rho) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, \rho] \text{ και για κάθε}$$

$$x > \rho \Leftrightarrow f'(x) > f'(\rho) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [\rho, +\infty) . \text{ Επομένως η } f \text{ έχει ελάχιστο στο } \rho .$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } f'(0) = -1 < 0 = f'(\rho) \Leftrightarrow \rho > 0 \text{ άρα } 0 \in (-\infty, \rho] . \text{ Είναι}$$

$$\rho > 0 \Leftrightarrow f(\rho) < f(0) = 0, \text{ άρα } f(\rho) < 0 .$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(\rho) = 0 \Leftrightarrow e^\rho + 2\rho - 2 = 0 \Leftrightarrow e^\rho = 2 - 2\rho \quad (1)$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(x) \geq f(\rho) = e^\rho + \rho^2 - 2\rho - 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) \geq 2 - 2\rho + \rho^2 - 2\rho - 1 \Leftrightarrow f(x) \geq \rho^2 - 4\rho + 1$$

38. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 18, f''(x) = 12x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x < 1$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, +\infty)$. Ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος για $x = 1$.

39. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3e^{3x-2} - 9e^{x+8}$ και $f''(x) = 9e^{3x-2} - 9e^{x+8} \geq 0 \Leftrightarrow e^{3x-2} \geq e^{x+8} \Leftrightarrow 3x - 2 \geq x + 8 \Leftrightarrow x \geq 5$. Για κάθε $x < 5$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 5]$ και για κάθε $x > 5$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [5, +\infty)$. Η f' έχει ελάχιστο για $x = 5$. επομένως το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το $(5, -8e^{13})$.

40.α) Η f είναι συνεχής στα $[a, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στα (a, β) , (β, γ) με

$$f'(x) = (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta). \text{ Είναι}$$

$$f(a) = f(\beta) = f(\gamma) = 0 \text{ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα}$$

υπάρχουν $\xi_1 \in (a, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

Όμως η $f'(x) = 3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ είναι δευτέρου βαθμού, οπότε

τα ξ_1, ξ_2 είναι οι μοναδικές της ρίζες και για το πρόσημο της ισχύει:

- Για κάθε $x < \xi_1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow (-\infty, \xi_1]$.
- Για κάθε $x \in (\xi_1, \xi_2)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [\xi_1, \xi_2]$ και
- για κάθε $x > \xi_2$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [\xi_2, +\infty)$.

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο ξ_1 και τοπικό ελάχιστο στο ξ_2 .

β) Αν η f έχει ακρότατο στο $x = \xi$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της και η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα:

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi - \beta)(\xi - \gamma) + (\xi - \alpha)(\xi - \gamma) + (\xi - \alpha)(\xi - \beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\xi - \beta)(\xi - \gamma)}{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma)} + \frac{(\xi - \alpha)(\xi - \gamma)}{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma)} + \frac{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)}{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\xi - \alpha} + \frac{1}{\xi - \beta} + \frac{1}{\xi - \gamma} = 0.$$

41. Είναι $f(a) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$, η f είναι συνεχής στα $[a, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ και

παραγωγίσιμη στα (a, β) , (β, γ) , οπότε από το θ. Rolle

υπάρχουν $\xi_1 \in (a, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0$ και $f'(\xi_2) = 0$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 + 2(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)^2 + 2(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)[3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha].$$

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = \alpha) \text{ ή } (x = \beta) \text{ ή } (x = \gamma) \text{ ή}$

$\tau(x) = 3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$. Η f' έχει ρίζες τα ξ_1, ξ_2 οι οποίες προφανώς είναι ρίζες του τριωνύμου

$$\tau(x) = 3x^2 - 2(\alpha+\beta+\gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0.$$

Για το πρόσημο της f' και τη μονοτονία της f ισχύει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$	α	ξ_1	β	ξ_2	γ	$+\infty$
$x-\alpha$	-	ο	+	+	+	+	+
$x-\beta$	-	-	-	ο	+	+	+
$x-\gamma$	-	-	-	-	-	ο	+
$\tau(x)$	+	+	ο	-	-	ο	+
f'	-	+	-	+	-	+	+
f							

Η f έχει τοπικά ελάχιστα στα α, β, γ και τοπικά μέγιστα στα ξ_1, ξ_2 .

Εύρεση παραμέτρων

42. Οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με παραγώγους αντίστοιχα

$$f'(x) = e^{x^2-(\alpha+\beta)x} (2x - \alpha - \beta), \quad g'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta \text{ άρα είναι παραγωγίσιμες}$$

και στα x_1, x_2 αντίστοιχα. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1 = 6$ και η g παρουσιάζει ακρότατο στο $x_2 = -2$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού τους ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα :

$$\begin{cases} e^{36-6(\alpha+\beta)} (12 - \alpha - \beta) = 0 \\ 12 + 4\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - \alpha - \beta = 0 \\ 4\alpha + \beta = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -8 \\ \beta = 20 \end{cases} \text{ Τότε } f(x) = e^{x^2-12x} \text{ και}$$

$$g(x) = x^3 + 8x^2 + 20x + 1. \text{ Είναι } f'(x) = e^{x^2-12x} (2x - 12) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6. \text{ Για κάθε } x < 6 \text{ είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 6] \text{ και για κάθε } x > 6 \text{ είναι}$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [6, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 6. Είναι

$$g'(x) = 3x^2 + 16x + 20 = 3\left(x + \frac{10}{3}\right)\left(x + \frac{10}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{10}{3} \text{ ή } x \geq -2.$$

Επομένως η g είναι $\nearrow\left(-\infty, -\frac{10}{3}\right]$, $\searrow\left[-\frac{10}{3}, -2\right]$ και $\nearrow[-2, +\infty)$. Έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = -2$.

43. Η f παρουσιάζει ακρότατο στα $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + \beta$ άρα και στα x_1, x_2 , οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα :

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 3 - 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 0 \end{cases}. \text{ Τότε}$$

$f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 1$. Η f είναι $\nearrow(-\infty, -1]$, $\searrow[-1, 1]$ και $\nearrow[1, +\infty)$. Έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$.

44. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $A(1, -2)$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, είναι παραγωγίσιμη για κάθε

$$x \neq 3 \text{ με } f'(x) = \frac{(2\alpha x + \beta)(x - 3) - \alpha x^2 - \beta x - 2}{(x - 3)^2} \text{ άρα και στο } 1, \text{ επομένως}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα ισχύει

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 5\alpha + 3\beta = -2 \quad (1). \text{ Επειδή το } A \text{ ανήκει στη } C_f, \text{ ισχύει ότι:}$$

$$f(1) = -2 \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta + 2}{-2} = -2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) προκύπτει ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 6$. Τότε

$$f(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 2}{x - 3}, f'(x) = -\frac{4(x - 1)(x - 5)}{(x - 3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 3) \cup (3, 5].$$

Η f είναι $\searrow(-\infty, 1]$, $\nearrow[1, 3)$, $\nearrow(3, 5]$, $\searrow[5, +\infty)$ και έχει τοπ. ελάχιστο στο A .

45. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 + 2\lambda x + 3$. Είναι $\Delta = 4\lambda^2 - 36 = 4(\lambda - 3)(\lambda + 3)$.

Αν $\lambda \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$, τότε $\Delta > 0$, η f' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, οπότε η f στη περίπτωση αυτή έχει ακρότατα.

Αν $\lambda = -3$, τότε $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$, άρα $f \nearrow \mathbb{R}$ οπότε δεν έχει ακρότατα.

Αν $\lambda = 3$, τότε $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq -1$, άρα $f \nearrow \mathbb{R}$ οπότε δεν έχει ακρότατα. Αν $\lambda \in (-3, 3)$, τότε $\Delta < 0$ άρα $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$ οπότε δεν έχει ακρότατα. Άρα $\lambda \in [-3, 3]$.

46. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 8x - 4\lambda$. Είναι

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\lambda}{2}$. Επομένως για κάθε $x < \frac{\lambda}{2}$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(-\infty, \frac{\lambda}{2}\right)$,

για κάθε $x > \frac{\lambda}{2}$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[\frac{\lambda}{2}, +\infty\right)$ και έχει ελάχιστο το

$$f\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda^2 + \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 2 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

47. Έστω ότι η f έχει ακρότατο $x_0 \in \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = (2x + \alpha)e^x + (x^2 + \alpha x + \beta)e^x = [x^2 + (\alpha + 2)x + \alpha + \beta]e^x$ είναι παραγωγίσιμη και στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της x_0 , ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, άρα $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$[x_0^2 + (\alpha + 2)x_0 + \alpha + \beta]e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + (\alpha + 2)x_0 + \alpha + \beta = 0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με $\Delta = \alpha^2 + 4 - 4\beta < 0$, οπότε είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

Αυξημένης δυσκολίας

48. Με παραγωγή της σχέσης που μας δίνεται κατά μέλη έχουμε

$$(f^3(x) + x^2)' = (xf(x))' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + 2x = f(x) + xf'(x) \quad (1).$$

Επειδή η f έχει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(x_0) = 0$. Για $x = x_0$ η (1) γίνεται

$$3f^2(x_0) \cancel{f'(x_0)}^0 + 2x_0 = f(x_0) + x_0 \cancel{f'(x_0)}^0 \Leftrightarrow f(x_0) = 2x_0.$$

Η αρχική σχέση για $x = x_0$ γίνεται: $f^3(x_0) + x_0^2 = x_0 f(x_0) \Leftrightarrow$

$$(2x_0)^3 + x_0^2 = x_0 \cdot 2x_0 \Leftrightarrow 8x_0^3 - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(8x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 = 0 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } \left(x_0 = \frac{1}{8}\right).$$

49. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0 + \infty)$ με $f'(x) = \lambda x^{\lambda-1} e^{-\lambda x} (1 - \lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\lambda}$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left(0, \frac{1}{\lambda}\right]$ και για κάθε $x > \frac{1}{\lambda}$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left[\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$. Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^{-\lambda} e^{-\lambda}$. Έστω $g(\lambda) = \lambda^{-\lambda} e^{-\lambda} = e^{-\lambda \ln \lambda} e^{-\lambda} = e^{-\lambda \ln \lambda - \lambda}$, $\lambda > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(\lambda) = e^{-\lambda \ln \lambda - \lambda} (-\ln \lambda - 2)$. Είναι $g'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq -2 \Leftrightarrow \lambda \leq e^{-2}$. Για κάθε $0 < x < e^{-2}$ είναι $g'(\lambda) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, e^{-2}]$ και για κάθε $x > e^{-2}$ είναι $g'(\lambda) < 0 \Rightarrow g \searrow [e^{-2}, +\infty)$. Η g έχει μέγιστο για $\lambda = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.

50. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0 + \infty)$ με $f'(x) = x^{\lambda-1} e^{2\lambda x} (\lambda - x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \lambda$. Για κάθε $0 < x < \lambda$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, \lambda]$ και για κάθε $x > \lambda$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [\lambda, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(\lambda) = \lambda^{\lambda} e^{\lambda}$. Έστω $g(\lambda) = \lambda^{\lambda} e^{\lambda} = e^{\lambda \ln \lambda} e^{\lambda} = e^{\lambda \ln \lambda + \lambda}$, $\lambda > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0 + \infty)$ με $g'(\lambda) = e^{\lambda \ln \lambda + \lambda} (\ln \lambda + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \geq -2 \Leftrightarrow \lambda \geq e^{-2}$. Για κάθε $\lambda \in (0, e^{-2})$ είναι $g'(\lambda) < 0 \Rightarrow g \searrow (0, e^{-2}]$ και για κάθε $x > e^{-2}$ είναι $g'(\lambda) > 0 \Rightarrow g \nearrow [e^{-2}, +\infty)$. Η g έχει ελάχιστο για $\lambda = e^{-2}$.

51. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2 - 4\lambda e^x + 2e^{2x}$ και $f''(x) = -4\lambda e^x + 4e^{2x} = 4e^x (e^x - \lambda)$. Είναι $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4e^x (e^x - \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln \lambda$. Για κάθε $x < \ln \lambda$ είναι $f''(x) < 0$, άρα f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln \lambda]$. Για κάθε $x > \ln \lambda$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln \lambda, +\infty)$. Η f' έχει ελάχιστο το

$$f'(\ln \lambda) = 2 - 4\lambda e^{\ln \lambda} + 2e^{2 \ln \lambda} = 2 - 4\lambda \cdot \lambda + 2e^{\ln \lambda^2} = 2 - 4\lambda^2 + 2\lambda^2 = 2 - 2\lambda^2.$$

- Αν $2 - 2\lambda^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 1 \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \lambda < 1$, τότε $f'(x) \geq f'(\ln \lambda) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Αν $2 - 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε:

$$f'(x) = 2 - 4e^x + 2e^{2x} = 2 \left[(e^x)^2 - 2e^x + 1 \right] = 2(e^x - 1)^2 > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0, \text{ η } f$$

είναι συνεχής οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

• Αν $2 - 2\lambda^2 < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, τότε επειδή το ελάχιστο της f' είναι αρνητικός αριθμός και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 - 2e^x (2\lambda - e^x)] = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2e^x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\lambda - e^x) = -\infty$, η f' θα αλλάξει πρόσημο, οπότε η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Άρα για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, τελικά πρέπει: $\lambda \in (0, 1]$ οπότε η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του λ είναι το 1.

52. $e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \lambda$ (1). Έστω $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Η f είναι συνεχής στο

$\mathbb{R}$, για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = e$, άρα $f(x) \geq f(1) = e$

Από τη σχέση (1) έχουμε $f(x) \geq \lambda$ οπότε για $x = 1$ είναι $f(1) \geq \lambda \Leftrightarrow e \geq \lambda$, άρα

$$\lambda_{\max} = e.$$

53. Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα στα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού τους ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + 1$ οπότε και στα ρ_1, ρ_2, ρ_3 άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = f'(\rho_3) = 0$. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3)$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε: $f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = 3ax^2 + 2bx + \gamma$. Η f'' είναι δευτέρου βαθμού, οπότε έχει ακριβώς δύο ρίζες και αυτό συμβαίνει όταν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\beta^2 - 12\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > 3\alpha\gamma$.

Κρίσιμα σημεία

54.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f'(-3) = -5$.

β) Η f' έχει ρίζες τις -2, 2 και δεν ορίζεται στο 0, οπότε αυτά είναι τα κρίσιμα σημεία της.

γ) Για κάθε $x \in [-3, -2) \cup (2, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ είναι $f'(x) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στα $[-3, -2], [-2, 2]$ και $[2, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-3, -2], [2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2, 2]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = -3$, τοπικό ελάχιστο για $x = -2$ και τοπικό μέγιστο για $x = 2$.

55.α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ οπότε η f είναι συνεχής στο 0.

$$\bullet \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1 \text{ οπότε η } f \text{ δεν είναι}$$

παραγωγίσιμη στο 0 άρα έχει κρίσιμο σημείο στο $x_0 = 0$.

• Η f είναι παραγωγίσιμη για $x < 0$ με $f'(x) = (x+1)e^x$.

Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ οπότε έχει κρίσιμο σημείο το -1.

• Η f είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ με $f'(x) = 2x - 1$. Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ οπότε έχει κρίσιμο σημείο το } \frac{1}{2}.$$

Άρα κρίσιμα σημεία της f τα $0, -1, \frac{1}{2}$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3 = f(1), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -3$ οπότε η f είναι συνεχής στο 1.

$$\bullet \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x + x^2 - 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x + 1 + 2x}{1} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 + 3 \ln x - 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^3 + \frac{3}{x}}{1} = 7, \text{ οπότε η } f \text{ δεν είναι}$$

παραγωγίσιμη στο 1. Η f έχει κρίσιμο σημείο στο $x_0 = 1$.

• Για $0 < x < 1$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x + 1 + 2x$ και

$$f''(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0, 1]. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty, f'(1) = 3, \text{ οπότε}$$

$$f'((0, 1]) = (-\infty, 3]. \text{ Επειδή } 0 \in (-\infty, 3) \text{ και η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 1): f'(x_1) = 0$, οπότε το $x = x_1$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

- Για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{x} > 0$ οπότε η f δεν έχει κρίσιμο σημείο στο $(1, +\infty)$. Άρα έχει δύο κρίσιμα σημεία τα $x_1, 1$.

56. Είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{g'(x)(1 - \ln g(x))}{g^2(x)}. \text{ Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$\ln g(x) = 1 \Leftrightarrow g(x) = e = g(e) \stackrel{g \nearrow}{\Leftrightarrow} x = e$ οπότε μοναδικό της κρίσιμο σημείο είναι το $(e, f(e))$.

57.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3xe^x + 1$ και $f''(x) = 3(x+1)e^x$. Για κάθε $x < -1$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, -1]$ και για κάθε $x > -1$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [-1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{e^{-x}}\right) = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 1.$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \text{ και } f'(-1) = 1 - \frac{3}{e} < 0.$$

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$ οπότε $f'(A_1) = \left[1 - \frac{3}{e}, 1\right]$.

Το $0 \in \left(1 - \frac{3}{e}, 1\right)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, -1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(x_1) = 0$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [-1, +\infty)$ οπότε

$f'(A_2) = \left[1 - \frac{3}{e}, +\infty\right)$. Το $0 \in \left(1 - \frac{3}{e}, +\infty\right)$ οπότε υπάρχει μοναδικό

$x_2 \in (-1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' έχει δύο ρίζες, η f έχει δύο κρίσιμα σημεία.

β) Για κάθε $x < x_1 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, x_1]$. Για κάθε

$x_1 < x < -1 \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \searrow [x_1, -1]$. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο

x_1 . Για κάθε $-1 < x < x_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_2) = 0 \Rightarrow f \searrow [-1, x_2]$ και για κάθε

$x > x_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_2) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_2, +\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_2 .

58.α) Με παραγωγή της σχέσης που μας δίνεται έχουμε

$$3f^2(x)f'(x) - 12f(x)f'(x) + \lambda f'(x) = 3x^2 - 12x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(3f^2(x) - 12f(x) + \lambda) = 3x(x - 4). \text{ Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4. \text{ Κρίσιμα σημεία της } f \text{ τα } (0, f(0)) \text{ και } (4, f(4)).$$

β) Είναι $3f^2(x) - 12f(x) + \lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Αν θέσουμε $f(x) = \omega$ έχουμε το τριώνυμο $3\omega^2 - 12\omega + \lambda$ με διακρίνουσα $\Delta = 144 - 12\lambda = -12(\lambda - 12) < 0$ οπότε $3\omega^2 - 12\omega + \lambda > 0$). Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του $3x(x - 4)$. Όταν $x < 0$, είναι $3x(x - 4) > 0$ οπότε $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$. Όταν $x \in (0, 4)$ είναι $3x(x - 4) < 0$ οπότε $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, 4]$ και όταν $x > 4$, τότε $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [4, +\infty)$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(0)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(4)$.

59. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} - \ln x$. Είναι

$f'(1) = f'(2) = 0$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων

και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} - \frac{1}{x}$, ισχύουν οι υποθέσεις

του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{2 - 2 \ln \xi}{\xi^2} - \frac{1}{\xi} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 \ln \xi - \xi = 0. \text{ Έστω ότι υπάρχει } \rho \in (1, 2) \text{ με } \rho \neq \xi \text{ και}$$

$$2 - 2 \ln \rho - \rho = 0, \text{ τότε για τη συνάρτηση } h(x) = 2 - 2 \ln x - x, x > 0$$

εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[\rho, \xi]$ ή $[\xi, \rho] \subseteq (1, 2)$ και υπάρχει $\xi_1 \in (\rho, \xi)$

ή (ξ, ρ) τέτοιο, ώστε $h'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\xi_1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = -2$ που είναι άτοπο.

Άρα το ξ είναι η μοναδική ρίζα της $f''(x) = 0$ στο $(1, 2)$ και η f' έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(1, 2)$.

60. Είναι $\alpha < \beta < \gamma \Leftrightarrow 3\alpha < 2\alpha + \beta < 2\alpha + \gamma < 3\gamma \Leftrightarrow \alpha < \frac{2\alpha + \beta}{3} < \gamma \Leftrightarrow$

$f(\alpha) < f(\gamma) < f(\beta)$. Επειδή το $f(\gamma)$ είναι ενδιάμεση τιμή της f , δεν θα έχει ελάχιστο ή μέγιστο στο σημείο αυτό. Άρα θα υπάρχει εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος (α, γ) , στο οποίο η f θα έχει ακρότατο. Η f είναι παραγωγίσιμη

στο x_0 οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(x_0) = 0$, οπότε η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \gamma)$.

61. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{h(x^2)+2} h'(x^2) 2x$ και

$$f''(x) = e^{h(x^2)+2} (h'(x^2))^2 4x^2 + e^{h(x^2)+2} h''(x^2) 4x^2 + 2e^{h(x^2)+2} h'(x^2) \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = 2e^{h(x^2)+2} \left[2x^2 (h'(x^2))^2 + 2x^2 h''(x^2) + h'(x^2) \right]. \text{ Έστω ότι η } f \text{ έχει δύο}$$

κρίσιμα σημεία x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, τα x_1, x_2 είναι ρίζες της f' , δηλαδή $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος οπότε η εξίσωση

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \left[2x^2 \left((h'(x^2))^2 + h''(x^2) \right) + h'(x^2) \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 \left((h'(x^2))^2 + h''(x^2) \right) + h'(x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \left((h'(x^2))^2 + h''(x^2) \right) = -h'(x^2)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η f έχει το πολύ ένα κρίσιμο σημείο.

62. Επειδή $f(0) + f(2) = f(1)$, είναι $f(0) < f(1)$ και $f(2) < f(1)$. Άρα η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στα άκρα 0 και 2 του διαστήματος $[0, 2]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό, οπότε θα παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_1 του $(0, 2)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1 οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(x_1) = 0$. Επομένως παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο x_1 .

Ακρότατα και ανισώσεις

63.α) Έστω $f(x) = \epsilon\phi x - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι $f'(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$ για κάθε

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Για κάθε $0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(0) \leq f(x)$ οπότε $0 \leq \epsilon\phi x - x$.

β) Έστω $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ με } f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-3(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{3}\right)}{\sin^2 x} > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ γιατί } \sin x - 1 < 0,$$

$$\sin x + \frac{1}{3} > 0 \text{ και } \sin^2 x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Άρα η } f \text{ είναι γνησίως}$$

$$\text{αύξουσα στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και παρουσιάζει ελάχιστο στο } x_0 = 0 \text{ το } f(0) = 0.$$

$$\text{Επομένως } f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow 2\eta\mu x + \epsilon\phi x \geq 3x \text{ για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\gamma) \text{ Έστω } f(x) = e^x - ex, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f'(x) = e^x - e \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Για κάθε } x < 1 \text{ είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0] \text{ και για κάθε } x > 1 \text{ είναι}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty). \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο στο } 1, \text{ άρα } f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow e^x \geq xe.$$

$$\delta) \text{ Έστω } f(x) = x^2 - 2\ln x - 1, \quad x > 0. \text{ Είναι}$$

$$f'(x) = 2\frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 1. \text{ Για κάθε } 0 < x < 1 \text{ είναι}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1] \text{ και για κάθε } x > 1 \text{ είναι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty). \text{ Η } f \text{ έχει}$$

$$\text{ελάχιστο το } f(1) = 0, \text{ άρα } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2\ln x + 1.$$

$$\epsilon) \text{ Έστω } f(x) = 2e^x - \ln(2x+1) - 2, \quad x > -\frac{1}{2}. \text{ Είναι } f'(x) = 2e^x - \frac{1}{2x+1} \text{ και}$$

$$f''(x) = 2e^x + \frac{4}{(2x+1)^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right). \text{ Παρατηρούμε ότι } f'(0) = 0,$$

$$\text{οπότε για κάθε } -\frac{1}{2} < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \searrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right] \text{ και για κάθε}$$

$$x > 0 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty). \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο το } f(0) = 0, \text{ άρα}$$

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^x \geq \ln(2x+1) + 2.$$

$$\sigma\tau) \quad x^x (2-x)^{2-x} \geq 1 \Leftrightarrow \ln \left[x^x (2-x)^{2-x} \right] \geq \ln 1 \Leftrightarrow \ln x^x + \ln (2-x)^{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \ln x + (2-x) \ln (2-x) \geq 0. \text{ Έστω } f(x) = x \ln x + (2-x) \ln (2-x), \quad x \in (0, 2).$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \ln x + 1 - \ln(2-x) - 1 = \ln \frac{x}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$x \geq 2-x \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Για κάθε } x \in (0, 1) \text{ είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1] \text{ και για κάθε } x \in (1, 2) \text{ είναι}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, 2). \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο το } f(1) = 0, \text{ άρα } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \ln x + (2-x) \ln (2-x) \geq 0.$$

ζ) Έστω $f(x) = 2\eta\mu x + x^2 + 2e^{-x} - 2$, $x \geq 0$. Είναι $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + 2x - 2e^{-x}$ και $f''(x) = -2\eta\mu x + 2 + 2e^{-x} = 2(1 - \eta\mu x) + 2e^{-x} > 0 \Rightarrow f' \nearrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$, άρα $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu x + x^2 + 2e^{-x} \geq 2$.

η) Έστω $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6 - 6e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 6 - 6e^x, f''(x) = 6x + 6 - 6e^x \text{ και}$$

$$f^{(3)}(x) = 6 - 6e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0. \text{ Για κάθε } x < 0 \text{ είναι}$$

$$f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow (-\infty, 0], \text{ άρα } f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 0].$$

Άρα $f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f^{(3)}(x) < 0 \Rightarrow f'' \searrow [0, +\infty), \text{ άρα } f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow f' \searrow [0, +\infty).$$

Άρα $f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 0$, άρα

$$f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 6x + 6 \leq 6e^x.$$

64.α) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$. Για κάθε $0 < x < e$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, e] \text{ και για κάθε } x > e \text{ είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [e, +\infty).$$

Η f έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

β) $e^\pi > \pi^e \Leftrightarrow \ln e^\pi > \ln \pi^e \Leftrightarrow \pi > e \ln \pi \Leftrightarrow \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e)$ που ισχύει.

$$\gamma) e < \lambda < \lambda + 1 \Rightarrow f(\lambda) > f(\lambda + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln \lambda}{\lambda} > \frac{\ln(\lambda + 1)}{\lambda + 1} \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + 1) \ln \lambda > \lambda \ln(\lambda + 1) \Leftrightarrow \ln \lambda^{\lambda + 1} > \ln(\lambda + 1)^\lambda \Leftrightarrow \lambda^{\lambda + 1} > (\lambda + 1)^\lambda.$$

65.α) $f(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$. Είναι

$$f'(x) = e^{\ln^2 x} 2 \frac{\ln x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty). \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο το } f(1) = 1.$$

β) Είναι $f(x) \geq f(1) = 1$ για κάθε $x > 0$, άρα $f(\alpha) \geq 1 \Leftrightarrow \alpha^{\ln \alpha} \geq 1$ και

$$f(\beta) \geq 1 \Leftrightarrow \beta^{\ln \beta} \geq 1, \text{ άρα } \alpha^{\ln \alpha} + \beta^{\ln \beta} \geq 2.$$

66.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
 $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι
 γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι
 γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

β) Επειδή η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$, ισχύει:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \ln x - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \ln x \geq x - 1.$$

67. Έστω $f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$, $x \in [0, 1]$. Είναι

$f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 3x + 2) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, 1]$. Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 1$ και
 ελάχιστο το $f(1) = \frac{1}{e}$, άρα $\frac{1}{e} \leq (x^2 - x + 1)e^{-x} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

$$68. 2 \ln x \geq \alpha \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow 2x \ln x - \alpha(x-1) \geq 0 \quad (1).$$

Έστω $f(x) = 2x \ln x - \alpha(x-1)$, $x > 0$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$, οπότε η (1)
 γίνεται: $f(x) \geq f(1)$. Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο
 $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
 $f'(x) = 2 \ln x + 2 - \alpha$, από το θ. Fermat ισχύει ότι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

$$69. xg(x) - e^x \leq \eta\mu 2x - 1 \Leftrightarrow xg(x) - e^x - \eta\mu 2x + 1 \leq 0 \quad (1).$$

Έστω $f(x) = xg(x) - e^x - \eta\mu 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$, οπότε
 η (1) γίνεται: $f(x) \leq f(0)$. Άρα η f έχει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$
 του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
 $f'(x) = g(x) + xg'(x) - e^x - 2\sigma\upsilon\nu 2x$, από το θ. Fermat ισχύει ότι:
 $f'(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 3$.

$$70. e^{x-1}f(x) + x \leq x^2 - 2 \Leftrightarrow e^{x-1}f(x) + x - x^2 + 2 \leq 0 \quad (1).$$

Έστω $g(x) = e^{x-1}f(x) + x - x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$, οπότε η
 (1) γίνεται: $g(x) \leq g(1)$. Άρα η g παρουσιάζει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο
 $x_0 = 1$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με
 $g'(x) = e^{x-1}f(x) + e^{x-1}f'(x) + 1 - 2x$, από το θ. Fermat ισχύει:
 $g'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) + f'(1) + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 3$. Η εφαπτομένη της C_f στο A
 έχει εξίσωση: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 2 = 3x - 3 \Leftrightarrow y = 3x - 5$.

Αυξημένης δυσκολίας

$$71.α) f'(x) = 2xe^{\frac{1}{x}} - x^{\cancel{2}}e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{\cancel{x^2}} = e^{\frac{1}{x}}(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ Για κάθε}$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0) \text{ και } \searrow \left(0, \frac{1}{2}\right). \text{ Για κάθε}$$

$$x > \frac{1}{2} \text{ είναι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right). \text{ Η } f \text{ έχει τοπικό ελάχιστο το } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4}.$$

$$β) 4^x x^{2x} \geq e^{2x-1} \Leftrightarrow \ln(4^x x^{2x}) \geq \ln e^{2x-1} \Leftrightarrow \ln 4^x + \ln x^{2x} \geq 2x-1 \Leftrightarrow$$

$$x \ln 4 + x \ln x^2 \geq 2x-1 \Leftrightarrow \ln 4 + \ln x^2 \geq 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x^2 + \ln e^{\frac{1}{x}} \geq \ln e^2 - \ln 4 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right) \geq \ln \frac{e^2}{4} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{e^2}{4} \text{ που ισχύει.}$$

$$72.α) \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1-2 \ln x}{x^3}. \text{ Είναι}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2 \ln x}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}. \text{ Για κάθε } x < \sqrt{e} \text{ είναι}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, \sqrt{e}] \text{ και για κάθε } x > \sqrt{e} \text{ είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [\sqrt{e}, +\infty).$$

$$\text{Η } f \text{ έχει ολικό μέγιστο το } f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e} = \frac{1}{2e}.$$

$$β) \text{ Επειδή η } f \text{ έχει ολικό μέγιστο το } f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}, \text{ ισχύει } f(x) \leq \frac{1}{2e} \text{ για κάθε}$$

$$x > 0. \text{ Άρα, } \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{1}{2e} \Leftrightarrow 2e \ln x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln x^{2e} \leq \ln e^{x^2} \Leftrightarrow x^{2e} \leq e^{x^2}.$$

$$γ) a^{x^2} \geq x^{2e} \Leftrightarrow x^2 \ln a \geq 2e \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{\ln a}{2e} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\ln a}{2e}.$$

$$\text{Για } x = \sqrt{e} \text{ έχουμε: } f(e) \leq \frac{\ln a}{2e} \Leftrightarrow \frac{1}{2e} \leq \frac{\ln a}{2e} \Leftrightarrow \ln a \geq 1 \Leftrightarrow a \geq e.$$

$$73.α) f'(x) = \frac{e^x x^v - e^x v x^{v-1}}{x^{2v}} = \frac{e^x x^{v-1}(x-v)}{x^{2v}} = \frac{e^x (x-v)}{x^{v+1}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq v. \text{ Για}$$

κάθε

$x \in (0, v)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, v]$ και για κάθε $x > v$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [v, +\infty)$. Ελάχιστο το $f(v) = \frac{e^v}{v^v}$.

β) $e^x \geq \left(\frac{xe}{v}\right)^v \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^v e^v}{v^v} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^v} \geq \frac{e^v}{v^v} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{e^v}{v^v}$ που ισχύει.

γ) Έστω $g(x) = \theta^x - \left(\frac{\theta x}{v}\right)^v$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g(x) \geq g(v)$. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = v$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με

$g'(x) = \theta^x \ln \theta - v \left(\frac{\theta x}{v}\right)^{v-1} \frac{\theta}{v}$, από το θ -Fermat είναι $g'(v) = 0 \Leftrightarrow \theta = e$.

74.α) Έστω $f(x) = \pi \cdot \eta \mu x - 2x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f'(x) = \pi \cdot \sigma \upsilon \nu x - 2$ και $f''(x) = -\pi \cdot \eta \mu x < 0$ για

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

οπότε $f' \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Άρα $f' \left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[f' \left(\frac{\pi}{2}\right), f'(0)\right] = [-2, \pi - 2]$. Το

$0 \in f' \left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Για $0 \leq x \leq x_0 \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) \geq f'(x_0) = 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$[0, x_0]$ άρα $f(x) \geq f(0) = 0$. Για $x_0 < x < \frac{\pi}{2} \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$ οπότε η f

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[x_0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα $f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Άρα $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \pi \cdot \eta \mu x \geq 2x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

β) Έστω $g(x) = \pi \cdot \sigma \upsilon \nu x - \pi + x^2$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $g'(x) = -\pi \cdot \eta \mu x + 2x = -f(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Άρα η g

είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, είναι:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq g(x) \leq g(0), \text{ δηλαδή } g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow \pi \cdot \sin x \leq \pi - x^2.$$

$$75. (\sin^2 x)^{\eta\mu^2 x} (\eta\mu^2 x)^{\sin^2 x} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sin^2 x)^{1-\sin^2 x} (1-\sin^2 x)^{\sin^2 x} \geq \frac{1}{2}.$$

Έστω $f(x) = x^{1-x} (1-x)^x$, $x \in (0,1)$. Είναι

$$f'(x) = x^{1-x} (1-x)^x \left[\ln \frac{1-x}{x} + \frac{1-2x}{x(1-x)} \right].$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι $\ln \frac{1-x}{x} > 0$ και $\frac{1-2x}{x(1-x)} > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και $f \nearrow$

στο $\left(0, \frac{1}{2}\right]$. Όμοια, για $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι $f'(x) < 0$ και $f \searrow$ στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Η f

έχει ολικό μέγιστο το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, άρα $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$ για κάθε

$$x \in (0,1) \Leftrightarrow x^{1-x} (1-x)^x \geq \frac{1}{2}.$$

Επειδή $\sin^2 x \in (0,1)$, ισχύει: $(\sin^2 x)^{1-\sin^2 x} (1-\sin^2 x)^{\sin^2 x} \geq \frac{1}{2}$

76. 1ος τρόπος: Θα δείξουμε ότι $e^x \geq x+1$ που ισχύει και $e^x \leq xe^x + 1$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x - xe^x - 1$. Είναι $g'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x$ και

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -xe^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) > 0$ άρα η g είναι

γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) < 0$ άρα η g είναι

γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow$

$$e^x \leq xe^x + 1.$$

2ος τρόπος: Έστω $x > 0$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t) = e^t$ με $t \in [0, x]$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, x]$, με $h'(t) = e^t$. Άρα, σύμφωνα

με το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = \frac{h(x) - h(0)}{x} \Leftrightarrow$

$$e^\xi = \frac{e^x - 1}{x} \quad (1). \text{ Είναι } 0 < \xi < x \Leftrightarrow e^0 < e^\xi < e^x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x < e^x - 1 < xe^x \Leftrightarrow x + 1 < e^x < xe^x + 1. \text{ Όμοια, με χρήση του Θ.Μ.Τ. στο } [x, 0]$$

δείχνουμε ότι ισχύει η προηγούμενη για $x < 0$. Για $x = 0$ είναι

$$0 + 1 \leq e^0 \leq 0 \cdot e^0 + 1 \text{ και ισχύει η ισότητα. Άρα, για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι}$$

$$x + 1 \leq e^x \leq xe^x + 1.$$

77. Για $x = 1$ είναι $0 \leq f(1) \leq 0$ ισχύει. Αν $x > 1$ τότε λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει

$$\xi \in (1, x) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x)}{x - 1}. \text{ Είναι } 1 < \xi < x \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow f' \nearrow$$

$$f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow 1 < \frac{f(x)}{x - 1} < f'(x) \Leftrightarrow x - 1 < f(x) < (x - 1)f'(x).$$

Αν $x < 1$ τότε λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (x, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{f(x)}{x - 1}. \text{ Είναι } x < \xi < 1 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) > 0 \Leftrightarrow f' \nearrow \quad f'(x) < f'(\xi) < f'(1) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) < \frac{f(x)}{x - 1} < 1 \Leftrightarrow x - 1 < f(x) < (x - 1)f'(x)$$

78.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Είναι $xf(x) \geq 2 \ln(x+1) - 2x$ (1). Αν $x > 0$ τότε

$$f(x) \geq 2 \frac{\ln(x+1)}{x} - 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\ln(x+1)}{x} - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(0) \geq 0 \quad (2) \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1. \text{ Αν } x \in (-1, 0) \text{ τότε}$$

$$f(x) \leq 2 \frac{\ln(x+1)}{x} - 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 \frac{\ln(x+1)}{x} - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow f(0) \leq 0 \quad (3). \text{ Από } (2), (3) \Rightarrow f(0) = 0$$

β) $xf(x) + 2x \geq 2 \ln(x+1) \Leftrightarrow xf(x) + 2x - 2 \ln(x+1) \geq 0$ (1).

Έστω $g(x) = xf(x) + 2x - 2 \ln(x+1)$, $x > -1$. Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$,

οπότε η (1) γίνεται: $g(x) \geq g(0)$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι

παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $g'(x) = f(x) + xf'(x) + 2 - \frac{2}{x+1}$, από το

θ. Fermat, ισχύει ότι: $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

79. $f(x) \geq ax + \beta \Leftrightarrow f(x) - ax - \beta \geq 0$ (1).

Έστω $g(x) = f(x) - ax - \beta$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$g(x) = f(x_0) - ax_0 - \beta = 0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x) \geq g(x_0)$. Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 που είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της.

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - \alpha$, από το Θ.Fermat ισχύει ότι: $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \alpha = \lambda_e$.

80. Παρατηρούμε ότι η f έχει ελάχιστο στο $O(0,0)$. Επειδή το $x=0$ είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f και είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x - \lambda + xe^x$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

81.α) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι $\alpha - (x + \alpha)e^{-x} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $g(x) = \alpha - (x + \alpha)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $g(x) \geq g(0)$. Άρα η g έχει ελάχιστο στο $x=0$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = (x + \alpha - 1)e^{-x}$, λόγω του Θ.Fermat είναι $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

β) Είναι $f(x) = \sqrt{1 - (x+1)e^{-x}}$ και για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{2\sqrt{1 - (x+1)e^{-x}}}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$, για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 0$.

82.α) Είναι $f(x) \geq 0 = f(0)$ άρα η f έχει ελάχιστο στο 0. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη σύμφωνα με το Θ.Fermat είναι $f'(0) = 0$.

β) Είναι $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|e^x + \alpha x - 1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|e^x + \alpha x - 1|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{e^x + \alpha x - 1}{x} \right| =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{e^x - 1}{x} + \alpha \right| = |1 + \alpha| \text{ άρα } 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1} \stackrel{DLH}{=} 1.$$

γ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$, είναι $f(x) = e^x - x - 1$.

δ) $e^x - 2 \geq x - x^{\ln x} \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - x^{\ln x}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = 1 - x^{\ln x}, x > 0. \text{ Είναι } g'(x) = (1 - e^{\ln^2 x})' = -e^{\ln^2 x} \frac{2 \ln x}{x}.$$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [1, +\infty)$. Η g έχει μέγιστο το $g(1) = 0$, οπότε

για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) \leq 0$. Όμως για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0$, άρα $f(x) > g(x)$.

83.α) Είναι $f(x) \geq 0 = f(1)$, οπότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2}$, από το θ. Fermat είναι:
 $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$.

β) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 0$.

γ) Για κάθε $x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$. Επειδή $f(1) = 0$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

δ) $\ln(2\lambda^2 + 2) - \frac{1}{\lambda^2 + 3} > \ln(\lambda^2 + 3) - \frac{1}{2\lambda^2 + 2} \Leftrightarrow$
 $\ln(2\lambda^2 + 2) + \frac{1}{2\lambda^2 + 2} - 1 > \ln(\lambda^2 + 3) + \frac{1}{\lambda^2 + 3} - 1 \Leftrightarrow f(2\lambda^2 + 2) > f(\lambda^2 + 3)$ (1)

Επειδή $2\lambda^2 + 2 > 1$, $\lambda^2 + 3 > 1$ και $f \nearrow [1, +\infty)$, η (1) γίνεται:
 $2\lambda^2 + 2 > \lambda^2 + 3 \Leftrightarrow \lambda^2 > 1 \Leftrightarrow \lambda < -1$ ή $\lambda > 1$.

84.α) Έστω $\varphi(x) = e^x - x$, $\varphi'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi'(x) > 0$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα $\varphi(x) > \varphi(0) = 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$. Γνωρίζουμε ότι $\ln x \leq x - 1 < x$ για κάθε $x > 0$ οπότε $x > \ln x \Leftrightarrow g(x) > h(x)$.

β) Είναι $A(\alpha, e^\alpha)$ και $B(\alpha, \ln \alpha)$, $d(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha$

γ) $d'(\alpha) = e^\alpha - \frac{1}{\alpha}$, $d''(\alpha) = e^\alpha + \frac{1}{\alpha^2} > 0 \Rightarrow d' \nearrow (0, +\infty)$. Είναι $d'(1) = e - 1 > 0$

και $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} d'(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(e^\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = -\infty$, οπότε υπάρχει $\theta \in (0, 1) : d'(\theta) < 0$. Η d είναι συνεχής στο $[0, \theta]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\alpha_0 \in (0, 1) \subseteq (0, 1) : d'(\alpha_0) = 0$ και αφού $d' \nearrow$, το α_0 είναι μοναδικό. Για $x < \alpha_0 \Leftrightarrow d'(x) < d'(\alpha_0) = 0 \Rightarrow d \searrow (0, \alpha_0]$ και για

$x > \alpha_0 \Leftrightarrow d'(x) > d'(\alpha_0) = 0 \Rightarrow d \nearrow [\alpha_0, +\infty)$. Επομένως η d έχει ελάχιστο στο α_0 .

85.α) $f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha = \frac{1-\alpha x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\alpha}$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$ Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 1 - \ln \alpha$.

β) $A\left(\frac{1}{\alpha}, 1 - \ln \alpha\right)$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\alpha} \\ y = 1 - \ln \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{x} \\ y = 1 - \ln \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = 1 + \ln x \end{cases}$. Άρα κινείται

στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1 + \ln x$.

γ) $\ln x \leq \alpha x - 2 \Leftrightarrow \ln x - \alpha x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$. Για $x = \frac{1}{\alpha}$ είναι

$f(\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln \alpha \leq 0 \Leftrightarrow \ln \alpha \geq 1 = \ln e \Leftrightarrow \alpha \geq e$. Άρα $\alpha_{\min} = e$.

Θεωρητικές ασκήσεις

86. Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε επειδή είναι παραγωγίσιμη, από το θ. Fermat ισχύει: $f'(x_0) = 0$. Είναι:

$$(f^2(x) + x^2)' = (1 + 2xf(x))' \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) + 2x = 2f(x) + 2xf'(x). \text{ Για}$$

$$x = x_0 \text{ είναι } 2f(x_0)\cancel{f'(x_0)}^0 + 2x_0 = 2f(x_0) + 2x_0\cancel{f'(x_0)}^0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0.$$

$$\text{Τότε } f^2(x_0) + x_0^2 = 1 + 2x_0f(x_0) \Leftrightarrow x_0^2 + x_0^2 = 1 + 2x_0^2 \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα η f δεν έχει ακρότατα.

87. Αφού η f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα τότε έχει μέγιστο και ελάχιστο. Το πεδίο ορισμού της f είναι ανοιχτό διάστημα άρα τα παρουσιάζει σε εσωτερικά σημεία, οπότε από το Θ. Fermat προκύπτει το ζητούμενο.

88.α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της f και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, από το θεώρημα Fermat είναι $f'(0) = 0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 0.$$

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $f(1) = 2$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x)) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x)) - f(1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x)) - f(f(0))}{x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x)) - f(f(0))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x)) - f(f(0))}{x} = g'(0) = f'(f(0))f'(0) = f'(1) \cdot 0 = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f(f(x)) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x f(f(x)) - 2e^x + 2e^x - 2}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x (f(f(x)) - 2)}{x} + 2 \frac{e^x - 1}{x} \right) = e^0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{k(x)=e^x}{=} \lim_{\substack{k'(x)=e^x, \\ k'(0)=1}} \frac{k(x) - k(0)}{x} = k'(0) = 1$$

89.α) Είναι $f(x+2) = f(4-x)$ (1). Με παραγώγιση κατά μέλη της (1) έχουμε $f'(x+2) = -f'(4-x)$. Για $x=1$ προκύπτει $f'(3)=0$. Άρα το $x=3$ είναι ρίζα της $f'(x)=0$. Αν υπάρχει και άλλη λύση ρ με $(\rho < 3)$ ή $(\rho > 3)$, τότε από θεώρημα Rolle για την f' στο $[\rho, 3]$ ή $[3, \rho]$ υπάρχει $\xi \in (\rho, 3) : f''(\xi) = 0$ που είναι άτοπο. Άρα $x=3$ μοναδική λύση της $f'(x)=0$.

β) Αφού f'' συνεχής και $f''(x) \neq 0$ τότε η f'' θα διατηρεί πρόσημο στο $[1, 4]$.

Αν $f''(x) < 0$ τότε $f' \searrow$. Για κάθε $1 < x < 3 \Rightarrow f'(x) > f'(3) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, 3]$.

Τότε $1 < 2 \Rightarrow f(1) < f(2)$ που είναι άτοπο. Άρα $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, 4]$. Για

κάθε $3 < x < 4 \Rightarrow f'(x) > f'(3) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [3, 4]$ και για κάθε

$1 < x < 3 \Rightarrow f'(x) < f'(3) = 0 \Rightarrow f' \searrow [1, 3]$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(3)$ και τοπικά μέγιστα τα $f(1), f(4)$.

90. Επειδή η f δεν είναι $1-1$ υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ τέτοια, ώστε

$f(\alpha) = f(\beta)$. Από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [\alpha, \beta]$. Για κάθε $\alpha < x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow [\alpha, \xi]$
Για κάθε $\xi < x < \beta \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \searrow [\xi, \beta]$. Η f έχει μέγιστο στο $x = \xi$.

91. Είναι $[f(f(f(x)))]' = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι: $f'(0) < f'(2) < f'(3) \Leftrightarrow f'(0) < 0 < f'(3)$. Επειδή η $f \circ f \circ f$ έχει ακρότατο στο $x_0 = 3$, είναι $(f \circ f \circ f)'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(f(f(3)))f'(f(3))f'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(f(0))f'(0)f'(3) = 0 \Leftrightarrow (f'(f(0)) = 0)$ ή $(f'(0) = 0$ που είναι αδύνατο) ή $(f'(3) = 0$ που είναι επίσης άτοπο).

Επειδή $f' \nearrow$ είναι και 1-1, οπότε: $f'(f(0)) = 0 = f'(2) \Leftrightarrow f(0) = 2$.

92. Είναι $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$.

α) $f''(x_0) > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ άρα $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ για κάθε x κοντά στο x_0

Για κάθε x κοντά στο x_0 με $x < x_0$ είναι $f'(x) < 0$ άρα υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $f \searrow [\delta_1, x_0]$ και για κάθε x κοντά στο x_0 με $x > x_0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε $f \nearrow [x_0, \delta_2]$ οπότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

β) $f''(x_0) < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ άρα $\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 . Για

κάθε x κοντά στο x_0 με $x < x_0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε $f \nearrow [\delta_1, x_0]$ και για κάθε x κοντά στο x_0 με $x > x_0$ είναι $f'(x) < 0$ άρα υπάρχει $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε $f \searrow [x_0, \delta_2]$ άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

93.α) $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow \mathbb{R}$. Έστω ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη. Έστω $f \nearrow \mathbb{R}$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το $f(\mathbb{A}) = (-\infty, \infty)$ που είναι

αδύνατο. Όμοια αν η f είναι $\searrow$. Άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ και επειδή $f' \searrow$, είναι μοναδικό.

β) Για κάθε $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, x_0]$ και για

$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \searrow [x_0, +\infty)$, άρα η f έχει μέγιστο στο x_0 .

94.α) Για $x = 3$ είναι $2f(3) \geq f(3) + f(4) \Leftrightarrow f(3) \geq f(4)$ (1) και για $x = 4$ είναι $2f(4) \geq f(3) + f(4) \Leftrightarrow f(4) \geq f(3)$ (2). Από τις (1), (2), είναι $f(3) = f(4)$.

β) Είναι $2f(x) \geq f(3) + f(4) \Leftrightarrow 2f(x) \geq 2f(3) \Leftrightarrow f(x) \geq f(3)$ και $f(x) \geq f(4)$.

Δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στα $x_1 = 3$ και $x_2 = 4$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, από το θ. Fermat ισχύει ότι $f'(3) = 0$ και $f'(4) = 0$. Επειδή $f(3) = f(4)$, από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (3, 4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή $f'(3) = f'(\xi) = f'(4)$, από το θ. Rolle για την f' , υπάρχει $\xi_1 \in (3, \xi)$ και $\xi_2 \in (\xi, 4)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$. Επειδή $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$ από το θεώρημα Rolle για την f'' , υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

95.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-a, a]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[-2a, 2a]$ και $f(-a) = \frac{a}{2}$,

$f(a) = \frac{a}{3}$ η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $-a, a$ του διαστήματος

$[-a, a]$, όποτε θα υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-a, a)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1) = m$ και $f(\xi_2) = M$. Τότε από το θ. Fermat είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

β) Από το θ. Rolle για την f' υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (-a, a)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

96. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ θα έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο διάστημα αυτό. Επειδή το σύνολο τιμών είναι το $[1, 5]$,

$f(1) = 2, f(2) = 3$, η f δεν έχει ακρότατα στα άκρα $1, 2$ του διαστήματος, οπότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 2)$, τέτοια, ώστε $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$. Τότε από

το θ.Fermat είναι $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Έστω $x_1 < x_2$. Από το θ.Rolle για την f' υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0)=0$.

97.α) Αν η f είχε ακρότατο στο $x_1 \in (0,1)$, τότε από το θ.Fermat θα ήταν $f'(x_1)=0$ που είναι άτοπο. Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,1)$.

β) Από το Θ.ΜΤ για την f , υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f(1) - f(0) = 3 > 0$ και $f'(\xi_2) = f(2) - f(1) = -3 < 0$. Επειδή το $x_0 = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,2)$, οπότε η f' διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$. Επειδή $f'(\xi_1) > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0,1]$ και επειδή $f'(\xi_2) < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1,2]$. Είναι $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [1, 4]$ και $f([1,2]) = [f(2), f(1)] = [1, 4]$, άρα $f(A) = [1, 4]$.

98. Από τη σχέση $f(0) < f(2) < f(1)$ η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στα 0,2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ στο οποίο η f να παρουσιάζει μέγιστο. Τότε από Θ.Fermat είναι $f'(x_0) = 0$.

99.α) Επειδή τα $f(0), f(8)$ είναι ενδιάμεσες τιμές, η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στις θέσεις $x = 0$ και $x = 8$. Η f είναι συνεχής στο $[0,8]$, άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,8)$ στα οποία η f να παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα. Τότε από το θεώρημα Fermat είναι $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Επομένως η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

β) Από το ΘΜΤ για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2], [2,6], [6,8]$

υπάρχουν $\xi_1 \in (0,2): f'(\xi_1) = \frac{f(2)-f(0)}{2} > 0$, $\xi_2 \in (2,6):$

$f'(\xi_2) = \frac{f(6)-f(2)}{4} < 0$ και $\xi_3 \in (6,8): f'(\xi_3) = \frac{f(8)-f(6)}{2} > 0$. Είναι

$f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0, f'(\xi_2)f'(\xi_3) < 0$ και η f' είναι συνεχής στα

$[\xi_1, \xi_2], [\xi_2, \xi_3]$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα

υπάρχουν $x_1 \in (\xi_1, \xi_2)$ και $x_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$

. Επομένως η f έχει τουλάχιστον δύο κρίσιμα σημεία.

100. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 4]$ θα έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(2) < f(1) < f(4) < f(3)$ η f δεν έχει ακρότατα στα άκρα 1 και 4 του διαστήματος, άρα θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 4)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη από το θ.Fermat, ισχύει ότι: $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Έστω $x_1 < x_2$. Από το θ.Rolle για την f' η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2) , οπότε η f' έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο.

101. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ θα έχει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο διάστημα αυτό. Επειδή δεν έχει ακρότατα στα άκρα a, b του διαστήματος, θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$, τέτοια, ώστε $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$. Τότε από το θ.Fermat είναι $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Έστω $x_1 < x_2$. Από το θ.Rolle για την f' υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$.

102. Θεώρημα Rolle: Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Απόδειξη: Αφού f συνεχής στο $[a, b]$ τότε από το ΘΜΕΤ η f θα έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο $[a, b]$. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_1 του $[a, b]$ τότε από το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(x_1) = 0$. Ομοίως αν υποθέσουμε ότι παίρνει την ελάχιστη τιμή σε εσωτερικό σημείο. Τέλος, υποθέτουμε ότι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή παίρνονται και οι δύο στα άκρα, τότε $f(a) = f(b) \Leftrightarrow M = m$ άρα ταυτίζονται το μέγιστο με το ελάχιστο άρα η f είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα για κάθε $x \in (a, b)$ είναι $f'(x) = 0$.

103. Έστω ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 2. Τότε $f(x) \geq f(2)$ για κάθε

$$x \in [1, 2]. \text{ Είναι } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} > 0. \text{ Όμως}$$

$$x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0 \text{ και } f(x) - f(2) \geq 0, \text{ άρα}$$

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

104. Αν η f είχε μέγιστο στο 1, τότε $f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \leq 0$ για κάθε

$x \in [0,1]$. Για $x \in (0,1)$ είναι $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq 0$, άρα

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow f'(1) \geq 0$ που είναι άτοπο.

105. α) Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = \alpha$ ισχύει ότι

$f(x) \geq f(\alpha)$ για κάθε $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ όπου $\delta > 0$ και $\alpha + \delta < \beta$. Τότε

$f(x) - f(\alpha) \geq 0$, $x - \alpha > 0$ οπότε $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0$

$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \geq 0 \Leftrightarrow f'(\alpha) \geq 0$.

β) Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = \alpha$, ισχύει ότι $f(x) \leq f(\alpha)$

για κάθε $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ όπου $\delta > 0$ και $\alpha + \delta < \beta$. Τότε $f(x) - f(\alpha) \leq 0$, $x - \alpha > 0$

οπότε $\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq 0 \Leftrightarrow f'(\alpha) \leq 0$

γ) Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = \beta$, ισχύει ότι $f(x) \geq f(\beta)$ για

κάθε $x \in (\beta - \delta, \beta)$, όπου $\delta > 0$ και $\alpha < \beta - \delta$. Τότε $f(x) - f(\beta) \geq 0$, $x - \beta < 0$

οπότε $\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \leq 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \leq 0 \Leftrightarrow f'(\beta) \leq 0$,

δ) Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = \beta$, ισχύει ότι $f(x) \leq f(\beta)$ για

κάθε $x \in (\beta - \delta, \beta)$, όπου $\delta > 0$ και $\alpha < \beta - \delta$. Τότε $f(x) - f(\beta) \leq 0$, $x - \beta < 0$

οπότε $\frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \geq 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \geq 0 \Leftrightarrow f'(\beta) \geq 0$.

106. Είναι $f(-1) = f(1) = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό.

- Αν η f παρουσιάζει ακρότατα στα άκρα $-1, 1$ του πεδίου ορισμού της, τότε επειδή $f(-1) = f(1) = 0$, το μέγιστο και το ελάχιστο της f είναι το μηδέν, οπότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

- Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα σε εσωτερικά σημεία του $[-1,1]$. Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1,1)$, τέτοια, ώστε $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$. Τότε από το θ. Fermat είναι $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Όμως

$f(x_1) = (x_1^2 - 1) \cancel{f'(x_1)}^0 = 0$ και $f(x_2) = (x_2^2 - 1) \cancel{f'(x_2)}^0 = 0$, άρα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι μηδέν οπότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

• Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατα σε ένα από τα άκρα και σε ένα εσωτερικό σημείο x_3 του $[-1, 1]$. Τότε από το Θ.Fermat είναι $f'(x_3) = 0$. Όμως

$f(x_3) = (x_3^2 - 1) \cancel{f'(x_3)}^0 = 0$, άρα η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f είναι μηδέν οπότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

107. Είναι $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Αρκεί να δείξουμε ότι η f'' διατηρεί πρόσημο στο Δ . Έστω ότι η f'' δεν διατηρεί πρόσημο στο Δ , τότε υπάρχουν $\alpha, \beta \in \Delta$ τέτοια ώστε $f''(\alpha) < 0$ και $f''(\beta) > 0$. Η f' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη άρα από το ΘMET θα παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο στο $[\alpha, \beta] \subseteq \Delta$.

Αν $\alpha < \beta$ τότε είναι $f''(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x) - f'(\alpha)}{x - \alpha} < 0$ άρα για κάθε x κοντά

στο α με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Delta$ είναι $\frac{f'(x) - f'(\alpha)}{x - \alpha} < 0 \Leftrightarrow$

$f'(x) - f'(\alpha) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\alpha)$ άρα η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στο α .

Αντίστοιχα είναι $f''(\beta) > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{f'(x) - f'(\beta)}{x - \beta} > 0$ άρα για κάθε x κοντά στο β

με $x \in (\alpha, \beta) \subseteq \Delta$ είναι $\frac{f'(x) - f'(\beta)}{x - \beta} > 0 \Leftrightarrow f'(x) - f'(\beta) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\beta)$

άρα η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στο β . Άρα η f' παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ οπότε σύμφωνα με το Θ.Fermat είναι $f''(x_0) = 0$, πράγμα άτοπο.

Ομοίως αν $\alpha > \beta$ δείχνουμε ότι δεν παρουσιάζει ελάχιστο στα α και β , άρα παρουσιάζει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο οπότε από το Θ.Fermat καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η f'' διατηρεί πρόσημο στο Δ , άρα είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

108. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Άρα υπάρχουν $x_\epsilon, x_\mu \in [\alpha, \beta] : f(x_\epsilon) \leq f(x) \leq f(x_\mu)$.

Αν x_ϵ είναι άκρο τότε αφού $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, είναι $f(x_\epsilon) = 0$. Αν x_ϵ εσωτερικό, από Θ.Fermat είναι $f'(x_\epsilon) = 0$. Όμως

$f^5(x_e) = f'(x_e) = 0 \Rightarrow f(x_e) = 0$. Όμοια και για $f(x_\mu)$, οπότε
 $0 \leq f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Σύνθετες ασκήσεις

109. α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με
 $f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Για κάθε $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ είναι
 $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 2]$ και $[3, +\infty)$, είναι γνησίως
αύξουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x \in (2, 3)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η
 f είναι συνεχής στο $[2, 3]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει
τοπικό μέγιστο το $f(2) = \frac{11}{3}$ και τοπικό ελάχιστο το $f(3) = \frac{7}{2}$.

β) Είναι $f(0) = -1$ και $f'(0) = 6$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η
ευθεία $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = 6x - 1$.

Για να εφάπτεται η ε της C_g πρέπει αρχικά να υπάρχει $x_1 > 0$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_1) = \lambda_e = 6. \text{ Είναι } g'(x) = \frac{6}{x}, \text{ οπότε } g'(x_1) = 6 \Leftrightarrow \frac{6}{x_1} = 6 \Leftrightarrow x_1 = 1. \text{ Η}$$

εφαπτομένη της C_g στο $x_1 = 1$ έχει εξίσωση:

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 5 = 6x - 6 \Leftrightarrow y = 6x - 1, \text{ δηλαδή είναι η } \varepsilon.$$

γ) Στο διάστημα $[2, 3]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι 1-1 στο
διάστημα αυτό και η εξίσωση γίνεται: $f(x) = f(3) \Leftrightarrow x = 3$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3} = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3} = +\infty$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει

$$\text{αντίστοιχο σύνολο τιμών το } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \right) = \left(-\infty, \frac{11}{3} \right).$$

$$\text{Επειδή } f(3) = \frac{7}{2} < \frac{11}{3} \text{ αφού } \frac{21}{6} < \frac{22}{6}, \text{ το } f(3) \text{ περιέχεται στο } f(\Delta_1),$$

επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f(3)$.

Για κάθε $x > 3$ είναι $f(x) > f(3)$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $(3, +\infty)$.

Τελικά η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες.

$$\delta) 1^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\eta\mu(f(x) - f(3)) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{x - x_0} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{συν}(f(x) - f(3)) \cdot f'(x)}{1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0 \cdot f'(x_0) = 0 = f'(x_0)$$

2ος τρόπος

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \cdot f'(x_0) = f'(x_0)$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{\substack{f(x) - f(x_0) = u \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{u} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

110. α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το A , ισχύει ότι:

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + \alpha} = 2 \Leftrightarrow 1 + \alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 3.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{(x^2 + 3)'}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$

Είναι $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ και $f(1) = \sqrt{4} = 2$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$

έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

γ) Επειδή $\sqrt{x^2 + 3} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0) = \sqrt{3}$.

2ος τρόπος: $x^2 + 3 \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0) = \sqrt{3}$.

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{2}.$

111. α) Επειδή το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση της f , ισχύει ότι

$$f(-2) = 0 \Leftrightarrow -8\alpha + 4\beta - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\beta = 8\alpha + 4 \Leftrightarrow \beta = 2\alpha + 1 \quad (1)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο

$$A(-2, 0), \text{ ισχύει ότι } f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12\alpha - 4\beta = 0 \Leftrightarrow 12\alpha - 8\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ οπότε } \beta = 3.$$

β) Είναι $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ και $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$.

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 0$

Για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty, -2]$ και $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x \in (-2, 0)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2) = 0$ και τοπικό ελάχιστο το $f(0) = -4$.

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ είναι $\lambda = f'(x)$. Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο M είναι το $f''(x) = 6x + 6$. Για κάθε $x < -1$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x > -1$ είναι $f''(x) > 0$. Επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$. Η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο M γίνεται ελάχιστη για $x = -1$. Είναι $f(-1) = -1 + 3 - 4 = -2$, οπότε $M(-1, -2)$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αρκεί να βρούμε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Μια εύκολη λύση είναι να βρούμε τις ρίζες της f .

Επειδή $f(-2) = 0$, ρίζα της f είναι το -2 , οπότε από το σχήμα Horner

προκύπτει ότι $f(x) = (x+2)(x^2 + x - 2)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή

$(x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2)$

1	3	0	-4	-2
	-2	-2	4	
1	1	-2	0	

Επειδή $f(-2) = f(1) = 0$, εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-2, 1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (-2, 1)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi(\xi+2) = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$ δεκτό ή $\xi = -2$ απορρίπτεται

112. α) Είναι $A_{\varphi \circ h} = \{x \in A_h / h(x) \in A_\varphi\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x > 0\} = \mathbb{R}$,

$(\varphi \circ h)(x) = \varphi(h(x)) = e^x \ln e^x + 3 = xe^x + 3, x \in \mathbb{R}$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.

$\alpha f'(x) = \beta(f(x) - 3) + e^x \Leftrightarrow \alpha(x+1)e^x = \beta(xe^x + 3 - 3) + e^x \Leftrightarrow$

$\alpha(x+1)e^x = \beta xe^x + e^x \Leftrightarrow (\alpha x + \alpha)e^x = (\beta x + 1)e^x \Leftrightarrow \alpha x + \alpha = \beta x + 1$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$

γ) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^x + 3 - e^x = 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x + 3 = 0$ να είναι αδύνατη. Έστω $\Phi(x) = (x-1)e^x + 3, x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$\Phi'(x) = e^x + (x-1)e^x = e^x(1+x-1) = xe^x.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $\Phi'(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $\Phi'(x) > 0$.

Επειδή η Φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η Φ έχει ελάχιστο το $\Phi(0) = 2$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\Phi(x) \geq 2 > 0$, οπότε η εξίσωση $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(x)$ είναι αδύνατη, επομένως οι γραφικές παραστάσεις των h, f δεν έχουν κοινά σημεία.

δ) $\varphi(x) \leq x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x \ln x + 3 \leq x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x \ln x \leq x(x-1) \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x \leq x-1$ που ισχύει.

$$\epsilon) \ln \frac{1}{x} < \frac{3}{x} \Leftrightarrow -\ln x < \frac{3}{x} \Leftrightarrow -x \ln x < 3 \Leftrightarrow 0 < x \ln x + 3 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0.$$

$$\text{Είναι } \varphi'(x) = \ln x + 1 \text{ και } \varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $\varphi'(x) > 0$

Επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και γνησίως

αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Η φ έχει ελάχιστο το

$$\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + 3 = -\frac{1}{e} + 3 > 0, \text{ άρα } \varphi(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$113. \alpha) (f^3(x) + f(x))' = (8x^3 - 12x^2 + 8x - 3)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 24x^2 - 24x + 8 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 1) = 8(3x^2 - 3x + 1).$$

Επειδή $3x^2 - 3x + 1 > 0$ ($\Delta < 0$) και $3f^2(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f: \mathbb{R} \Rightarrow f: 1-1$$

$$\beta) \text{ Για } x=0 \text{ είναι } f^3(0) + f(0) = -3 \Leftrightarrow f(0) \left(\underbrace{f^2(0) + 1}_{>0} \right) = -3 \Rightarrow f(0) < 0 \text{ και}$$

για $x = 1$ είναι $f^3(1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) \left(\underbrace{f^2(1) + 1}_{>0} \right) = 1 \Rightarrow f(1) > 0$, δηλαδή $f(0)f(1) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική. Για $x = \frac{1}{2}$ είναι $f^3\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \left(f^2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 \right) = -1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $[0, 1]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Όμως η f έχει μόνο μια ρίζα, οπότε αυτή είναι πιο κοντά στο 1.

γ) $f(g(x) - 3x) = f(x^2 + 2) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} g(x) - 3x = x^2 + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 3x + 2$,
 $x \in \mathbb{R} \cdot g'(x) = 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$. Για κάθε $x < -\frac{3}{2}$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$ και για κάθε $x > -\frac{3}{2}$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = -\frac{3}{2}$.

114. α) Αν η f είχε ακρότατο στο $x_0 \in (0, \alpha)$, στο οποίο είναι παραγωγίσιμη τότε από το θ. Fermat θα ήταν $f'(x_0) = 0$ που είναι άτοπο, αφού το μηδέν είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$. Άρα δεν έχει ακρότατα στο $(0, \alpha)$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ θα έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή επιπλέον η f δεν έχει ακρότατα στο $(0, \alpha)$, θα έχει ακρότατα τα $f(0) = 2\alpha$ και $f(\alpha) = \alpha$. Επειδή $\alpha < 2\alpha$, είναι $f([0, \alpha]) = [\alpha, 2\alpha]$. Όμοια η f δεν έχει ακρότατα στο $(-\alpha, 0)$, οπότε τα ακρότατα του είναι το $f(-\alpha) = \alpha$ και $f(0) = 2\alpha$.

γ) Από το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχουν $\xi_1 \in (-\alpha, 0)$ και $\xi_2 \in (0, \alpha)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(-\alpha)}{0 - (-\alpha)} = 1 \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = -1, \text{ οπότε}$$

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2) = -1.$$

δ) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[a, 2a]$, ισχύει ότι $a \leq f(x) \leq 2a$ για κάθε

$$x \in [-a, a]. \text{ Άρα } a \leq f\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \leq 2a, \quad a \leq f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq 2a, \text{ οπότε}$$

$$2a \leq f\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq 4a \Leftrightarrow a \leq \frac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \leq 2a. \text{ Επειδή ο αριθμός}$$

$$\frac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2}, \text{ ανήκει στο σύνολο τιμών της } f, \text{ υπάρχει } x_1 \in [-a, a] \text{ τέτοιο,}$$

$$\text{ώστε } f(x_1) = \frac{f\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \Leftrightarrow 2f(x_1) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + f\left(-\frac{\alpha}{2}\right).$$

115. α) Από το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 5)$

με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = -1$ ελάχιστο της f , $f(x_2) = 6$ μέγιστη τιμή της f .

Από το θεώρημα Fermat είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

β) Επειδή $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ και η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle οπότε υπάρχει

$$\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 5) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi) = 0.$$

γ) Έστω $h(x) = f(x)f'(x) + f^4(x) - x$, $x \in [x_1, x_2] \subseteq (1, 5)$

$$h(x_1) = f(x_1)f'(x_1) + f^4(x_1) - x_1 = 1 - x_1 < 0,$$

$$h(x_2) = f^4(x_2) - x_2 = 6^4 - x_2 > 0 \text{ και επειδή η } h \text{ είναι συνεχής, από το Θ.Β}$$

$$\text{υπάρχει } x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (1, 5) : h(x_0) = 0$$

δ) Έστω $g(x) = f(x) - (-x + 6) = f(x) + x - 6$, $x \in [1, 5]$. Είναι

$$g(1) = f(1) + 1 - 6 = 3 + 1 - 6 = -2 < 0, \quad g(5) = f(5) + 5 - 6 = 4 + 5 - 6 = 3 > 0$$

και επειδή η g είναι συνεχής, από το Θ.Β υπάρχει $\rho \in (1, 5) : g(\rho) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(\rho) = 6 - \rho.$$

$$116. \alpha) \ln f'(x) = f(x) - \ln x \Rightarrow f'(x) = e^{f(x) - \ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{-f(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow (-e^{-f(x)})' = (\ln x)' \Leftrightarrow -e^{-f(x)} = \ln x + c. \text{ Είναι } f\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln 2,$$

$$\text{οπότε } -e^{\ln 2} = -1 + c \Leftrightarrow c = -1. \text{ Άρα}$$

$$-e^{-f(x)} = \ln x - 1 \Leftrightarrow -f(x) = \ln(1 - \ln x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln(1 - \ln x) \quad ($$

$$0 < x < e \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0)$$

$$\beta) \text{ i. } f'(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, e). \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = +\infty, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-\ln(1 - \ln x)] \stackrel{1 - \ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (-\ln u) = -\infty. \text{ Επίσης}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} (1 - \ln x) = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} [-\ln(1 - \ln x)] \stackrel{1 - \ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty$$

$$\text{οπότε } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

$$\text{ii. } f''(x) = \dots = \frac{\ln x}{x^2(1 - \ln x)^2}. \text{ Για κάθε } x \in (1, e) \text{ είναι } f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, e)$$

και για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (0, 1]$. Άρα ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για $x = 1$.

$$\text{iii. Είναι } 1 - \ln x = \frac{1}{e^\lambda} \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = -\lambda \Leftrightarrow -\ln(1 - \ln x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

Άρα

η εξίσωση είναι $f(x) = \lambda$, η οποία έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ αφού $f \nearrow$ και το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

$$117. \alpha) D_f = (-1, +\infty), f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}, f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ άρα}$$

$$f' \nearrow (-1, +\infty). \text{ Για κάθε } -1 < x < 0 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-1, 0],$$

για κάθε $x > 0 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 0$.

$\beta)$ Αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα

$$\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right], \left[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta \right], \text{ οπότε υπάρχουν } \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \text{ και}$$

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right) \text{ τέτοια, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta)$$

γ) Για κάθε $-1 < x < 0 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(x) > f(0) = 0$ και για κάθε

$$x > 0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$\delta) e^{3\kappa+2\lambda-13} - \ln(3\kappa+2\lambda-12) - 1 + e^{2\kappa+\lambda-8} - \ln(2\kappa+\lambda-7) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$f(3\kappa+2\lambda-13) + f(2\kappa+\lambda+8) \leq 0$ (1). Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$, άρα

$f(x) \geq 0$ για κάθε $x > -1$. Άρα $f(3\kappa+2\lambda-13) \geq 0$ και $f(2\kappa+\lambda-8) \geq 0$ με

$$3\kappa+2\lambda-13 > -1 \text{ και } 2\kappa+\lambda-8 > -1. \text{ Άρα } \left. \begin{array}{l} f(3\kappa+2\lambda-13) = 0 \\ f(2\kappa+\lambda-8) = 0 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 3\kappa+2\lambda-13 = 0 \\ 2\kappa+\lambda-8 = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \kappa = 3 \\ \lambda = 2 \end{array} \text{ που ικανοποιούν τους περιορισμούς.}$$

$$\mathbf{118. \alpha)} f'(0) = 2f(0)(0 - \eta\mu 0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^2}{x} = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) - e^2 f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(x) - e^2)}{x} = f(0)f'(0) = 0$$

β) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει ότι $|\eta\mu x| < |x|$.

Αν $x > 0$, τότε $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Rightarrow x - \eta\mu x > 0$, $f(x) > 0$, οπότε

από τη σχέση $f'(x) = 2f(x)(x - \eta\mu x)$ προκύπτει ότι $f'(x) > 0$. Η f είναι

συνεχής, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Αν $x < 0$, τότε

$|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Rightarrow x - \eta\mu x < 0$, $f(x) > 0$, οπότε από τη σχέση $f'(x) = 2f(x)(x - \eta\mu x)$ προκύπτει ότι $f'(x) < 0$. Η f είναι συνεχής, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

$$\gamma) f'(x) = 2f(x)(x - \eta\mu x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x - 2\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln(f(x)) \right]' = (x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow \ln(f(x)) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Για $x=0$ είναι $\ln(f(0)) = 2 + c \Leftrightarrow 2 = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα

$$\ln(f(x)) = x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x}$$

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, έχει ελάχιστο στο $x=0$, οπότε

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow e^{x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x} \geq e^2 \Leftrightarrow x^2 + 2\sigma\upsilon\nu x \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\epsilon) \text{ Έστω } g(x) = f(x)f'(x) + x^2 - 1 - ef'(x) = f'(x)(f(x) - e) + x^2 - 1, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Είναι $g(0) = f'(0)(f(0) - e) - 1 = -1 < 0$ και

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\right) + \frac{\pi^2}{4} - 1 = 2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) - e\right) + \frac{\pi^2}{4} - 1 \Leftrightarrow$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi^2}{4}}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(e^{\frac{\pi^2}{4}} - e\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) > 0 \text{ γιατί}$$

$$\frac{\pi}{2} > 1 \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{\pi^2}{4}} > e. \text{ Επομένως } g(0)g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \text{ και επειδή η } g \text{ είναι}$$

συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, από το Θ. Bolzano, η

εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$119. \alpha) f(1) = 4 \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

β) Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x - x^4 - \beta x + 2\beta + 6$. Είναι $h(x) \leq h(2)$ οπότε η h έχει μέγιστο στο $2 \in \mathbb{R}$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = 3x^2 + 1 - 4x^3 - \beta$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Fermat οπότε $h'(2) = 0 \Leftrightarrow \beta = -19$.

γ) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ 1-1 } \Rightarrow \text{άρα αντιστρέφεται.}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \text{οπότε } f(A) = \mathbb{R} = D_{f^{-1}}.$$

Για κάθε $x > 2 \Leftrightarrow f(x) > f(2) = 10 \quad (1)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ για τα οποία $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2)$ τότε

$$f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2)) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \quad \text{άτοπο. Άρα } f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \text{ για κάθε}$$

x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ οπότε $f^{-1} \nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x > 2 \Leftrightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(2) = 1 \quad (2)$, γιατί $f(1) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 1$.

$$\text{Από } (1) + (2) \Rightarrow f(x) + f^{-1}(x) > 11.$$

δ) Αρχικά για $x = 1$ ισχύει η ισότητα. Ισχύουν οι υποθέσεις του του Θ.Μ.Τ στο

$$[1, x], x > 1 \text{ οπότε υπάρχει } \xi \in (1, x) : g'(\xi) = \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{g(x) - 14}{x - 1}$$

Είναι $g'(x) = 4x^3 - 19$, $g''(x) = 12x^2 > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα $g' \nearrow [1, +\infty)$.

$$1 < \xi < x \xrightarrow{g' \nearrow} g(\xi) < g'(x) \Leftrightarrow \frac{g(x) - 14}{x - 1} < g'(x) \Leftrightarrow g(x) - 14 < g'(x)(x - 1).$$

120. α) i. Για $x = 0$ είναι $1 \leq f(0) \leq 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$.

ii. Είναι $ax^2 + (a+1)x + 1 \leq f(x) \Leftrightarrow ax^2 + (a+1)x + 1 - f(x) \leq 0 \quad (1)$

Έστω $g(x) = ax^2 + (a+1)x + 1 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. $(1) \Rightarrow g(x) \leq g(0)$, δηλαδή η g έχει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x = 0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2ax + (a+1) - f'(x)$, ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Fermat οπότε $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = a+1$.

$$\text{Είναι } f(x) \leq ax^2 + \beta x + 1 \Leftrightarrow f(x) - ax^2 - \beta x - 1 \leq 0 \quad (2)$$

Έστω $h(x) = f(x) - ax^2 - \beta x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$(2) \Rightarrow h(x) \leq h(0)$, δηλαδή η h έχει μέγιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x = 0$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = f'(x) - 2ax - \beta$ ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Fermat οπότε $h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = \beta$. Άρα $f'(0) = \beta = a+1$

β) Για $x > 0$ είναι $a + \frac{a+1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq a + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha + \frac{\alpha+1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \text{ οπότε από το Κ.Π. είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = 1+1 = 2. \text{ Τότε}$$

$$x^2 + 2x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

γ) Έστω $-1 < x_1 < x_2$ τότε $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1 \Leftrightarrow$

$$(x_1 + 1)^2 < (x_2 + 1)^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (-1, +\infty) \text{ οπότε } f \text{ 1-1.}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x+1)^2 = y, y > 0 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y} - 1,$$

$$\text{άρα } f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1, y > 0, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1, x > 0$$

δ) Είναι $f(x) - x = x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x > -1$,

άρα $f(x) > x$ και επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως

προς την $y = x$, είναι $f^{-1}(x) < x$, άρα $f(x) > f^{-1}(x)$.

$$\epsilon) f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^4 - x^3 - 2x^2 + 6x \Leftrightarrow$$

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x=1) \text{ ή } (x^3 - 3x + 1 = 0)$$

Έστω $\varphi(x) = x^3 - 3x + 1, x \geq -1$. Είναι $\varphi'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$. Για

κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $\varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi \searrow [-1, 1]$, για κάθε $x > 1$ είναι

$$\varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow [1, +\infty). \text{ Είναι } \varphi(-1) = 3, \varphi(0) = 1, \varphi(1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty. \text{ Στο διάστημα } A_1 = [-1, 0] \text{ είναι } \varphi(A_1) = [1, 3].$$

Επειδή $0 \notin \varphi(A_1)$ η $\varphi(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο A_1 . Στο διάστημα $A_2 = (0, 1)$

είναι $\varphi(A_2) = (-1, 1)$. Επειδή $0 \in \varphi(A_2)$ η $\varphi(x) = 0$ έχει μία θετική ρίζα στο

A_2 . Στο διάστημα $A_3 = (1, +\infty)$ είναι $\varphi(A_3) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in \varphi(A_3)$ η

$\varphi(x) = 0$ έχει μία θετική ρίζα στο A_3 . Τελικά η δοθείσα εξίσωση έχει τρεις θετικές ρίζες.

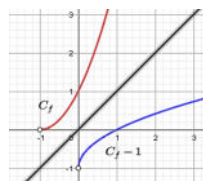
121. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -\ln x$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $\ln x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, 1]$, για κάθε $x > 1$ είναι

$\ln x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty)$ οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο 1, το

$$f(1) = 1.$$

$$\text{Είναι } g(x) = x^x (2-x)^{2-x} = e^{\ln x^x (2-x)^{2-x}} = e^{\ln x^x + \ln(2-x)^{2-x}} = e^{x \ln x + (2-x) \ln(2-x)} \text{ και}$$



$$g'(x) = e^{x \ln x + (2-x) \ln(2-x)} (\ln x + 1 - \ln(2-x) - 1) = e^{x \ln x + (2-x) \ln(2-x)} \ln \frac{x}{2-x},$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x \ln x + (2-x) \ln(2-x)} \ln \frac{x}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{x}{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2-x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2-x \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1. \text{ Για κάθε } x \in (0,1) \text{ είναι}$$

$$g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (0,1] \text{ και για κάθε } x \in (1,2) \text{ είναι } g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [1,2).$$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$, το $g(1)=1$.

β) Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x=1$ οπότε

$$f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow x(1-\ln x) \leq 1 \Leftrightarrow x-x \ln x \leq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

γ) Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ οπότε $g(x) \geq g(1)=1$ για

$$\text{κάθε } x \in (0,2), \text{ οπότε και } g(\alpha) \geq 1 \Leftrightarrow \alpha^\alpha (2-\alpha)^{2-\alpha} \geq 1 \stackrel{\alpha+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=2-\alpha}{\Leftrightarrow} \alpha^\alpha \beta^\beta \geq 1$$

δ) Έστω $\varphi(x) = 3x^2 - 2x^2 \ln x - 4x + 1, x \geq e$. Είναι

$$\varphi'(x) = 6x - 4x \ln x - 2x^2 \cdot \frac{1}{x} = 4x - 4x \ln x = 4x(1 - \ln x) = 4f(x)$$

Για κάθε $x \in (e, +\infty)$ είναι $f(x) < f(e) = 0$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα

οπότε $\varphi'(x) < 0$ στο $(e, +\infty)$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως

φθίνουσα στο $(e, +\infty)$. Για κάθε $x \geq e \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(e)$. Όμως

$$\varphi(e) = e^2 - 4e + 1 = e^2 - 3e + 1 - e = e(e-3) + 1 - e < 0, \text{ άρα}$$

$$3x^2 - 2x^2 \ln x - 4x + 1 \leq e^2 - 4e + 1 < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x^2 \ln x < 4x - 1.$$

ε) Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f(x) < f(1) = 0$ και $g(x) > g(1) = 0$ άρα

$$f(x) < g(x). \text{ Για κάθε } 1 < x < 2 \text{ είναι } f(x) < f(1) = 0 \text{ και } g(x) > g(1) = 0$$

άρα $f(x) < g(x)$. Επειδή $f(1) = g(1) = 0$, η $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = g(x)$.

στ) Επειδή $f'(x) = -\ln x$ η f' έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } g''(x) = e^{x \ln x + (2-x) \ln(2-x)} \left(\ln \frac{x}{2-x} \right)^2 + e^{x \ln x + (2-x) \ln(2-x)} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} \right) > 0 \Rightarrow$$

$$g' \nearrow (0,2). \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x + (2-x) \ln(2-x)} (\ln x - \ln(2-x)) = e^{0+2 \ln 2} (-\infty - \ln 2) = -\infty.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \ln(2-x) \stackrel{2-x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$, είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x + (2-x) \ln(2-x)} (\ln x - \ln(2-x)) = e^{2 \ln 2 + 0} (\ln 2 - (-\infty)) = +\infty$$

Επειδή η g' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0, 2)$ έχει σύνολο τιμών το $g'(A) = \mathbb{R}$.

Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x_1 > 0$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = k$ και υπάρχει

$x_2 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_2) = k$. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f, g δέχονται άπειρες παράλληλες εφαπτόμενες.

ζ) Έστω $a(x) = h(x) - f(x)$, $x > 0$. Είναι

$h(x) \geq f(x) \Leftrightarrow h(x) - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow a(x) \geq a(1)$, δηλαδή η συνάρτηση a παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η a είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$a'(x) = h'(x) - f'(x)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι

$$a'(1) = 0 \Leftrightarrow h'(1) - f'(1) = 0 \Leftrightarrow h'(1) = 0.$$

Άρα η γραφική παράσταση της h δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

122. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\text{Είναι } f(2-x) + 2f(x-2) > x^2 + 2x + 4 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(2-x) + 2f(x-2)) \geq \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12 \quad (1).$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 2} f(2-x) \stackrel{2-x=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 0}} f(u) = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 0}} f(u) = f(0),$$

οπότε η (1) γίνεται $f(0) + 2f(0) \geq 12 \Leftrightarrow 3f(0) \geq 12 \Leftrightarrow f(0) \geq 4$.

β) i) Επειδή για κάθε $x \neq 2$ είναι $f(2-x) + 2f(x-2) > x^2 + 2x + 4$ και

$$f(0) = 4, \text{ ισχύει ότι } f(2-x) + 2f(x-2) \geq x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow$$

$$f(2-x) + 2f(x-2) - x^2 - 2x - 4 \geq 0 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $g(x) = f(2-x) + 2f(x-2) - x^2 - 2x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(2) = f(0) + 2f(0) - 12 = 3f(0) - 12 = 0$ οπότε η (1) γίνεται $g(x) \geq g(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η g έχει ελάχιστο στο $x = 2$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = -f'(2-x) + 2f'(x-2) - 2x - 2, \text{ σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι}$$

$$g'(2) = 0 \Leftrightarrow -f'(0) + 2f'(0) - 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 6.$$

ii) Έχουμε: $f(2-x) + 2f(x-2) > x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow$

$$f(x-2)+2f(x-2)>x^2+2x+4 \Leftrightarrow 3f(x-2)>x^2+2x+4 \Leftrightarrow$$

$$f(x-2)>\frac{x^2+2x+4}{3}. \text{ Όμως } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+2x+4}{3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{3} = +\infty \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x-2) = +\infty. \text{ Αν θέσουμε } u = x-2, \text{ για } x \rightarrow \pm\infty, u \rightarrow \pm\infty \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x-2) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u) = +\infty. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1821$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1821) = +\infty, \text{ άρα } g(x) > 0 \text{ κοντά στο } -\infty \text{ άρα}$$

υπάρχει πολύ μικρός αριθμός γ τέτοιος ώστε $g(\gamma) > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1821) = +\infty, \text{ άρα } g(x) > 0 \text{ κοντά στο } +\infty \text{ άρα υπάρχει}$$

πολύ μεγάλος αριθμός δ τέτοιος ώστε $g(\delta) > 0$. Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν

διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα και στα διαστήματα $[\gamma, 0], [0, \delta]$. Ισχύει :

$$g(0)g(\gamma) < 0, \quad g(0)g(\delta) < 0, \text{ άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano, οπότε}$$

υπάρχουν $x_1 \in (\gamma, 0), x_2 \in (0, \delta)$ τέτοια ώστε

$$g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 1821, \quad g(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = 1821.$$

123. α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow x^2 f(x) - \ln x = 0. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση}$$

$$a(x) = x^2 f(x) - \ln x, \quad x > 0. \text{ Η } a \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ ως άθροισμα}$$

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $a'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - \frac{1}{x}$. Η a' είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$a''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) + \frac{1}{x^2} =$$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$a''(x) = \frac{2x^2 f(x) + 4x^3 f'(x) + x^4 f''(x) + 1}{x^2} = \frac{-1+1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow a'(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Είναι $a'(1) = 2f(1) + f'(1) - 1 = 0$ άρα $c = 0$ οπότε

$$a'(x) = 0 \Leftrightarrow a(x) = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } a(1) = f(1) - \ln 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ άρα για}$$

$$\text{κάθε } x > 0 \text{ ισχύει ότι } x^2 f(x) - \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

β) Είναι $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Για κάθε $0 < x < \sqrt{e}$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, \sqrt{e}]$ και για κάθε $x > \sqrt{e}$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [\sqrt{e}, +\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$, οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq \frac{1}{2e} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{1}{2e} \Leftrightarrow 2e \ln x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln x^{2e} \leq \ln e^{x^2} \Leftrightarrow x^{2e} \leq e^{x^2}.$$

$$\gamma) x^{2e} \leq e^{x^2} \Leftrightarrow \ln x^{2e} \leq \ln e^{x^2} \Leftrightarrow 2e \ln x \leq x^2 \ln e \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{\ln e}{2e} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\ln e}{2e}$$

$$\text{Για } x = \sqrt{e} \text{ είναι } \frac{1}{2e} \leq \frac{\ln \lambda}{2e} \Leftrightarrow \ln \lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq e.$$

δ) Είναι $g(x) \geq 0$ και επειδή $g(1) = 0$, τελικά για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) \geq g(1)$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το Θ. Fermat, είναι $g'(1) = 0$

$$\epsilon) \text{ Είναι } g(x) = |ax - a - x^3 f(x)| = \left| ax - a - x^3 \frac{\ln x}{x^2} \right| = |ax - a - x \ln x| \text{ και}$$

$$g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{x-1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|ax - a - x \ln x|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|ax - a - x \ln x|}{|x-1|} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|ax - a - x \ln x|}{x-1} = |\alpha - 1|$$

$$\text{άρα } \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a - x \ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\alpha - \ln x - 1}{1} = \alpha - 1.$$

στ) Είναι $g(x) = |x - 1 - x \ln x|$, $x > 0$. Έστω $b(x) = x - 1 - x \ln x$, $x > 0$. Είναι $b'(x) = 1 - 1 - \ln x = -\ln x$. Αν $0 < x < 1$ είναι $b'(x) > 0 \Rightarrow b \nearrow (0, 1]$ και αν $x > 1$ είναι $b'(x) < 0 \Rightarrow b \searrow [1, +\infty)$. Η b έχει μέγιστο το $b(1) = 0$ άρα $b(x) \leq 0 \Leftrightarrow x - 1 - x \ln x \leq 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε $g(x) = x \ln x - x + 1$

$$\zeta) x^4 f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 \frac{\ln x}{x^2} = x \ln x - x + 1 \Leftrightarrow x^2 \ln x - x \ln x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \ln x (x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x=1) \text{ ή } (x \ln x + 1 = 0)$$

Έστω $h(x) = x \ln x + 1$, $x > 0$. Είναι $h'(x) = \ln x + 1$.

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Για κάθε $0 < x < \frac{1}{e}$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow \left(0, \frac{1}{e}\right]$ και για κάθε $x > \frac{1}{e}$ είναι

$$h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Η h έχει ελάχιστο το $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + 1 = -\frac{1}{e} + 1 > 0$, άρα για κάθε $x > 0$ είναι

$$h(x) \geq h\left(\frac{1}{e}\right) > 0, \text{ οπότε η εξίσωση } h(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x + 1 = 0 \text{ είναι αδύνατη.}$$

$$124. \alpha) f^2(x) = 2xf(x) + 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)^2 = x^2 + 9 \quad (1). \text{ Επειδή } x^2 + 9 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ είναι}$$

$g(x) = f(x) - x \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $g(0) = f(0) = 3 > 0$, είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η (1)

$$\gammaίνεται: f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 9}}.$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } x^2 < x^2 + 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{x^2 + 9} < x < \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ άρα } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}.$$

$$\gamma) \sqrt{x^2 + 9} = \lambda - x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} + x = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 9} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - 9}{x - \sqrt{x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{x + x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-9}{x} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 9} \right) = +\infty + \infty = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty).$$

- Αν $\lambda \leq 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda > 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

$$\delta) x + \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(x + \sqrt{x^2 + 9})^2 + 9} < 9 \Leftrightarrow f(x) + \sqrt{f^2(x) + 9} < 9 \Leftrightarrow$$

$$f(f(x)) < f(4) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(x) < 4 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} < 4 - x \quad (2)$$

Αν $4 - x < 0 \Leftrightarrow x > 4$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

Αν $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$ η (2) γίνεται:

$$(\sqrt{x^2 + 9})^2 < (4 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 < 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow 8x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{8}. \text{ Άρα οι}$$

λύσεις της ανίσωσης είναι $\left(-\infty, \frac{7}{8}\right)$.

ε) Είναι $M(x(t), y(t))$, όπου $y(t) = x(t) + \sqrt{x^2(t) + 9}$. Είναι $x'(t) = 1$ και

$$y'(t) = x'(t) + \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + 9}}.$$

$$\text{Είναι } (OM) = d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \text{ οπότε } d'(t) = \frac{2x'(t)x(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}.$$

Τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $x(t_0) = 4$, $y(t_0) = 9$ είναι:

$$d'(t_0) = \frac{x'(t_0)x(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{1 \cdot 4 + 9 \left(1 + \frac{4 \cdot 1}{\sqrt{16 + 9}}\right)}{\sqrt{16 + 81}} = \frac{101}{5\sqrt{97}} \text{ cm/sec}$$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = y - x \quad (3)$$

Είναι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9} > x \Leftrightarrow y - x > 0$ οπότε η (3) γίνεται:

$$x^2 + 9 = (y - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = y^2 - 2xy + x^2 \Leftrightarrow 2xy = y^2 - 9 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 9}{2y}, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2 - 9}{2y}, y \in (0, +\infty) \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{2x}, x \in (0, +\infty).$$

$$\zeta) m(x) = (AB) = \sqrt{(x - f^{-1}(x))^2 + (f^{-1}(x) - x)^2} \Leftrightarrow$$

$$m(x) = \sqrt{2(x - f^{-1}(x))^2} = \sqrt{2}|x - f^{-1}(x)|.$$

Επειδή $f(x) > x$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y = x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y = x$. Άρα $m(x) = 2(x - f^{-1}(x)) =$

$$\sqrt{2} \left(x - \frac{x^2 - 9}{2x} \right) = \sqrt{2} \frac{2x^2 - x^2 + 9}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x^2 + 9}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{9}{x} \right), x > 0$$

Είναι $m'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{9}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 9}{\sqrt{2}x^2}$. Για κάθε $x \in (0, 3)$ είναι

$m'(x) < 0 \Rightarrow m \searrow (0, 3]$ και για κάθε $x > 3$ είναι $m'(x) > 0 \Rightarrow m \nearrow [3, +\infty)$. Η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη για $x = 3$ με ελάχιστη απόσταση την

$$(AB) = \frac{3 + \frac{9}{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

η) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) \stackrel{x^2=y}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (u^2 - \eta \mu^2 u) = 0 \text{ και επειδή}$$

$$|\eta \mu f(x)| < |f(x)| \Leftrightarrow \eta \mu^2 f(x) < f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - \eta \mu^2 f(x) > 0, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x^2)}{f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x^2) \cdot \frac{1}{f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)} \right] = +\infty(+\infty) = +\infty.$$

125. α) Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0 = 0$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \nu x}{3x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{6x} = \frac{1}{6} = f(0), \text{ οπότε η } f \text{ είναι}$$

συνεχής στο $x_0 = 0$ και επομένως είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta \mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα για $x > 0$ είναι $|\eta \mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta \mu x < x \Rightarrow x - \eta \mu x > 0$ άρα

$$f(x) = \frac{x - \eta \mu x}{x^3} > 0, \text{ ενώ για } x < 0 \text{ είναι}$$

$$|\eta \mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta \mu x < -x \Rightarrow x - \eta \mu x < 0 \text{ και } f(x) = \frac{x - \eta \mu x}{x^3} > 0. \text{ Επειδή}$$

$$f(0) = \frac{1}{6} > 0, \text{ είναι } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με

$$f'(x) = \frac{(1 - \sin x)x^3 - (x - \eta\mu x)3x^2}{x^6} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x - \chi\sigma\upsilon\nu x - 3x + 3\eta\mu x)}{x^6} = \frac{3\eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x - 2x}{x^4}.$$

Έστω $\varphi(x) = 3\eta\mu x - \chi\sigma\upsilon\nu x - 2x$, $x \in [0, \pi]$. Η φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με

$$\varphi'(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x + \chi\eta\mu x - 2 = 2\sigma\upsilon\nu x - 2 + \chi\eta\mu x,$$

$$\varphi''(x) = -2\eta\mu x + \eta\mu x + \chi\sigma\upsilon\nu x = \chi\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \text{ και}$$

$$\varphi^{(3)}(x) = \cancel{\sigma\upsilon\nu x} - \chi\eta\mu x - \cancel{\sigma\upsilon\nu x} = -\chi\eta\mu x < 0 \text{ και επειδή η } \varphi'' \text{ είναι συνεχής,}$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Για κάθε $0 < x < \pi \Rightarrow \varphi''(x) < \varphi''(0) = 0$ και επειδή η φ' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Για κάθε

$0 < x < \pi \Rightarrow \varphi'(x) < \varphi'(0) = 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Για κάθε $0 < x < \pi \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) = 0$ οπότε $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$.

δ) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x \leq x - 1$, οπότε $\ln x - x \leq -1$.

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$, άρα $f(x) > \ln x - x$ για κάθε $x > 0$.

ε) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\eta\mu x}{x^3} \right) = 0$ γιατί για $x < 0$ είναι

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x^3} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{-x^3} \leq -\frac{1}{x^3} \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} \leq \frac{\eta\mu x}{x^3} \leq -\frac{1}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^3} \right), \text{ οπότε}$$

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x^3} = 0$. Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

ζ) Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, υπάρχει κάποιος

πολύ μικρός αρνητικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει ότι $0 < f(x) < f(\alpha)$ (1)

για κάθε $x < \alpha$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,

υπάρχει κάποιος πολύ μεγάλος θετικός αριθμός β για τον οποίο ισχύει ότι $0 < f(x) < f(\beta)$ (2) για κάθε $x > \beta$.

Στο διάστημα $[a, b]$ η f είναι συνεχής, οπότε λόγω του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής, θα παρουσιάζει μέγιστο M στο διάστημα αυτό. Δηλαδή θα

υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x) \leq f(x_0) = M$ (3) για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f έχει μέγιστο το M για $x = x_0$.

126. α) Αρχικά παρατηρούμε ότι και οι δύο συναρτήσεις $g(x) = e^{x-1} - 1$ και

$h(x) = \ln x + x - 1$ έχουν προφανή ρίζα την $x = 1$. Για την g , έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{x-1} < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{1}{x} + 1$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$h'(x) > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h(x) < h(1) = 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$h(x) > h(1) = 0$. Άρα για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g(x) < 0$ και $h(x) < 0$, οπότε

$g(x)h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > 0$ και $h(x) > 0$,

οπότε $g(x)h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$. Τελικά $f(x) > 0$ για κάθε

$x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

β) 1ος τρόπος: Είναι $g'(x) = e^{x-1} > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty)$.

• Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, 1]$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$g(x_1) < g(x_2) < 0 \Leftrightarrow -g(x_1) > -g(x_2) > 0 \quad (1) \text{ και}$$

$h(x_1) < h(x_2) < 0 \Leftrightarrow -h(x_1) > -h(x_2) > 0 \quad (2)$. Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$$-g(x_1)(-h(x_1)) > -g(x_2)(-h(x_2)) \Leftrightarrow g(x_1)h(x_1) > g(x_2)h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow (0, 1].$$

• Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $0 < g(x_1) < g(x_2)$ (3) και

$0 < h(x_1) < h(x_2)$ (4). Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (3), (4) έχουμε:

$$g(x_1)h(x_1) < g(x_2)h(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty).$$

2ος τρόπος: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = e^{x-1}(\ln x + x - 1) + \left(\frac{1}{x} + 1 \right).$$

Παρατηρούμε ότι οι παραστάσεις e^{x-1} και $\frac{1}{x} + 1$ είναι θετικές για κάθε $x > 0$, οπότε το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο των $\ln x + x - 1 = h(x)$ και $e^{x-1} - 1 = g(x)$. Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g(x) < 0$ και $h(x) < 0$, άρα $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > 0$ και $h(x) > 0$, οπότε $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

γ) Είναι $f(1) = 0$ και $f'(1) = 0$, οπότε η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1, 0)$.

$$\delta) (e^{x-1} - 1)(\ln x + x - 1) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = f(\pi) \quad (5)$$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = f(\pi)$ έχει μοναδική λύση την $x = \pi$ στο διάστημα αυτό.

(Επειδή $\pi > 1$, είναι $f(\pi) > f(1) = 0$)

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{x-1} - 1)(\ln x + x - 1) = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(-\infty) = +\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta = (0, 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta) = (0, +\infty)$. Επειδή το $f(\pi)$ περιέχεται στο $f(\Delta)$, υπάρχει, μοναδικό λόγω μονοτονίας, $x_1 \in \Delta$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = f(\pi)$. Τελικά η (5) έχει ακριβώς δύο λύσεις.

ε) Έστω $\varphi(x) = ex - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x) = e - e^x$.

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq e \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Για κάθε $x < 1$ είναι $\varphi'(x) > 0$, για κάθε $x > 1$ είναι $\varphi'(x) < 0$, επειδή η φ είναι συνεχής στο $x = 1$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα η φ έχει μέγιστο το $\varphi(1) = 0$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) \leq \varphi(1) = 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$.

Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq 0 = f(1)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$. Άρα η εξίσωση $f(x) = \varphi(x)$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

127. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με

$$f'(x) = 2\epsilon\phi x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - \eta\mu x = 2 \frac{\eta\mu x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - \eta\mu x = \frac{2\eta\mu x}{\sin^3 x} - \eta\mu x = \eta\mu x \frac{2 - \sin^3 x}{\sin^3 x}.$$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $0 < \sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin^3 x > 0 \Rightarrow \frac{2 - \sin^3 x}{\sin^3 x} > 0$.

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \frac{2 - \sin^3 x}{\sin^3 x} \geq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$.

β) $1 - \sin x = x^2 \Leftrightarrow 1 - \sin x - x^2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $g'(x) = \eta\mu x - 2x$ και

$g''(x) = \sin x - 2$. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $g''(x) < 0 \Rightarrow g' \searrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Παρατηρούμε ότι $g'(0) = 0$, οπότε για κάθε $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ είναι

$g'(x) > g'(0) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, είναι γνησίως

αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η

g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η g

έχει μέγιστο το $g(0) = 0$. Επομένως $g(x) \leq g(0)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, η οποία είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$.

γ) $\epsilon\varphi^2 x + 2\sin x + x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow \epsilon\varphi^2 x + \sin x - 1 > 1 - x^2 - \sin x \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Επειδή η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$. Επίσης $g(x) \leq 0$ για κάθε

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα για κάθε

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0 \geq g(x)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g'(x) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \pi$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g'(x) = 1 - \pi$.

Επειδή η g' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, έχει σύνολο τιμών το $g'(\Delta) = (1 - \pi, \pi - 1)$, Επειδή το 3 δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της g' , ισχύει ότι $g'(x) \neq 3$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έστω $\varphi(x) = g(x) - 3x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έστω ότι η φ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\rho_1 < \rho_2$. Η φ είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $\varphi'(x) = g'(x) - 3$. Επειδή $\varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2) = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) που είναι άτοπο. Άρα η εξίσωση $g(x) = 3x$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

128. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2, τότε

$f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow f(x) - f(2) \leq 0$. Για κάθε $x \in (2, 4)$ είναι $x - 2 > 0$, άρα

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \leq 0(1).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, ισχύει ότι

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \Leftrightarrow f'(2) \leq 0 \text{ άτοπο. Άρα η } f \text{ δεν έχει μέγιστο στο 2.}$$

$$\beta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) - f(2-h) + f(2)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(2+h) - f(2)}{h} - \frac{f(2-h) - f(2)}{h} \right). \text{ Θέτουμε } -h = u \text{ οπότε}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2+u) - f(2)}{-u} = -\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(2+u) - f(2)}{u} = -f'(2),$$

$$\text{οπότε: } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \frac{f(2-h)-f(2)}{h} \right) = f'(2) - (-f'(2)) = 2f'(2) > 0$$

γ) Επειδή $f(2) < 7 < f(4)$ και η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών οπότε υπάρχει $x_1 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 7$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[2, x_1]$ και $[x_1, 4]$, οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (2, 4)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_2) = \frac{f(x_1) - f(2)}{x_1 - 2} = \frac{2}{x_1 - 2} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{x_1 - 2}{2} \text{ και}$$

$$f'(x_3) = \frac{f(4) - f(x_1)}{4 - x_1} = \frac{9 - 7}{4 - x_1} = \frac{2}{4 - x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{4 - x_1}{2}$$

$$\frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{x_1 - 2}{2} + \frac{4 - x_1}{2} = \frac{\cancel{x_1} - 2 + 4 - \cancel{x_1}}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x_3) + f'(x_2)}{f'(x_2)f'(x_3)} = 1 \Leftrightarrow f'(x_3) + f'(x_2) = f'(x_2)f'(x_3)$$

$$\epsilon) f'(x) = 4 - \frac{f(x) - 1}{x} \Leftrightarrow xf'(x) = 4x - f(x) + 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) - 4x - 1 = 0$$

Έστω $g(x) = xf(x) - 2x^2 - x$, $x \in [2, 4]$. Η g είναι συνεχής στο $[2, 4]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$ με

$$g'(x) = xf'(x) + f(x) - 4x - 1. \text{ Επιπλέον } g(2) = 2f(2) - 8 - 2 = 10 - 10 = 0,$$

$$g(4) = 4f(4) - 32 - 4 = 36 - 36 = 0,$$

δηλαδή $g(2) = g(4)$, άρα λόγω του θεωρήματος Rolle, η εξίσωση

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) - 4x - 1 = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } (2, 4).$$

στ) ι) Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 4)$ και η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 4]$. Για κάθε

$$2 < x < 4 \Rightarrow f'(2) < f'(x) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [2, 4].$$

Επειδή $f(2) = 5$ και $f(4) = 9$, η f έχει σύνολο τιμών το $[5, 9]$.

$$\text{ii)} \frac{f(x)}{x-3} + \frac{f(x-1)}{x-4} = 0 \Leftrightarrow f(x)(x-4) + f(x-1)(x-3) = 0.$$

Έστω $h(x) = f(x)(x-4) + f(x-1)(x-3)$, $x \in [3, 4]$.

Είναι $h(3) = f(3)(3-4) + f(3-1)(3-3) = -f(3) < 0$,

$h(4) = f(4)(4-4) + f(4-1)(4-3) = f(3) > 0$, δηλαδή $h(3)h(4) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(x-4) + f(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{f(x)}{x-3} + \frac{f(x-1)}{x-4} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(3, 4)$.

ζ) Έστω $x \in (2, 4)$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[2, x]$ και $[x, 4]$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (2, x)$ και

$\xi_2 \in (x, 4)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x) - 5}{x - 2}$ και

$f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(x)}{4 - x} = \frac{9 - f(x)}{4 - x}$. Είναι

$f'(\xi_1) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{f(x) - 5}{x - 2} \leq 2 \Leftrightarrow f(x) \leq 2x + 1$ (1) και

$f'(\xi_2) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{9 - f(x)}{4 - x} \leq 2 \Leftrightarrow 9 - f(x) \leq 8 - 2x \Leftrightarrow f(x) \geq 2x + 1$ (2)

Από τις (1), (2) είναι $f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in (2, 4)$. Επειδή $f(2) = 5$ και $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$, είναι $f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in [2, 4]$

129. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \lambda + \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}$.

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Για κάθε $x < -1$ ή $x > 1$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από αυτά.

Για κάθε $-1 < x < 1$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η f' έχει τοπικό ελάχιστο το $f'(-1) = \lambda - 1$ και τοπικό μέγιστο το $f'(1) = \lambda + 1$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x'}{x'^2} = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lambda$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lambda$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = [\lambda-1, \lambda)$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [-1, 1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f'(\Delta_2) = [\lambda-1, \lambda+1]$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3) = (\lambda, \lambda+1]$.

Η f' έχει σύνολο τιμών το $f'(A) = f'(\Delta_1) \cup f'(\Delta_2) \cup f'(\Delta_3) = [\lambda-1, \lambda+1]$.

Όμως $f'(A) = [0, 2]$, άρα $\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ και $\lambda+1=2 \Leftrightarrow \lambda=1$. Άρα $\lambda=1$.

β) Επειδή $f'(A) = [0, 2]$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq -1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(x^2+1)) = +\infty + (+\infty) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \ln(x^2+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln e^x + \ln(x^2+1)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow 0^+ \\ \frac{e^x}{x^2+1} = u}} \ln u = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \frac{1}{x^2+1} \right) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Επειδή το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f ισχύει ότι

$$A_{f^{-1}} = f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}.$$

δ) $f(x) \geq x + x^2 \Leftrightarrow x + \ln(x^2+1) \geq x + x^2 \Leftrightarrow \ln(x^2+1) \geq x^2$ (1)

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $\ln x \leq x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε αντικαθιστώντας όπου x το x^2+1 προκύπτει

$$\ln(x^2+1) \leq x^2+1-1 \Leftrightarrow \ln(x^2+1) \leq x^2$$
 (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $\ln(x^2+1) = x^2 \Leftrightarrow x^2+1=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

ε) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 2x \Leftrightarrow x + \ln(x^2+1) - 2x = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2+1) - x = 0$ να έχει ακριβώς μια ρίζα. Έστω $\varphi(x) = \ln(x^2+1) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\varphi'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 1 = \frac{2x-x^2-1}{x^2+1} = -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. Για κάθε $x \neq 1$ είναι

$\varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(0) = 0$ και επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα, το $x=0$

είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x$

130. α) Μας δίνεται η σχέση : $|f(x) - x^5 - 5x - f(y) - y^5 + 5y| \leq |x - y|^4$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x^5 - 5x + 6$. Από τη σχέση (1) έχουμε

$$\text{για } y = x_0 : |f(x) - x^5 - 5x - f(x_0) - x_0^5 + 5x_0| \leq |x - x_0|^4 \stackrel{x \neq x_0}{\Leftrightarrow}$$

$$\left| \frac{f(x) - x^5 - 5x - f(x_0) - x_0^5 + 5x_0}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0|^3 \Leftrightarrow$$

$$-|x - x_0|^3 \leq \frac{f(x) - x^5 - 5x + 6 - f(x_0) - x_0^5 + 5x_0 - 6}{x - x_0} \leq |x - x_0|^3 \Leftrightarrow$$

$$-|x - x_0|^3 \leq \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0|^3. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|^3) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (|x - x_0|^3) \text{ οπότε από το Κριτήριο}$$

Παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = 0$. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = 0 \text{ οπότε } h'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε η } h \text{ είναι σταθερή}$$

. Έστω $h(x) = c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - x^5 - 5x + 6 = c$.

Για $x = 1$ έχουμε : $f(1) - 1 - 5 + 6 = c \Leftrightarrow c = 0$ οπότε

$$f(x) - x^5 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^5 + 5x - 6$$

β) Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2\sqrt{x+h} - h - g(x) + 2\sqrt{x}}{h} = 0$ (2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = g(x) - 2\sqrt{x} - x + 3$. Από τη σχέση (2) έχουμε :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2\sqrt{x+h} - x - h + 3 - g(x) + 2\sqrt{x} + x - 3}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = 0 \Leftrightarrow k'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε η } k \text{ είναι σταθερή}$$

έστω $k(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g(x) - 2\sqrt{x} - x + 3 = c_1$.

Για $x = 1$ έχουμε : $g(1) - 2 - 1 + 3 = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$ οπότε

$$g(x) - 2\sqrt{x} - x + 3 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 2\sqrt{x} + x - 3, x \geq 0.$$

γ) Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες με παραγώγους αντίστοιχα:

$$f'(x) = 5x^4 + 5 > 0, g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 > 0 \text{ άρα είναι γνησίως αύξουσες.}$$

δ) Οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες οπότε έχουν σύνολα τιμών

αντίστοιχα: $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$,

$g([0, +\infty)) = \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [-3, +\infty)$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 + 5x - 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 5x - 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x} + x - 3) = +\infty + \infty - 3 = +\infty$.

i) Το $2021 \in f(\mathbb{R})$ οπότε υπάρχει μοναδικός, λόγω της μονοτονίας της f , $\eta \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(\eta) = 2021$.

ii) Για $x \neq 1$ έχουμε:

$$\frac{2\sqrt{x}}{x-1} + 1 = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + x - 1 = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + x - 3 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Όμως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$ οπότε η εξίσωση

$$\frac{2\sqrt{x}}{x-1} + 1 = \frac{2}{x-1} \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες.}$$

ε) i) $l(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 5x - 6 - 2\sqrt{x} - x + 3 \Leftrightarrow l(x) = x^3 + 4x - 2\sqrt{x} - 3$.

Η συνάρτηση l είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $l'(x) = 3x^2 + 4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ και δύο

φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $l''(x) = 6x + \frac{1}{2x\sqrt{x}} > 0$ άρα η l'

είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η l' έχει σύνολο τιμών το

$$l'((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} l'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} l'(x) \right) = (0 + 4 - \infty, +\infty + 4 - 0) = (-\infty, +\infty).$$

Το $0 \in l'((0, +\infty))$ οπότε υπάρχει μοναδικός, λόγω της μονοτονίας της l' ,

$\alpha \geq 0$ τέτοιος ώστε $l'(\alpha) = 0$. Έχουμε: $l'(x) \geq 0 \Leftrightarrow l'(x) \geq l'(\alpha) \Leftrightarrow x \geq \alpha$.

Η l είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, $l'(x) > 0$ στο $(\alpha, +\infty)$, $l'(x) < 0$ στο $(0, \alpha)$ άρα

είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, \alpha)$, οπότε

παρουσιάζει ελάχιστο στο α το $l(\alpha) = \beta$.

ii) Έχουμε $\alpha > 0 \Leftrightarrow l(\alpha) < l(0) \Leftrightarrow \beta < -3 < 0$

Έστω $A_1 = [0, \alpha)$, $A_2 = [\alpha, +\infty)$. Η l έχει σύνολα τιμών στα αντίστοιχα διαστήματα λόγω της μονοτονίας της:

$$l(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha} l(x), l(0) \right] = (l(\alpha), -3] = (\beta, -3] \text{ και}$$

$$l(A_1) = \left[l(\alpha), \lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) \right) = \left[\beta, \lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) \right).$$

Επομένως η l είναι αρνητική στο A_1 . Παρατηρούμε ότι $l(1) = 0$ οπότε $1 \in A_2$.

$$\text{Για } \alpha < x < 1 \Leftrightarrow l(\alpha) < l(x) < l(1) \Leftrightarrow \beta < l(x) < 0 \text{ και για}$$

$$x > 1 \Leftrightarrow l(x) > l(1) \Leftrightarrow l(x) > 0.$$

Άρα $l(x) < 0$ στο $(-\infty, 1)$ και $l(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $\alpha^x + \beta^x \geq \gamma x + 2 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - \gamma x - 2 \geq 0$ (2). Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x + \beta^x - \gamma x - 2$ για την οποία είναι $f(0) = 0$, οπότε από τη (2) θα είναι $f(x) \geq f(0)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha + \beta^x \ln \beta - \gamma$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$, συνεπώς από το Θ. Fermat είναι $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha + \ln \beta - \gamma = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta) = \gamma \Leftrightarrow \alpha\beta = e^\gamma$. **Σωστή απάντηση Β.**

$$2. \text{ Είναι } f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \text{ και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \overset{x>0}{1-x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ οπότε η } f \text{ παρουσιάζει μέγιστο στο } x_1 = 1 \text{ το } f(1) = 0$$

, συνεπώς $A(1, 0)$. Επίσης $g'(x) = -x^2 + \lambda x = x(\lambda - x)$ και

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \lambda$, ενώ $g'(x) < 0 \Leftrightarrow (x < 0) \text{ ή } (x > \lambda)$. Η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $x_2 = \lambda$ το $g(\lambda) = \lambda^3$. Άρα $B(\lambda, \lambda^3)$. Οπότε

$$(AOB) = \frac{1}{2}(OA) \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y_B = \frac{1}{2} \lambda^3 = 4 \Leftrightarrow \lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Σωστή απάντηση Β.

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, $f''(x) = 12x^2 + 6\alpha x + 2\beta$

Είναι $f''(x) > 0$ αφού $\Delta = 12(3\alpha^2 - 8\beta) < 0$ και $\alpha = 12 > 0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1) = 4 + 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0$

Για $x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$, ενώ για $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$,

Η f έχει ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1 + 3\alpha + 2\beta + \gamma + 3 = 0$

Σωστή απάντηση Α.

4. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$. Αφού η f παρουσιάζει δυο ακρότατα τότε η $f'(x)$ έχει δυο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. Αφού $\alpha = 3 > 0$ τότε $f'(x) > 0$ για $x < \rho_1$ ή $x > \rho_2$, ενώ $f'(x) < 0$ για $\rho_1 < x < \rho_2$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, \rho_1]$ με $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(\rho_1) \right] = (-\infty, f(\rho_1)]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [\rho_1, \rho_2]$ με $f(A_2) = [f(\rho_2), f(\rho_1)]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_3 = [\rho_2, +\infty)$ με $f(A_3) = \left[f(\rho_2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [f(\rho_2), +\infty)$. Η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = \rho_1$ οπότε $f(\rho_1) = 10$ και τοπικό ελάχιστο $x = \rho_2$ οπότε $f(\rho_2) = 2$. Επειδή $\alpha \in f(A_1)$, $\alpha \in f(A_2)$ και $\alpha \in f(A_3)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες. **Σωστή απάντηση Δ.**

5. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 3x + 4\alpha$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x + 3$ η οποία είναι τριώνυμο ως προς x με

$$\Delta = 4\alpha^2 - 36 = 4(\alpha^2 - 9)$$

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4(\alpha^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow \alpha < -3$ ή $\alpha > 3$ τότε η $f'(x)$ έχει δυο ρίζες ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) και είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \rho_1$ ή $x > \rho_2$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \rho_1 < x < \rho_2$ (αφού $\alpha = 3 > 0$). Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = \rho_1$ και τοπικό ελάχιστο για $x = \rho_2$.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4(\alpha^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$ ή $\alpha = 3$ τότε η $f'(x)$ έχει μια διπλή ρίζα ρ και είναι $f'(x) \geq 0$ (αφού $\alpha = 3 > 0$) και μηδενίζεται μόνο για $x = \rho$ στο οποίο είναι συνεχής οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.
- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4(\alpha^2 - 9) < 0 \Leftrightarrow -3 < \alpha < 3$ τότε είναι $f'(x) > 0$ (αφού $\alpha = 3 > 0$), οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα. Συνεπώς, η f δεν παρουσιάζει ακρότατα όταν $\alpha \in [-3, 3]$.

Σωστή απάντηση Β.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	2. Λ	3. Λ	4. Λ	5. Λ	6. Λ	7. Λ	8. Λ	9. Σ
10. Λ	11. Λ	12. Λ	13. Λ	14. Σ	15. Σ	16. Λ	17. Σ	18. Λ
19. Λ	20. Σ	21. Σ	22. Σ	23. Σ	24. Σ	25. Λ	26. Λ	27. Λ
28. Σ	29. Λ	30. Λ	31. Σ					

29.

Προβλήματα ακροτάτων

Προβλήματα οικονομίας

5. α) Έστω f η συνάρτηση κέρδους. Τότε

$$f(x) = x(5000 - 2x) - 1000x - 100 = -2x^2 + 4000x - 100, \quad x \geq 0.$$

$$f'(x) = -4x + 4000 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1000.$$

Για κάθε $x \in (0, 1000)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, 1000]$ και για κάθε $x > 1000$

είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1000, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο για $x = 1000$ προϊόντα.

β) $f(1000) = -2.000.000 + 4.000.000 - 100 = 1.999.900$ ευρώ.

γ) Είναι $F(x) = -2x^2 + 4000x - 100 - 400x = -2x^2 + 3600x - 100, \quad x > 0$

$F'(x) = -4x + 3600 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 900$. Είναι $F \nearrow [0, 900]$ και $\searrow [900, +\infty)$, έχει μέγιστο για $x = 900$.

6. α) Έστω ότι πωλούνται x βιβλία μετά από τα 200 πρώτα. Τότε οι συνολικές πωλήσεις θα είναι $200 + x$ και η τιμή πώλησης κάθε αντιτύπου θα είναι

$y = 15 - \frac{x}{20}$ ευρώ και το κέρδος από τη πώληση του θα είναι $y - 3$ ευρώ.

β) Το συνολικό κέρδος του βιβλιοπωλείου από τη πώληση των $200 + x$

αντιτύπων είναι $f(x) = (200 + x) \left(12 - \frac{x}{20} \right) = -\frac{x^2}{20} + 2x + 2400$.

$f'(x) = -\frac{x}{10} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 20$. Είναι $f \nearrow [0, 20]$ και $\searrow [20, +\infty)$. Το κέρδος

γίνεται μέγιστο για $x = 20$, δηλαδή από τη πώληση 220 αντιτύπων.

7. α) Η $f(t) = \frac{e^{t-1}}{e^{t-1} - t + 1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με

$$\text{παραγώγο } f'(t) = \frac{e^{t-1}(e^{t-1} - t + 1) - e^{t-1}(e^{t-1} - 1)}{(e^{t-1} - t + 1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{e^{2(t-1)}} - (t-1)e^{t-1} - \cancel{e^{2(t-1)}} + e^{t-1}}{(e^{t-1} - t + 1)^2} = \frac{e^{t-1}(1 - t + 1)}{(e^{t-1} - t + 1)^2} = \frac{e^{t-1}(2 - t)}{(e^{t-1} - t + 1)^2}$$

Επειδή $e^{t-1} > 0$ και $(e^{t-1} - t + 1)^2 > 0$ τότε το πρόσημο τη παραγώγου εξαρτάται από το $2 - t$. Είναι $f'(t) > 0$ για κάθε $t \in (1, 2)$ και $f'(t) < 0$ για κάθε $t \in (2, 3)$, άρα $f \nearrow [1, 2]$ και $f \searrow [2, 3]$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $t = 2$ το

$f(2) = \frac{e}{e-1}$. Επίσης παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $t=1$ και $t=3$ τα

$$f(1)=1 \text{ και } f(3)=\frac{e^2}{e^2-2}.$$

β) Για να μπορεί να αγοράσει ανά πάσα χρονική στιγμή πρέπει να διαθέτει κεφάλαιο ίσο με το μέγιστο της f δηλαδή όσο και η μέγιστη τιμή της μετοχής.

Δηλαδή $\frac{e}{e-1}$ εκατομμύρια ευρώ.

γ) Θα πρέπει να αγοράσει όταν η μετοχή θα έχει την μικρότερη αξία. Επειδή

$\frac{e}{e-1} > 1$ τότε $f(2) > f(1)$ άρα η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(0)=1$. Δηλαδή

πρέπει να αγοράσει την $t=1$, επομένως όταν ξεκινάει η μεταβολή. Τότε θα έχει κεφάλαιο ίσο με 1 εκατομμύριο ευρώ.

Προβλήματα αριθμητικής

8. Έστω x, y οι δύο θετικοί αριθμοί. Τότε $xy = 16 \Leftrightarrow y = \frac{16}{x}$. Έστω

$$f(x) = x + y = x + \frac{16}{x}, \quad x > 0. \text{ Είναι } f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{16}{x^2} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$x^2 \geq 16 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 4. \text{ Είναι } f \searrow (0, 4], \nearrow [4, +\infty) \text{ και η } f \text{ έχει ελάχιστο για } x = 4.$$

Οι δύο αριθμοί είναι το 4 και το $y = \frac{16}{4} = 4$.

9. Έστω x, y οι δύο αριθμοί με $x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$. Έστω

$$f(x) = xy = x(20 - x) = 20x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad f'(x) = 20 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10. \text{ Για}$$

κάθε $x < 10$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 10]$ και για κάθε $x > 10$ είναι

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [10, +\infty). \text{ Η } f \text{ έχει μέγιστο για } x = 10. \text{ Οι δύο αριθμοί είναι το}$$

10 και το $y = 20 - 10 = 10$.

10. Έστω x, y οι δύο θετικοί αριθμοί με $x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - x$. Είναι

$$y > 0 \Leftrightarrow 20 - x > 0 \Leftrightarrow x < 20.$$

$$\text{Τότε } x^2 + y^2 = x^2 + (20 - x)^2 = x^2 + 400 - 40x + x^2 = 2x^2 - 40x + 400.$$

Έστω $f(x) = 2x^2 - 40x + 400, x \in (0, 20)$. Είναι $f'(x) = 4x - 40 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 10$.

Για κάθε $x \in (0, 10)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 10]$ και για κάθε $x \in (10, 20)$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [10, 20). \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο για } x = 10 \text{ και } y = 20 - 10 = 10.$$

Προβλήματα Γεωμετρίας

11. Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου με $xy = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$. Η περίμετρος του είναι: $2x + 2y = 2x + \frac{200}{x}$. Έστω $f(x) = 2x + \frac{200}{x}$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 100 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 10$. Για κάθε $x \in (0, 10)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 10]$ και για κάθε $x > 10$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [10, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο για $x = 10$ m και $y = \frac{100}{10} = 10$ m.

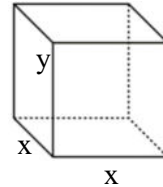
12. Έστω x dm η πλευρά της βάσης και y dm το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Είναι $V = x^2 y = 64 \Leftrightarrow y = \frac{64}{x^2}$.

Οι 4 παράπλευρες επιφάνειες είναι ορθογώνια με εμβαδό xy η κάθε μία, ενώ κάθε βάση του είναι τετράγωνο με εμβαδό x^2 , οπότε το εμβαδόν του

είναι $E(x) = 4xy + 2x^2 = 4x \cdot \frac{64}{x^2} + 2x^2 = \frac{256}{x} + 2x^2$, $x > 0$.

Είναι $E'(x) = -\frac{256}{x^2} + 4x = \frac{-256 + 4x^3}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι $E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow (0, 4]$ και για κάθε $x > 4$ είναι $E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow [4, +\infty)$.

Η E έχει μέγιστο για $x = 4$ cm και $y = \frac{64}{4^2} = 4$ cm.



13. Έστω x dm η πλευρά της βάσης και y dm το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Οι 4 παράπλευρες επιφάνειες είναι ορθογώνια με εμβαδό xy η κάθε μία, ενώ η βάση του είναι τετράγωνο με εμβαδό x^2 , οπότε το εμβαδόν του είναι $E = 4xy + x^2 = 48 \Leftrightarrow y = \frac{48 - x^2}{4x}$.

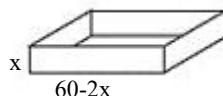
Είναι $y > 0 \Leftrightarrow \frac{48 - x^2}{4x} > 0 \Leftrightarrow 48 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 48 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 0 < x < 4\sqrt{3}$

$V(x) = x^2 y = x^2 \cdot \frac{48 - x^2}{4x} = 12x - \frac{1}{4}x^3$, $x \in (0, 4\sqrt{3})$.

Είναι $V'(x) = 12 - \frac{3}{4}x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$. Για $x \in (0, 4)$ είναι $V'(x) > 0 \Rightarrow V \nearrow (0, 4]$

και για $x \in (4, 4\sqrt{3})$ είναι $V'(x) < 0 \Rightarrow V \searrow [4, 4\sqrt{3})$. Η V έχει μέγιστο για $x = 4 \text{ dm}$ και $y = \frac{48-4^2}{4 \cdot 4} = 2 \text{ dm}$. Ο μέγιστος όγκος είναι $V(4) = 32 \text{ dm}^3$.

14. Εστω $x \text{ cm}$ είναι το μήκος της πλευράς των τετραγώνων που θα αποκοπούν, τότε ο όγκος $V(x)$ του δοχείου είναι $V(x) = x(60-2x)^2$ με $x > 0, 60-2x > 0 \Leftrightarrow x < 30$ άρα $x \in (0, 30)$.



Είναι $V'(x) = (60-2x)(60-6x)$ και

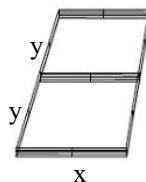
$$V'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (60-2x)(60-6x) \geq 0 \stackrel{x \in (0, 30)}{\Leftrightarrow} 60-6x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10.$$

Για $x \in (0, 10)$ είναι $V'(x) > 0 \Rightarrow V \nearrow (0, 10]$ και για $x \in (10, 30)$ είναι $V'(x) < 0 \Rightarrow V \searrow [10, 30)$. Η V γίνεται μέγιστη για $x = 10 \text{ cm}$, τότε οι διαστάσεις του είναι 40 cm , 40 cm και 10 cm .

15. Αν $x \text{ m}$ το πλάτος και $2y \text{ m}$ το μήκος του ορθογωνίου, τότε το ζητούμενο κόστος είναι $(2x+4y) \cdot 9+6x \text{ €}$. Είναι

$$x \cdot 2y = 1600 \Leftrightarrow y = \frac{800}{x}. \text{ Το κόστος είναι}$$

$$K(x) = \left(2x + 4 \frac{800}{x}\right) \cdot 9 + 6x = 24x + \frac{28800}{x}, x > 0.$$



$$\text{Είναι } K'(x) = 24 - \frac{28800}{x^2} = \frac{24x^2 - 28800}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 24x^2 \geq 28800 \Leftrightarrow$$

$x^2 \geq 1200 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x \geq 20\sqrt{3}$. Για $x \in (0, 20\sqrt{3})$ είναι $K'(x) < 0 \Rightarrow K \searrow (0, 20\sqrt{3})$ και για $x > 20\sqrt{3}$ είναι $K'(x) > 0 \Rightarrow K \nearrow [20\sqrt{3}, +\infty)$. Το κόστος γίνεται ελάχιστο

$$\text{για } x = 20\sqrt{3} \text{ m και } y = \frac{800}{20\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ m}.$$

16. Εστω R η ακτίνα του κύκλου και x η πλευρά του τετραγώνου, τότε

$$2\pi R + 4x = \lambda \Leftrightarrow R = \frac{\lambda - 4x}{2\pi} \text{ με } R > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 4x}{2\pi} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{\lambda}{4}.$$

Αν E_1 το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_2 το εμβαδόν του τετραγώνου τότε

$$E_1 = \pi R^2 = \pi \left(\frac{\lambda - 4x}{2\pi} \right)^2 = \pi \cdot \frac{(\lambda - 4x)^2}{4\pi^2} = \frac{(\lambda - 4x)^2}{4\pi} \text{ και } E_2 = x^2. \text{ Το άθροισμα}$$

των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι $E(x) = E_1 + E_2 = \frac{(\lambda - 4x)^2}{4\pi} + x^2$,

$$x \in \left(0, \frac{\lambda}{4}\right) \cdot E'(x) = \frac{2(\lambda - 4x)(-4)}{4\pi} + 2x = \frac{2x(\pi + 4) - 2\lambda}{\pi}$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(\pi + 4) - 2\lambda}{4\pi} \geq 0 \Leftrightarrow 2x(\pi + 4) - 2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\lambda}{\pi + 4}.$$

Όταν $0 < x < \frac{\lambda}{\pi + 4}$ είναι $E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow \left(0, \frac{\lambda}{\pi + 4}\right]$ και όταν $x \in \left(\frac{\lambda}{\pi + 4}, \frac{\lambda}{4}\right)$

τότε $E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow \left[\frac{\lambda}{\pi + 4}, \frac{\lambda}{4}\right)$. Η E παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{\lambda}{4 + \pi}$.

$$\text{Τότε } R = \frac{\lambda - 4 \frac{\lambda}{\pi + 4}}{2\pi} = \frac{\pi\lambda + 4\lambda - 4\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2(\pi + 4)} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow 2R = x.$$

Αυξημένης δυσκολίας

17. Έστω ότι $(EZ) = (\Gamma\Delta) = 2x$ και OK το απόστημα της χορδής $\Gamma\Delta$. Τότε

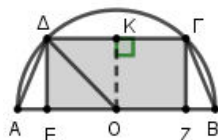
$K\Delta = K\Gamma$, οπότε και $EO = OZ$, άρα $EO = OZ = x$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEO έχουμε:

$$\Delta E^2 = O\Delta^2 - OE^2 = \rho^2 - x^2 \Leftrightarrow \Delta E = \sqrt{\rho^2 - x^2}$$

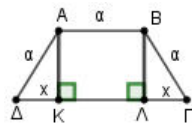
Είναι $E(x) = (\Gamma\Delta EZ) = 2x\sqrt{\rho^2 - x^2}$, $x \in (0, \rho)$.

$$E'(x) = \frac{\rho^2 - 2x^2}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{\rho^2}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{\rho\sqrt{2}}{2}.$$



Η E είναι $\nearrow$ στο $\left(0, \frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right]$ και $\searrow$ στο $\left[\frac{\rho\sqrt{2}}{2}, \rho\right)$. Έχει μέγιστο για $x = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}$,

τότε $(DE) = \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\rho\sqrt{2}}{2}$. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι: $\frac{\rho\sqrt{2}}{2}$, $\rho\sqrt{2}$.



18. Έστω AK , BL ύψη του τραπεζίου και έστω

$$\Delta K = \Gamma\Lambda = x. \text{ Είναι } AK^2 = \alpha^2 - x^2 \Leftrightarrow AK = \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$

Είναι $(AB\Gamma\Delta) = E(x) = \frac{(\alpha + \alpha + 2x)\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{2} = (x + \alpha)\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $x > 0$

$$E'(x) = \frac{\alpha^2 - 2x^2 - \alpha x}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + \alpha x - \alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2(x + \alpha) \left(x - \frac{\alpha}{2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{\alpha}{2}$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\alpha}{2}\right)$ είναι $E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow \left(0, \frac{\alpha}{2}\right)$ και για κάθε $x > \frac{\alpha}{2}$ είναι

$E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow \left[\frac{\alpha}{2}, +\infty\right)$. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο για $x = \frac{\alpha}{2}$.

$$\text{Τότε } \Gamma\Delta = 2\alpha \text{ και } AK = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

19.α) Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma = 10$, $A\Gamma = x$.

$$\text{Τότε } AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{100 - x^2}$$

$$(AB\Gamma) = E(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}, \quad x \in (0, 10). \text{ Είναι}$$

$$E'(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{100 - x^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{100 - x^2}} \right) = \frac{100 - 2x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$x^2 \leq 50 \Leftrightarrow x \leq 5\sqrt{2}$. Για κάθε $x < 5\sqrt{2}$ είναι $E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow (0, 5\sqrt{2}]$ και για κάθε $x \in (5\sqrt{2}, 10)$ είναι $E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow [5\sqrt{2}, 10)$. Το εμβαδό γίνεται μέγιστο όταν $A\Gamma = 5\sqrt{2}$, και $AB = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$.

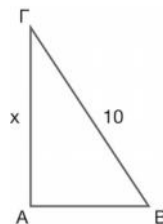
β) Έστω $P(x) = x + \sqrt{100 - x^2} + 10$, $x \in (0, 10)$ η περιμέτρος του τριγώνου. Είναι

$$P'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{\sqrt{100 - x^2} - x}{\sqrt{100 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} \geq x \Leftrightarrow 100 - x^2 \geq x^2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 \leq 100 \Leftrightarrow x^2 \leq 50 \Leftrightarrow 0 < x \leq 5\sqrt{2}. \text{ Για κάθε } x \in (0, 5\sqrt{2}) \text{ είναι}$$

$$P'(x) > 0 \Rightarrow P \nearrow (0, 5\sqrt{2}] \text{ και για κάθε } x \in (5\sqrt{2}, 10) \text{ είναι } P'(x) < 0 \Rightarrow$$

$$P \searrow [5\sqrt{2}, 10). \text{ Μέγιστο για } A\Gamma = x = 5\sqrt{2}, \text{ τότε } AB = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}.$$

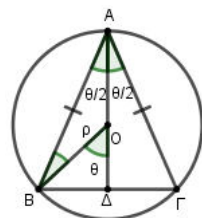


20. Έστω ότι $AB = A\Gamma$, $A = \theta$ και $A\Delta$ το ύψος του τριγώνου. Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές, το Δ είναι μέσο της $B\Gamma$. Το τρίγωνο OAB έχει $OA = OB = \rho$, οπότε είναι

ισοσκελές, άρα $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{\theta}{2}$. Η γωνία $\widehat{BOD}$ είναι

εξωτερική στο τρίγωνο AOB , οπότε

$\widehat{BOD} = \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = \theta$. Στο τρίγωνο $BO\Delta$ είναι



$$\sin\theta = \frac{O\Delta}{OB} = \frac{O\Delta}{\rho} \Leftrightarrow O\Delta = \rho \sin\theta \text{ και } \eta\mu\theta = \frac{B\Delta}{OB} = \frac{B\Delta}{\rho} \Leftrightarrow B\Delta = \rho \eta\mu\theta.$$

$$\text{Τότε } A\Delta = OA + O\Delta = \rho + \rho \sin\theta = \rho(1 + \sin\theta) \text{ και } B\Gamma = 2B\Delta = 2\rho \eta\mu\theta$$

Για το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$, ισχύει:

$$E = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} 2\rho \eta\mu\theta \cdot \rho(1 + \sin\theta) = \rho^2 \eta\mu\theta(1 + \sin\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Έστω } E(\theta) = \rho^2 \eta\mu\theta(\sin\theta + 1), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Τότε, } E'(\theta) = \rho^2 (2\sin^2\theta + \sin\theta - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = -1 \text{ ή } \sin\theta = \frac{1}{2}. \text{ Τότε}$$

$$E'(\theta) = 2\rho^2 (\sin\theta + 1) \left(\sin\theta - \frac{1}{2} \right). \text{Είναι } E'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$2\rho^2 (\sin\theta + 1) \left(\sin\theta - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sin\theta - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sin\theta \geq \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{3}$, τότε:

$$AB = A\Gamma = 2\rho \sin\frac{\pi}{6} = 2\rho \frac{\sqrt{3}}{2} = \rho\sqrt{3} \text{ και τότε το}$$

τρίγωνο είναι ισόπλευρο, οπότε και $B\Gamma = \rho\sqrt{3}$.

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$
E'		+	-
E		↗	↘

Προβλήματα καμπυλών

21. Έστω $M(x, y)$ με $y = 2x - 5$, δηλαδή $M(x, 2x - 5)$. Είναι

$$(OM) = \sqrt{x^2 + (2x - 5)^2} = \sqrt{5x^2 - 20x + 25}. \text{ Έστω } d(x) = \sqrt{5x^2 - 20x + 25}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } d'(x) = \frac{10x - 20}{2\sqrt{5x^2 - 20x + 25}} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2. \text{ Για κάθε } x < 2 \text{ είναι}$$

$$d'(x) < 0 \Rightarrow d \searrow (-\infty, 2] \text{ και για κάθε } x > 2 \text{ είναι } d'(x) > 0 \Rightarrow d \nearrow [2, +\infty).$$

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για $x = 2$, τότε $M(2, -1)$.

22. Έστω $M(x, y) \equiv (x, e^x + 1)$ σημείο της C_f . Είναι

$$(AM) = \sqrt{(x-1)^2 + (e^x + 1 - 1)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + e^{2x}}. \text{ Έστω}$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + e^{2x}}, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g'(x) = \frac{x - 1 + e^{2x}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1 + e^{2x}}}. \text{ Για κάθε}$$

$$x > 0 \text{ είναι } 2x > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0, \text{ άρα } x + e^{2x} - 1 > 0 \Rightarrow$$

$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι $x + e^{2x} - 1 < 0 \Rightarrow$
 $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$. Η g έχει ελάχιστο για $x = 0$, τότε $M(0, 2)$.

23. Η κατακόρυφη απόσταση των C_f, C_g είναι

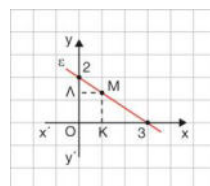
$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5 - (x^3 - 3x^2 + 9x - 15) = x^2 - 8x + 20$,
 $x \in \mathbb{R}$. Είναι $h'(x) = 2x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. Η h είναι $\searrow$ στο $(-\infty, 4]$ και $\nearrow$ στο
 $[4, +\infty)$. Έχει ελάχιστο το $h(4) = 4$.

24. $E(x) = (\text{ΟΚΑΜ}) = xy = x \frac{6-2x}{3} = \frac{6x-2x^2}{3}$, $x \in (0, 3)$.

$E'(x) = \frac{6-4x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$. Η E είναι $\nearrow$ στο $\left(0, \frac{3}{2}\right]$ και

$\searrow \left[\frac{3}{2}, 3\right)$, έχει μέγιστο για $x = \frac{3}{2}$. Τότε

$2\frac{3}{2} + 3y = 6 \Leftrightarrow y = 1$ και $M\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.



25. Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Επειδή η ϵ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες, θα σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον x' , άρα $\lambda < 0$. Τότε

$\epsilon: y - 4 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow y = \lambda x - 2\lambda + 4$.

Για $x = 0$ είναι $B(0, -2\lambda + 4)$ και για $y = 0$ είναι

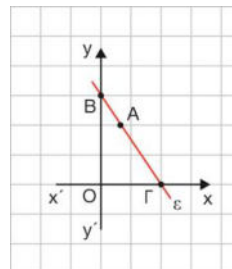
$\Gamma\left(\frac{2\lambda - 4}{\lambda}, 0\right)$. $E(\lambda) = \frac{1}{2}(\text{OB})(\text{OG}) = -\frac{(4 - 2\lambda)^2}{2\lambda}$, $\lambda < 0$.

Είναι $E'(\lambda) = \frac{(4 - 2\lambda)(4 + 2\lambda)}{2\lambda^2} \stackrel{\lambda < 0}{\geq} 0 \Leftrightarrow 4 + 2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$\lambda \geq -2$. Για κάθε $\lambda \in (-2, 0)$ είναι $E'(\lambda) > 0 \Rightarrow E \nearrow [-2, 0)$ και για κάθε $\lambda < -2$

είναι $E'(\lambda) < 0 \Rightarrow E \searrow (-\infty, -2]$. Το εμβαδόν του ΟΒΓ γίνεται ελάχιστο για

$\lambda = -2$, τότε $\epsilon: y = -2x + 8$



26. $x'(t) = \frac{3 - 6t^3}{(1 + t^3)^2} \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Είναι $x \nearrow \left[0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ και $\searrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$. Έχει

μέγιστο το $x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{\frac{3}{\sqrt[3]{2}}}{1+\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{4}$, άρα $x(t) \leq \sqrt[3]{4}$ και όμοια $y(t) \leq \sqrt[3]{4}$.

27. Έστω I και Φ οι θέσεις των δύο πλοίων μετά από t ώρες, τότε $OI = 20 - 40t$ και $O\Phi = 20t$. Η μεταξύ τους απόσταση είναι:

$$d(t) = \sqrt{OI^2 + O\Phi^2} = \sqrt{(20 - 40t)^2 + 400t^2} \Leftrightarrow$$

$$d(t) = \sqrt{2000t^2 - 1600t + 400}, t \geq 0.$$

$$\text{Είναι } d'(t) = \frac{4000t - 1600}{2\sqrt{2000t^2 - 1600t + 400}} \text{ και}$$

$$d'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 4000t - 1600 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{2}{5}.$$

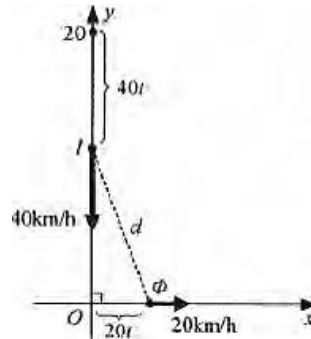
Για $t \in \left(0, \frac{2}{5}\right)$ είναι $d'(t) < 0 \Rightarrow d \searrow \left[0, \frac{2}{5}\right]$ και για

$t > \frac{2}{5}$ είναι $d'(t) > 0 \Rightarrow d \nearrow \left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$. Η απόσταση d των δύο πλοίων γίνεται

ελάχιστη τη χρονική στιγμή $t = \frac{2}{5}h$, τότε η απόστασή τους είναι

$$d\left(\frac{2}{5}\right) = \sqrt{\left(20 - 40 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 + 400\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{80} < 10, \text{ οπότε θα έχουν οι άνθρωποι των}$$

δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή.



Αυξημένης δυσκολίας

28.α) Έστω $M(\xi, f(\xi))$ τότε η απόσταση του O από την C_f δίνεται από την

συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ η οποία είναι παραγωγίσμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = \frac{x + f(x)f'(x)}{\sqrt{x^2 + f^2(x)}}. \text{ Επειδή η } g \text{ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε εσωτερικό}$$

σημείο ξ τότε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi + f(\xi)f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi)f'(\xi) = -\xi$.

Η (OM) έχει κλίση $\lambda_{OM} = \frac{f(\xi)}{\xi}$ και η ε έχει κλίση $\lambda_\varepsilon = f'(\xi)$

$$\text{Άρα } \lambda_{OM}\lambda_\varepsilon = \frac{f(\xi)f'(\xi)}{\xi} = \frac{-\xi}{\xi} = -1 \Leftrightarrow OM \perp \varepsilon.$$

β) Είναι $M(1,1)$ άρα $\lambda_{OM} = 1$ επομένως $\lambda_e = -1 \Leftrightarrow f'(1) = -1$.

Έστω σημείο $A(x_0, y_0)$ τότε η απόσταση του A από την C_f δίνεται από την συνάρτηση $h(x) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-y_0)^2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R} \text{ με } h'(x) = \frac{x-x_0 + (f(x)-y_0)f'(x)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (f(x)-y_0)^2}}.$$

Επειδή η h παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 είναι $h'(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1-x_0 + (f(1)-y_0)f'(1)}{\sqrt{(1-x_0)^2 + (f(1)-y_0)^2}} = 0 \Leftrightarrow 1-x_0 + (f(1)-y_0)f'(1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1-x_0 - (1-y_0) = 0 \Leftrightarrow 1-x_0 - 1 + y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = y_0.$$

Άρα $A(x_0, x_0)$ και ο γεωμετρικός τόπος του είναι η $y = x$.

$$\mathbf{29.α)} \text{ Είναι } (AM) = \sqrt{x^2 + \alpha^2} \text{ και } (MB) = \sqrt{(x-2)^2 + \beta^2}$$

$$\text{Είναι } \text{συνω} = \frac{(OM)}{(AM)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \text{ και } \text{συνφ} = \frac{(MB')}{(MB)} = \frac{2-x}{\sqrt{(x-2)^2 + \beta^2}} \text{ όπου } B'$$

είναι η προβολή του B στον άξονα $x'x$ δηλαδή $B(2,0)$.

$$\text{Άρα το συνολικό μήκος είναι } d(x) = \sqrt{x^2 + \alpha^2} + \sqrt{(x-2)^2 + \beta^2}, \quad x > 0$$

Η d είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$$d'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} + \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2 + \beta^2}} \text{ και έχει ελάχιστο στο } \kappa > 0 \text{ άρα από το}$$

$$\text{θεώρημα Fermat είναι: } d'(\kappa) = 0 \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \alpha^2}} = -\frac{\kappa-2}{\sqrt{(\kappa-2)^2 + \beta^2}} \Leftrightarrow$$

$$\text{συνω} = \text{συνφ} \Leftrightarrow \omega = \varphi$$

β) Έστω $M(\kappa, 0)$. Η BM έχει κλίση ίση με $\varepsilon\varphi$ ενώ η AM έχει κλίση ίση με $\varepsilon\varphi(180-\omega) = -\varepsilon\varphi = -\varepsilon\varphi$ άρα έχουν αντίθετες κλίσεις.

Έστω $\lambda = \varepsilon\varphi > 0$ τότε $(BM): y-0 = \lambda(x-\kappa) \Leftrightarrow y = \lambda(x-\kappa)$ και $(AM):$

$$y-0 = -\lambda(x-\kappa) \Leftrightarrow y = -\lambda(x-\kappa). \text{ Άρα παριστάνουν την συνάρτηση}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\lambda(x-\kappa), & x < \kappa \\ \lambda(x-\kappa), & x \geq \kappa \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \lambda|x-\kappa|, \quad x \in \mathbb{R}$$

Σύνθετες ασκήσεις

30.α) Είναι $E = \frac{1}{2}x \cdot (ΑΓ) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x \cdot (ΑΓ) = 3 \Leftrightarrow (ΑΓ) = \frac{6}{x}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $BΓ^2 = AB^2 + ΑΓ^2 = x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 \Leftrightarrow$

$BΓ = \sqrt{x^2 + \frac{36}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^4 + 36}{x^2}} \Leftrightarrow BΓ = \frac{\sqrt{x^4 + 36}}{x}$. Η περίμετρος είναι:

$P(x) = AB + ΑΓ + BΓ = x + \frac{6}{x} + \frac{\sqrt{x^4 + 36}}{x} = x + \frac{6 + \sqrt{x^4 + 36}}{x}, x > 0$

β) Η συνάρτηση P είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$P'(x) = 1 + \frac{\frac{d}{dx} \left(\frac{6 + \sqrt{x^4 + 36}}{x} \right) \cdot x - \left(6 + \sqrt{x^4 + 36} \right)}{x^2} = \frac{x^2 + \frac{2x^4}{\sqrt{x^4 + 36}} - 6 - \sqrt{x^4 + 36}}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$P'(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^4 + 36} + 2x^4 - 6\sqrt{x^4 + 36} - (\sqrt{x^4 + 36})^2}{x^2 \sqrt{x^4 + 36}} \Leftrightarrow$$

$$P'(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^4 + 36} + 2x^4 - 6\sqrt{x^4 + 36} - x^4 - 36}{x^2 \sqrt{x^4 + 36}} \Leftrightarrow$$

$$P'(x) = \frac{x^2 \sqrt{x^4 + 36} + x^4 - 6\sqrt{x^4 + 36} - 36}{x^2 \sqrt{x^4 + 36}} \Leftrightarrow$$

$$P'(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 36}(x^2 - 6) + (x^2 - 6)(x^2 + 6)}{x^2 \sqrt{x^4 + 36}} = \frac{(x^2 - 6)(\sqrt{x^4 + 36} + x^2 + 6)}{x^2 \sqrt{x^4 + 36}}$$

$$P'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 6)(\sqrt{x^4 + 36} + x^2 + 6)}{x^2 \sqrt{x^4 + 36}} \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{6}.$$

Για κάθε $x \in (0, \sqrt{6})$ είναι $P'(x) < 0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $(0, \sqrt{6}]$,

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (\sqrt{6}, +\infty)$ είναι

$P'(x) > 0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $[\sqrt{6}, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα

στο διάστημα αυτό. Η περίμετρος P γίνεται ελάχιστη για $x = \sqrt{6}\text{cm}$. Τότε

$ΑΓ = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\text{cm}$ και $BΓ = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}\text{cm}$.

γ) i. Είναι $x'(t) = 0,5 \Leftrightarrow x(t) = 0,5t + c, c \in \mathbb{R}$.

Την χρονική στιγμή $t=0$ είναι $x(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$, οπότε $x(t) = 0,5t + 1, t \geq 0$.

Την χρονική στιγμή t_0 που $AB=3\text{cm}$, ισχύει ότι

$$x(t_0) = 3 \Leftrightarrow 0,5t_0 + 1 = 3 \Leftrightarrow 0,5t_0 = 2 \Leftrightarrow t_0 = 4, \text{ άρα } t_0 = 4 \text{ sec}.$$

$$\text{Είναι } \varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t) = \frac{\frac{6}{x(t)}}{x(t)} = \frac{6}{x^2(t)} \text{ και}$$

$$(\varepsilon\varphi\theta(t))' = \left(\frac{6}{x^2(t)} \right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\theta(t)} \theta'(t) = -\frac{12}{x^3(t)} x'(t) \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t) = -\frac{12}{x^3(t)} x'(t) \sin^2\theta(t). \text{ Είναι } \theta'(4) = -\frac{12}{x^3(4)} x'(4) \sin^2\theta(4).$$

$$\text{Την χρονική στιγμή } t=4 \text{ είναι } B\Gamma = \frac{\sqrt{x^4(4)+36}}{x(4)} = \frac{\sqrt{3^4+36}}{3} = \frac{\sqrt{117}}{3} \text{ και}$$

$$\sin\theta(4) = \frac{x(4)}{B\Gamma(4)} = \frac{3}{\frac{\sqrt{117}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{117}}, \text{ άρα}$$

$$\theta'(4) = -\frac{12}{3^3} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{9}{\sqrt{117}} \right)^2 = -\frac{2}{13} \text{ rad/sec}$$

ii. Είναι $A\Gamma(t) = \frac{6}{x(t)}$ και $A\Gamma'(t) = -\frac{6}{x^2(t)} x'(t)$, οπότε

$$A\Gamma'(4) = -\frac{6}{x^2(4)} x'(4) = -\frac{6}{9} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \text{ cm/sec}.$$

Επειδή $A\Gamma'(4) < 0$, η πλευρά $A\Gamma$ ελαττώνεται με ρυθμό $1/3 \text{ cm/sec}$.

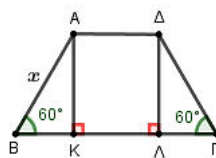
31.α) Κατασκευάζουμε τα ύψη AK και $\Delta\Lambda$ του

τραπεζίου. Είναι $\sin 60^\circ = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow BK = \frac{x}{2}$.

Όμοια και $\Gamma\Lambda = \frac{x}{2}$. Επειδή η περίμετρος του τραπεζίου είναι 20cm , ισχύει ότι

$$A\Delta + AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 20 \Leftrightarrow A\Delta + x + \left(\frac{x}{2} + A\Delta + \frac{x}{2} \right) + x = 20 \Leftrightarrow$$

$$2A\Delta + 3x = 20 \Leftrightarrow 2A\Delta = 20 - 3x \Leftrightarrow A\Delta = \frac{20 - 3x}{2} \text{ cm}$$



β) Είναι $\eta\mu 60^\circ = \frac{AK}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AK}{x} \Leftrightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2} x \text{ cm}$. Το εμβαδόν του τραπέζιου είναι:

$$E(x) = \frac{(BG + AD)AK}{2} = \frac{\left(AD + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + AD\right) \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = \frac{\left(2 \frac{20-3x}{2} + x\right) \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} \Leftrightarrow$$

$$E(x) = \frac{(20-2x) \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = \frac{2(10-x) \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (10x - x^2)$$

γ) 1ος τρόπος

Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 6)$ με $E'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} (10 - 2x)$.

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} (10 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 10 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$$

Για κάθε $x \in (0, 5)$ είναι $E'(x) > 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $(0, 5]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (5, 6)$ είναι $E'(x) < 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $[5, 6)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η E παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5 \text{ cm}$. Επειδή στις 12 το μεσημέρι η AD είχε αρχικό μήκος 1 cm , και μέγιστο εμβαδό έχει το τραπέζιο όταν $x = 5$, μετέβαλε το μήκος της κατά 4 cm . Επειδή κάθε ώρα αυξάνει το μήκος της κατά $0,4 \text{ cm}$, θα χρειαστεί $t = \frac{4}{0,4} = \frac{4}{\frac{4}{10}} = 10$ ώρες για αυτή τη μεταβολή, οπότε στις

10 το βράδυ της ίδιας ημέρας το τραπέζιο θα έχει το μέγιστο εμβαδό.

2ος τρόπος: Επειδή το αυξάνεται με ρυθμό $0,4 \text{ cm/h}$, είναι

$$x'(t) = 0,4 \Leftrightarrow x(t) = 0,4t + c, c \in \mathbb{R}$$

Είναι $x(12) = 1 \Leftrightarrow 1 = 4,8 + c \Leftrightarrow c = -3,8$, οπότε $x(t) = 0,4t - 3,8$.

Επειδή $x(t) \in (0, 6)$ είναι $0 < 0,4t - 3,8 < 6 \Leftrightarrow 9,5 < t < 24,5$. Όμως η AD αρχίζει να αυξάνει στις 12 το μεσημέρι, οπότε $t \in [12, 24,5)$ Τότε

$$E(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} x(t)(10 - x(t)) = \frac{\sqrt{3}}{2} (0,4t - 3,8)(10 - 0,4t + 3,8) \Leftrightarrow$$

$$E(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} (0,4t - 3,8)(13,8 - 0,4t), t \in [12, 24,5). \text{ Είναι}$$

$$E'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} [0,4(13,8 - 0,4t) - 0,4(0,4t - 3,8)] \Leftrightarrow$$

$$E'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,4(13,8 - 0,4t - 0,4t + 3,8) = 0,2 \cdot \sqrt{3}(17,6 - 0,8t)$$

$$\text{Είναι } E'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 17,6 - 0,8t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 22.$$

Όταν $t \in (12, 22)$ είναι $E'(t) > 0 \Rightarrow E \nearrow [12, 22]$ και για $t \in (22, 24,5)$ είναι $E'(t) < 0 \Rightarrow E \searrow [22, 24,5)$. Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t = 22$, δηλαδή στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας.

δ) Αρκεί να υπάρχει μοναδικό $t_0 \in [12, 24,5)$ τέτοιο ώστε $E(t_0) = 8$.

$$\text{Είναι } E(12) = \frac{9\sqrt{3}}{2}, E(22) = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ και } \lim_{t \rightarrow 24,5} E(t) = 12\sqrt{3}.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = [12, 22]$ η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει

$$\text{αντίστοιχο σύνολο τιμών το } E(\Delta_1) = \left[\frac{9\sqrt{3}}{2}, \frac{25\sqrt{3}}{2} \right].$$

Στο διάστημα $\Delta_2 = (22, 24,5)$ η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$\text{έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το } E(\Delta_2) = \left(12\sqrt{3}, \frac{25\sqrt{3}}{2} \right).$$

Τώρα θα εξετάσουμε το 8 σε ποιο από τα $E(\Delta_1)$, $E(\Delta_2)$ ανήκει.

Για να ανήκει στο $E(\Delta_1)$ πρέπει

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} \leq 8 \leq \frac{25\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{81 \cdot 3}{4} \leq 64 \leq \frac{625 \cdot 3}{4} \Leftrightarrow 243 \leq 256 \leq 1875 \text{ ισχύει.}$$

$$\text{Για να ανήκει στο } E(\Delta_2) \text{ πρέπει } 12\sqrt{3} \leq 8 \leq \frac{25\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 144 \cdot 3 \leq 64 \leq \frac{635 \cdot 3}{4}$$

αδύνατο. Επειδή το 8 περιέχεται στο $E(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t_0 \in (12, 22)$ τέτοιο ώστε $E(t_0) = 8$.

32.α) Έστω $M(x(t), y(t))$. Έστω επίσης K η προβολή του M στον άξονα x' και θ η γωνία MOK .

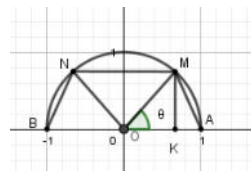
$$\text{Στο τρίγωνο MOK είναι } \eta\mu\theta = \frac{MK}{OM} \Leftrightarrow \eta\mu\theta(t) = y(t)$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OK}{OM} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta(t) = x(t).$$

Επειδή η τετμημένη του M ελαττώνεται με ρυθμό $0,1 \text{ cm/sec}$, είναι

$$x'(t) = -0,1 \text{ cm/sec}. \text{ Όμως } x'(t) = (\sigma\upsilon\nu\theta(t))' = -\eta\mu\theta(t) \cdot \theta'(t)$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το τρίγωνο OMA γίνεται ισόπλευρο, τότε



$$\theta(t_0) = 60^\circ, \text{ οπότε } x'(t_0) = -\eta\mu 60^\circ \cdot \theta'(t_0) \Leftrightarrow -\frac{1}{10} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \theta'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{15} \text{ rad/sec}. \text{ Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι το}$$

$$y'(t) = (\eta\mu\theta(t))' = \sigma\upsilon\nu\theta(t) \cdot \theta'(t) \text{ και τη χρονική στιγμή } t_0 :$$

$$y'(t_0) = \sigma\upsilon\nu\theta(t_0) \cdot \theta'(t_0) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{30} \text{ cm/sec}$$

2ος τρόπος

Το M κινείται στο ημικύκλιο του κύκλου με εξίσωση : $x^2 + y^2 = 1$ οπότε

$$x^2(t) + y^2(t) = 1. \text{ Με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε :}$$

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0. \text{ Την χρονική στιγμή } t = t_0 \text{ έχουμε :}$$

$$y(t_0) = \text{ύψος ισοπλεύρου} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και}$$

$$x^2(t_0) + y^2(t_0) = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x(t_0) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Επίσης } 2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot (-0,1) + \frac{\sqrt{3}}{2} y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} y'(t_0) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow y'(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{30} \text{ cm/sec}.$$

β) Το τρίγωνο OMA έχει εμβαδόν

$$E = \frac{1}{2}(\text{OA})(\text{MK}) \Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot y(t) = \frac{1}{2} \eta\mu\theta(t) \text{ Είναι } E'(t) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu\theta(t) \cdot \theta'(t)$$

$$\text{και τη χρονική στιγμή } t_0 : E'(t_0) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu 60^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{15} = \frac{\sqrt{3}}{60} \text{ cm}^2/\text{sec}$$

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου OMA σε συνάρτηση της γωνίας θ είναι

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \eta\mu\theta, \theta \in (0, \pi). \text{ Είναι } E'(\theta) = \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu\theta.$$

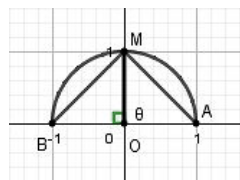
Αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu\theta > 0 \Rightarrow E'(\theta) > 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Αν $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ τότε $\sigma\upsilon\nu\theta < 0 \Rightarrow E'(\theta) < 0$ και επειδή

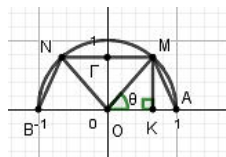
η E είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα

στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο



για $\theta = \frac{\pi}{2}$, δηλαδή όταν το Μ έχει συντεταγμένες (0,1).

δ) Επειδή το Ν είναι το συμμετρικό του Μ ως προς τον άξονα $y'y$ έχει συντεταγμένες $N(-x(t), y(t))$, $x(t) > 0$.



Το τρίγωνο ΜΟΝ έχει εμβαδόν $E_1 = \frac{1}{2}(MN)(O\Gamma) \Rightarrow$

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \cdot 2x(t)y(t) = \eta\mu\theta(t)\sigma\upsilon\nu\theta(t).$$

$$\text{Είναι } E_1'(t) = \sigma\upsilon\nu\theta(t) \cdot \theta'(t)\sigma\upsilon\nu\theta(t) + \eta\mu\theta(t)(-\eta\mu\theta(t))\theta'(t) \Leftrightarrow$$

$$E_1'(t) = (\sigma\upsilon\nu^2\theta(t) - \eta\mu^2\theta(t))\theta'(t). \text{ Όταν το τρίγωνο ΜΟΝ είναι ισόπλευρο τότε}$$

$$MON = 60^\circ. \text{ Όμως } NOB = MOK = \theta, \text{ άρα } 2\theta(t_0) + 60^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \theta(t_0) = 60^\circ.$$

$$\text{Επομένως } E_1'(t_0) = (\sigma\upsilon\nu^2 60^\circ - \eta\mu^2 60^\circ) \cdot \frac{\sqrt{3}}{15} = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{3}}{15} = -\frac{\sqrt{3}}{30} \text{ cm}^2 / \text{sec}$$

Όμοια αν $x(t) < 0$.

$$\epsilon) \text{ Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΝΒ είναι } E_2 = \frac{((AB) + (MN))O\Gamma}{2}$$

$$\text{Το } E_2 \text{ σε συνάρτηση του } \theta \text{ είναι } E_2(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta, \theta \in (0, \pi)$$

$$\text{Είναι } E_2'(\theta) = -\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta + (1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = -\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$$

$$E_2'(\theta) = -1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 \Leftrightarrow$$

$$E_2'(\theta) = 2(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$E_2'(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}. \text{ Για κάθε } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ είναι } E_2'(\theta) > 0 \Rightarrow E_2 \nearrow \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \text{ για}$$

$$\text{κάθε } \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right) \text{ είναι } E_2'(\theta) < 0 \Rightarrow E_2 \searrow \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right).$$

$$\text{Το εμβαδόν } E_2 \text{ έχει μέγιστο το } E_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\right)\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Τότε } M\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}, \eta\mu\frac{\pi}{3}\right) \equiv M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ και } N\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}, \eta\mu\frac{\pi}{3}\right) \equiv N\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

33.α) Έστω ΟΛ κάθετη στην ΓΔ. Τότε επειδή το ΟΛ είναι απόστημα της χορδής ΓΔ, το Λ είναι το μέσο της, άρα $\Lambda\Delta = \Lambda\Gamma = x$ cm.

Τότε το τετράπλευρο $\Lambda\Delta\text{ΚΟ}$ είναι ορθογώνιο και $\Lambda\Delta=\text{ΟΚ}=x$ cm.

Επειδή $\Gamma\Delta < \text{ΑΒ}$, είναι $0 < 2x < 10 \Leftrightarrow 0 < x < 5$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\text{ΚΟ}$ έχουμε:

$$\Delta\text{Κ}^2 = \Delta\text{Ο}^2 - \text{ΟΚ}^2 = 25 - x^2 \Leftrightarrow \Delta\text{Κ} = \sqrt{25 - x^2}$$

β) Είναι

$$E(x) = \frac{(\text{ΑΒ} + \Gamma\Delta)\Delta\text{Κ}}{2} = \frac{(10 + 2x)\sqrt{25 - x^2}}{2} = \frac{2(5 + x)\sqrt{25 - x^2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$E(x) = (5 + x)\sqrt{25 - x^2}, \quad x \in (0, 5)$$

γ) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ έχουμε:

$$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΚ}^2 + \text{ΚΔ}^2 = (5 - x)^2 + (\sqrt{25 - x^2})^2 = 25 - 10x + x^2 + 25 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\text{ΑΔ}^2 = 50 - 10x \Leftrightarrow \text{ΑΔ} = \sqrt{50 - 10x}.$$

$$\text{Είναι } P = \text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} + \Gamma\Delta + \text{ΑΔ} = 10 + 2\sqrt{50 - 10x} + 2x, \quad x \in (0, 5)$$

δ) Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 5)$ με

$$E'(x) = \sqrt{25 - x^2} + (5 + x) \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - x^2 - 5x - x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{2x^2 + 5x - 25}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{2x^2 + 5x - 25}{\sqrt{25 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 25 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$2\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x + 5\right) \leq 0 \stackrel{x \in (0, 5)}{\Leftrightarrow} x - \frac{5}{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}. \text{ Για κάθε } x \in \left(0, \frac{5}{2}\right) \text{ είναι}$$

$$E'(x) > 0 \text{ και επειδή η } E \text{ είναι συνεχής στο } \left(0, \frac{5}{2}\right) \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(\frac{5}{2}, 5\right)$ είναι $E'(x) < 0$ και επειδή η E είναι

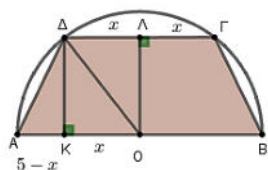
συνεχής στο $\left[\frac{5}{2}, 5\right)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν E

γίνεται μέγιστο για $x = \frac{5}{2}$ cm, τότε $\Gamma\Delta = 2x = 5$ cm, οπότε $\text{ΑΒ} = 2\Gamma\Delta$.

ε) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (5 + x)\sqrt{25 - x^2} = 25$ και

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} E(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (5 + x)\sqrt{25 - x^2} = 0, \quad E\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75\sqrt{3}}{4}.$$

Η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{5}{2}\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο



σύνολο τιμών το $E(\Delta_1) = \left(25, \frac{75\sqrt{3}}{4}\right)$. Η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

στο $\Delta_2 = \left(\frac{5}{2}, 5\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2) = \left(0, \frac{75\sqrt{3}}{4}\right)$.

$$30 < \frac{75\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 2 \cdot 15 < \frac{15 \cdot 5\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 8 < 5\sqrt{3} \Leftrightarrow 8^2 < (5\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 64 < 75 \text{ ισχύει.}$$

Το 30 ανήκει στο $E(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $E(x_1) = 30$. Το 30 ανήκει στο $E(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $E(x_2) = 30$. Τελικά υπάρχουν ακριβώς δύο τιμές του x για τις οποίες το εμβαδόν του τραπεζίου είναι ίσο με 30 cm^2 .

$$\sigma\tau) E(x) = P(x) \Leftrightarrow (5+x)\sqrt{25-x^2} = 10 + 2\sqrt{50-10x} + 2x \Leftrightarrow$$

$$(5+x)\sqrt{25-x^2} - 10 - 2\sqrt{50-10x} - 2x = 0. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση}$$

$$\varphi(x) = (5+x)\sqrt{25-x^2} - 10 - 2\sqrt{50-10x} - 2x, x \in [0, 5].$$

$$\text{Είναι } \varphi(0) = 15 - 10\sqrt{2} = 5(3 - 2\sqrt{2}) > 0, \varphi(5) = -20 < 0, \text{ δηλαδή } \varphi(0)\varphi(5) < 0$$

και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[0, 5]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow E(x) = P(x)$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 5)$.

$$34.a) f^2(x) = \ln^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |\ln x|.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |\ln x| = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Αν $x \in (0, 1)$, τότε $|f(x)| = -\ln x \Leftrightarrow f(x) = \pm \ln x$ και αν $x \in (1, +\infty)$, τότε

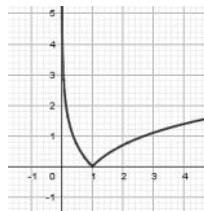
$$|f(x)| = \ln x \Leftrightarrow f(x) = \pm \ln x. \text{ Άρα } f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ -\ln x, & x > 1 \end{cases} = -\ln x, x > 0 \text{ ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases} = |\ln x|, x > 0 \text{ ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ -\ln x, & x > 1 \end{cases} = -|\ln x|, x > 0 \text{ ή } f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases} = \ln x, x > 0$$

β) Είναι $f(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases} = |\ln x|, x > 0$, οπότε η

γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της $y = -\ln x$ στο διάστημα $(0,1)$ και από το τμήμα της $y = \ln x$ στο διάστημα $(1,+\infty)$.



γ) Για $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0$ και για $x > 1$ είναι $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Αρκεί να βρούμε σημεία $\Gamma(x_1, f(x_1))$, $\Delta(x_2, f(x_2))$ με $f'(x_1)f'(x_2) = -1$.

Αν $x_1, x_2 \in (0,1)$ ή $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ τότε $f'(x_1)f'(x_2) > 0$, οπότε για να είναι $f'(x_1)f'(x_2) = -1$ πρέπει $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 > 1$. Τότε

$$f'(x_1)f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -1 \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{x_2}.$$

Αν $x_2 = 2$ τότε $x_1 = \frac{1}{2}$, οπότε δύο τέτοια σημεία είναι τα

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}, \ln 2\right), \Delta(2, \ln 2).$$

δ) Επειδή $AB \parallel x'x$ είναι $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow -\ln \alpha = \ln \beta \Leftrightarrow$

$$0 = \ln \alpha + \ln \beta \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Το μήκος του τμήματος AB είναι $d = x_B - x_A = \frac{1}{\alpha} - \alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Είναι

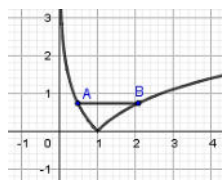
$$d(t) = \frac{1}{\alpha(t)} - \alpha(t), t \geq 0. \text{ Επειδή το τμήμα } AB \text{ αυξάνει το μήκος του με ρυθμό}$$

1 cm/sec , είναι $d'(t) = 1 \text{ cm/sec}$. Η απόσταση των σημείων A, B από τον άξονα $x'x$ είναι $y = \ln \alpha$. Αν t_0 η χρονική στιγμή που τα σημεία A, B απέχουν 1 cm από

$$\text{τον άξονα } x'x, \text{ τότε } -\ln \alpha(t_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha(t_0)} = e \Leftrightarrow \alpha(t_0) = \frac{1}{e}.$$

Είναι $d'(t) = \left(\frac{1}{\alpha(t)} - \alpha(t) \right)' = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)} - \alpha'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$d'(t_0) = -\frac{\alpha'(t_0)}{\alpha^2(t_0)} - \alpha'(t_0) \Leftrightarrow 1 = -\frac{\alpha'(t_0)}{\frac{1}{e^2}} - \alpha'(t_0) \Leftrightarrow 1 = -e^2 \alpha'(t_0) - \alpha'(t_0) \Leftrightarrow$$



$$-\alpha'(t_0)(e^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow \alpha'(t_0) = -\frac{1}{e^2 + 1}. \text{ Είναι } y(t) = -\ln \alpha(t), \quad y'(t) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$$

$$\text{και τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ είναι } y'(t_0) = -\frac{\alpha'(t_0)}{\alpha(t_0)} = -\frac{-\frac{1}{e^2 + 1}}{\frac{1}{e}} = \frac{e}{e^2 + 1} \text{ cm/sec}$$

ε) Επειδή $\alpha \in (0, 1)$ θα θεωρήσουμε την εφαπτομένη ε της C_f στο Α. Είναι

$$\varepsilon: y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y + \ln \alpha = -\frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{1}{\alpha}x + 1 - \ln \alpha. \text{ Για } y = 0 \text{ είναι } x = \alpha(1 - \ln \alpha) \text{ και για}$$

$x = 0$ είναι $y = 1 - \ln \alpha$, δηλαδή η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία $\Gamma(\alpha(1 - \ln \alpha), 0)$ και $\Delta(0, 1 - \ln \alpha)$. Το εμβαδόν E του τριγώνου $ΟΓ\Delta$ είναι

$$E = \frac{1}{2}(ΟΓ)(Ο\Delta) = \frac{1}{2}\alpha(1 - \ln \alpha)(1 - \ln \alpha) = \frac{1}{2}\alpha(1 - \ln \alpha)^2.$$

Έστω $E(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(1 - \ln \alpha)^2$, $\alpha \in (0, 1)$. Είναι

$$E'(\alpha) = \frac{1}{2}\left[(1 - \ln \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \ln \alpha)\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right] \Leftrightarrow E'(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \ln \alpha)(-1 - \ln \alpha)$$

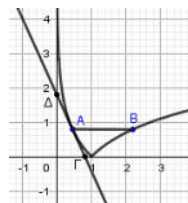
$$E'(\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - \ln \alpha)(-1 - \ln \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow -1 - \ln \alpha \geq 0 \Leftrightarrow \ln \alpha \leq -1 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{e}.$$

Για κάθε $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $E'(\alpha) > 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$,

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ είναι $E'(\alpha) < 0$

και επειδή η E είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

αυτό. Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο για $\alpha = \frac{1}{e}$, τότε $A\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.



35.α) Όταν το παιδί κινείται προς τα θετικά τότε η ταχύτητα είναι θετική και όταν το παιδί κινείται προς τα αρνητικά τότε η ταχύτητα είναι αρνητική. Οι πιθανές χρονικές στιγμές στις οποίες το παιδί αλλάζει φορά κίνησης είναι χρονικές στιγμές που μηδενίζεται η ταχύτητα. Άρα οι πιθανές χρονικές στιγμές στις οποίες το παιδί αλλάζει φορά κίνησης είναι οι ρίζες της f . Είναι :

$$f(t) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{t}\right)(\ln t - 1) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ sec}\right) \text{ ή}$$

$$(\ln t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = e \text{ sec})$$

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(t) = \frac{\ln t - 1}{t^2} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} = \frac{\ln t - 1 + t - 1}{t^2} = \frac{\ln t + t - 2}{t^2}, t > 0$$

Έχουμε επίσης ότι $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln t + t - 2 = 0$.

Έστω η συνάρτηση $g(t) = \ln t + t - 2, t > 0$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0 \text{ για κάθε } t > 0 \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

Επειδή η g συνεχής έχουμε $g((0, +\infty)) = \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Το $0 \in g((0, +\infty))$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$.

Επίσης για $0 < t < \xi \Leftrightarrow g(t) < g(\xi) = 0$ και για $t > \xi \Leftrightarrow g(t) > g(\xi) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ έχουμε ότι f γνησίως φθίνουσα στο $(0, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$, άρα η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $t = \xi$ το:

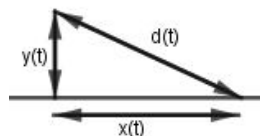
$$A(\xi, f(\xi)) \equiv A\left(\xi, \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)(\ln \xi - 1)\right).$$

Είναι $g(1) = -1 < 0$, $g(e) = e - 1 > 0$, δηλαδή $g(1)g(e) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, e)$. Όμως το ξ είναι η μοναδική ρίζα της g , άρα $\xi \in (1, e)$. Η μέγιστη ταχύτητα με την οποία κινείται προς τα αριστερά είναι το

ελάχιστο της δηλαδή η τιμή: $f(\xi) = \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)(\ln \xi - 1) \text{ m/sec}$ και προφανώς το $\xi \in (1, e)$.

γ) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Εφαρμόζοντας το ΘΜΤ στην f' στα $[1, t]$ και $[t, \xi]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, t)$ και $\xi_2 \in (t, \xi)$, $t \in (1, \xi)$, τέτοια ώστε:

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(t) - f'(1)}{t - 1} = \frac{f'(t) + 1}{t - 1} \text{ και}$$



$$f''(\xi_2) = \frac{f'(\xi) - f'(t)}{\xi - t} = -\frac{f'(t)}{\xi - t}. \text{ Έχουμε:}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f'' \searrow} f''(\xi_1) > f''(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f'(t)+1}{t-1} > -\frac{f'(t)}{\xi-t} \Leftrightarrow (\xi-t)(f'(t)+1) > -(t-1)f'(t)$$

δ) Επειδή το μπαλόνι ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα 1 m/sec τότε έχουμε ότι 1 sec αργότερα θα ισχύει $y(1) = 1$ m και αντίστοιχα για το παιδί που κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 m/sec έχουμε $x(1) = 2$ m. Με βάση το παραπάνω σχήμα έχουμε: $x^2(t) + (y(t) + h)^2 = d^2(t)$ (1)

$$1 \text{ sec αργότερα η (1) γίνεται: } x^2(1) + (y(1) + h)^2 = d^2(1) \Leftrightarrow$$

$$4 + h^2 + 2h + 1 = d^2(1) \Leftrightarrow d(1) = \sqrt{h^2 + 2h + 5} \quad (2). \text{ Παραγωγίζοντας την σχέση}$$

$$(1) \text{ έχουμε: } 2x'(t)x(t) + 2y'(t)(y(t) + h) = 2d'(t)d(t) \Leftrightarrow$$

$$x'(t)x(t) + y'(t)(y(t) + h) = d'(t)d(t) \Leftrightarrow 2x(t) + y(t) + h = d'(t)d(t) \quad (3).$$

$$1 \text{ sec αργότερα η (3) γίνεται: } 2x(1) + y(1) + h = d'(1)d(1) \Leftrightarrow$$

$$4 + 1 + h = \frac{3\sqrt{2}}{2} d(1) \Leftrightarrow d(1) = \frac{10 + 2h}{3\sqrt{2}} \quad (4).$$

$$\text{Από τις (2) και (4) έχουμε: } \sqrt{h^2 + 2h + 5} = \frac{10 + 2h}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$h^2 + 2h + 5 = \frac{4h^2 + 40h + 100}{18} \Leftrightarrow 18h^2 + 36h + 90 = 4h^2 + 40h + 100 \Leftrightarrow$$

$$14h^2 - 4h - 10 = 0 \Leftrightarrow 7h^2 - 2h - 5 = 0, \Delta = 4 + 140 = 144 \text{ και έχουμε}$$

$$h = \frac{2+12}{14} = 1 \text{ m Δεκτή ή } h = \frac{2-12}{14} = -\frac{10}{14} \text{ Απορρίπτεται}$$

36.α) Έστω t_1 ο χρόνος που χρειάζεται ο κολυμβητής για να κολυμπήσει από το Κ στο Μ και t_2 ο χρόνος που χρειάζεται για να κολυμπήσει από το Μ στο Σ.

$$\text{Έχουμε: } t_1 = \frac{KM}{u_1} = \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{3} \text{ και } t_2 = \frac{M\Sigma}{u_2} = \frac{v-x}{5}.$$

$$\text{Επομένως ο συνολικός χρόνος είναι: } T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100^2}}{3} + \frac{v-x}{5}, x \in (0, v].$$

β) Η συνάρτηση T είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα και σύνθεση και πράξεις

$$\text{παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: } T'(x) = \frac{x}{3\sqrt{x^2 + 100^2}} - \frac{1}{5}, x \in (0, v]$$

και έχουμε:

$$T'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}} - \frac{1}{5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+100^2}} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5x \geq 3\sqrt{x^2+100^2} \Leftrightarrow$$

$$25x^2 \geq 9(x^2+100^2) \Leftrightarrow 25x^2 \geq 9x^2 + 9 \cdot 100^2 \Leftrightarrow 16x^2 \geq 9 \cdot 100^2 \Leftrightarrow$$

$$4|x| \geq 300 \Leftrightarrow |x| \geq 75 \stackrel{x \in (0, v)}{\Leftrightarrow} x \geq 75. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο } 75 \text{ άρα ισχύει ότι:}$$

Άρα για $x \in (0, 75): f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 75]$ και για $x \in (75, v]:$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [75, v)$. Άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 75$ οπότε για $x = 75$ ο κολυμβητής θα χρειαστεί το λιγότερο χρόνο για να φτάσει σπίτι του.

$$\gamma) E(x) = \frac{1}{2}x \cdot 100 = 50x, x \in (0, 300] \text{ και}$$

$$\Pi(x) = 100 + x + \sqrt{x^2 + 100^2}, x \in (0, 300]. \text{ Οι συναρτήσεις } E \text{ και } \Pi \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμες με παραγώγους: $E'(x) = 50 > 0 \Rightarrow E \nearrow (0, 300]$,

$$\Pi'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 100^2}} > 0 \Rightarrow \Pi \nearrow (0, 300]$$

Άρα για $x = 300$ έχει και μέγιστο εμβαδόν και μέγιστη περίμετρο.

δ) Η συνάρτηση T' είναι συνεχής άρα από ΘΜΕΤ έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο διάστημα $[20, 200]$ και από ΘΕΤ ισχύει ότι:

$$m \leq T'(20) \leq M \Leftrightarrow 5m \leq 5T'(20) \leq 5M$$

$$T'([20, 200]) = [m, M]. \text{ Έχουμε ότι } m \leq T'(150) \leq M \Leftrightarrow 2m \leq 2T'(150) \leq 2M.$$

$$m \leq T'(75) \leq M$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $8m \leq 5T'(20) + 2T'(150) + T'(75) \leq 8M \Leftrightarrow$

$$m \leq \frac{5T'(20) + 2T'(150) + T'(75)}{8} \leq M \Leftrightarrow m \leq \frac{5T'(20) + 2T'(150) + 0}{8} \leq M$$

Άρα υπάρχει $\xi \in [20, 200]: T'(\xi) = \frac{5T'(20) + 2T'(150)}{8}$. Η συνάρτηση T' είναι

$$\text{παραγωγίσιμη με παράγωγο: } T''(x) = \frac{3\sqrt{x^2+100^2} - x \left(\frac{3x}{\sqrt{x^2+100^2}} \right)}{9(x^2+100^2)} =$$

$$\frac{3(x^2+100^2) - 3x^2}{9(x^2+100^2)\sqrt{x^2+100^2}} = \frac{100^2}{9(x^2+100^2)\sqrt{x^2+100^2}}, x \in (0, v]$$

Έχουμε ότι $T''(x) > 0 \Rightarrow T' \nearrow [20, 200]$ άρα προφανώς το ξ είναι μοναδικό.

37.α) Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΓΒ έχουμε:

$$\cos\theta = \frac{(OE)}{(OA)} = \frac{1}{(OA)} \Rightarrow (OA) = \frac{1}{\cos\theta} \text{ και}$$

$$\eta\mu\theta = \frac{(OG)}{(OB)} = \frac{1}{(OB)} \Rightarrow (OB) = \frac{1}{\eta\mu\theta}$$

$$\text{Είναι } f(\theta) = (AB) = (OA) + (OB) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\cos\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$f'(\theta) = \frac{-\cos\theta}{\eta\mu^2\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\eta\mu^3\theta - \cos^3\theta}{\eta\mu^2\theta \cdot \sin^2\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Τα μοναδικά πιθανά κρίσιμα σημεία της f είναι οι ρίζες της παραγώγου της.

$$f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^3\theta - \cos^3\theta}{\eta\mu^2\theta \cdot \sin^2\theta} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta - \cos^3\theta = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\theta = \cos^3\theta \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\theta = \cos\theta \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = 1 \stackrel{\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της } f \text{ είναι το } K\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = K\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right).$$

γ) Έστω η συνάρτηση $v(\theta) = \eta\mu^3\theta - \cos^3\theta, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι συνεχής και

από το προηγούμενο ερώτημα έχει μοναδική ρίζα την $\theta = \frac{\pi}{4}$, οπότε σε καθεμία

από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ η v διατηρεί πρόσημο.

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}^3}{8} = \frac{1 - \sqrt{3}^3}{8} < 0 \text{ άρα στο } \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ έχουμε}$$

$$v(\theta) < 0, \quad v\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}^3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}^3 - 1}{8} > 0 \text{ άρα στο } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

έχουμε $v(\theta) > 0$. Επίσης ισχύει ότι $\eta\mu^2\theta \cdot \sin^2\theta > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα αφού

$$f'(\theta) = \frac{v(\theta)}{\eta\mu^2\theta \cdot \sin^2\theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ ισχύει ότι στο } \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ είναι } f'(\theta) < 0 \text{ και στο}$$

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } f'(\theta) > 0. \text{ Άρα αφού η } f \text{ είναι συνεχής στο } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ τότε } f \searrow \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$$

και $f \nearrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$ οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\theta = \frac{\pi}{4}$ το

$$K\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = K\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right).$$

Επομένως το ελάχιστο μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι $2\sqrt{2}$ m, άρα το μέγιστο μήκος της σκάλας ώστε να μπορεί να περάσει είναι $2\sqrt{2}$ m.

$$\delta) g(\theta) = \frac{f\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2}}{1 - \theta^2 - \sin^2 \theta}, \theta \in A. \text{ Για το πεδίο ορισμού της } g \text{ πρέπει:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta + \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{και} \\ 1 - \theta^2 - \sin^2 \theta \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{και} \\ 1 - \theta^2 - \sin^2 \theta \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{και} \\ \eta \mu^2 \theta \neq \theta^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{και} \\ |\eta \mu \theta| \neq |\theta| \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \theta \neq 0 \end{array} \right\}. \text{ (Ισχύει } |\eta \mu \theta| \leq |\theta| \text{ για κάθε } \theta \in \mathbb{R} \text{ με την ισότητα να ισχύει}$$

μόνον για $\theta = 0$). Άρα $A = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Από το προηγούμενο ερώτημα

αφού η f έχει ολικό ελάχιστο το $2\sqrt{2}$ οπότε $f(\theta) \geq 2\sqrt{2}$ για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\theta = \frac{\pi}{4}$. Το $\theta + \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα

$f\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > 2\sqrt{2}$ οπότε $f\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 2\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow g(\theta) \neq 0$ άρα η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα x' .

38.α) Επειδή το A είναι οποιοδήποτε σημείο της C_f , θα βρούμε την εφαπτομένη της C_f στο A με $x_0 \leq 0$. Η εφαπτομένη ε λοιπόν στο A έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y = x e^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0)$$

Για $y = 0$ είναι $x e^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0) = 0 \Leftrightarrow x e^{x_0} = -e^{x_0}(1 - x_0) \Leftrightarrow x = x_0 - 1$ και

για $x = 0$ είναι $y = e^{x_0}(1 - x_0)$, οπότε η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία

$B(x_0 - 1, 0)$ και $\Gamma(0, e^{x_0}(1 - x_0))$. Το τρίγωνο που σχηματίζει η ε με τους

άξονες είναι το $OB\Gamma$ και έχει εμβαδό:

$$E = \frac{1}{2}(OB)(O\Gamma) = \frac{1}{2}|x_0 - 1||e^{x_0}(1 - x_0)| = \frac{1}{2}e^{x_0}(1 - x_0)^2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}e^x(1 - x)^2$, $x \leq 0$.

Η E είναι παραγωγίσιμη

στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$E'(x) = \frac{1}{2}e^x(1 - x)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2e^x(1 - x) = \frac{1}{2}e^x(1 - x)(1 - x - 2) = -\frac{1}{2}e^x(1 - x)(x + 1)$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^x x(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1.$$

Για κάθε $x < -1$ είναι $E'(x) > 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $E'(x) < 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $[-1, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η E παρουσιάζει μέγιστο στο $x = -1$ το $E(-1) = \frac{2}{e}$, οπότε $A\left(-1, \frac{1}{e}\right)$.

β) Είναι $\delta: y = x \Leftrightarrow x - y = 0$

$$\text{Είναι } d(C_f, \delta) = d(A, \delta) = \frac{|x_0 - e^{x_0}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{e^{x_0} - x_0}{\sqrt{2}}$$

Έστω $d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η d είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $d'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x - 1)$.

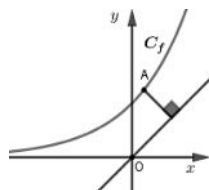
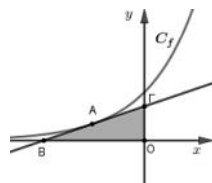
$$\text{Είναι } d'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $d'(x) < 0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $d'(x) > 0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η d έχει ελάχιστο για $x = 0$, οπότε το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το $(0, 1)$.

γ) Επειδή τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τη δ , η απόσταση (AB) γίνεται ελάχιστη όταν η απόσταση του A από τη δ γίνει ελάχιστη, άρα $A(0, 1)$ και $B(1, 0)$.

δ) Για $x = 1$ η ε γίνεται $y = e^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0) = e^{x_0}(2 - x_0)$, άρα η ε τέμνει την $x = 1$ στο σημείο $K(1, e^{x_0}(2 - x_0))$.



Για $x = 2$ η ε γίνεται $y = 2e^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0) = e^{x_0}(3 - x_0)$,

άρα η ε τέμνει την $x = 2$ στο σημείο $\Lambda(2, e^{x_0}(3 - x_0))$.

Το τραπέζιο ΚΛΜΝ έχει εμβαδό

$$(ΚΛΜΝ) = \frac{(ΚΝ + ΜΛ)ΜΝ}{2} = \frac{[e^{x_0}(2 - x_0) + e^{x_0}(3 - x_0)] \cdot 1}{2} = \frac{e^{x_0}(5 - 2x_0)}{2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = \frac{1}{2}e^x(5 - 2x)$, $x \in (1, 2)$.

Η α είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\alpha'(x) = \frac{1}{2}e^x(5 - 2x) - e^x = e^x\left(\frac{5 - 2x}{2} - 1\right) = e^x \frac{3 - 2x}{2}.$$

$$\text{Είναι } \alpha'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \frac{3 - 2x}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Για κάθε $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ είναι $\alpha'(x) > 0$ και επειδή η α είναι συνεχής στο $\left[1, \frac{3}{2}\right]$,

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ είναι $\alpha'(x) < 0$

και επειδή η α είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

αυτό. Η α έχει μέγιστο για $x = \frac{3}{2}$, οπότε το

εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ γίνεται μέγιστο

$$\text{στο } \Lambda\left(\frac{3}{2}, e^{\frac{3}{2}}\right).$$

ε) Οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$e^x = \frac{1}{1 - x} \Leftrightarrow (1 - x)e^x - 1 = 0, x \neq 1. \text{Θεωρούμε}$$

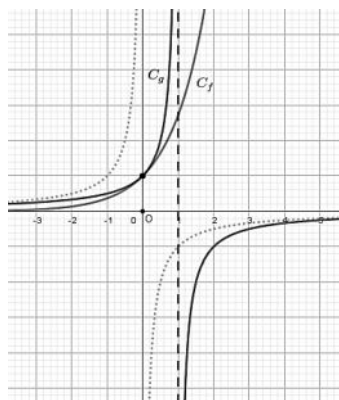
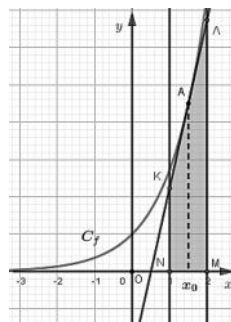
τη συνάρτηση $\beta(x) = (1 - x)e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η β

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$\beta'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$. Για κάθε $x < 0$ είναι $\beta'(x) > 0$ και επειδή η β είναι συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > 0$ είναι $\beta'(x) < 0$ και επειδή η β είναι συνεχής στο διάστημα



$[0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η β έχει μέγιστο το $\beta(0) = 0$ άρα $\beta(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε μοναδική ρίζα της εξίσωσης το $x = 0$ και το κοινό σημείο C_f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι το $(0, 1)$. Είναι $g(x) = \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x-1}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y = -\frac{1}{x}$ κατά 1 μονάδα δεξιά.

στ) Έστω $k(x) = f(\lambda x) = e^{\lambda x}$ και $P(x_1, k(x_1))$ σημείο της.

1ος τρόπος: Η εφαπτομένη της k στο P έχει εξίσωση:

$$y - k(x_1) = k'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = \lambda e^{\lambda x_1} x + e^{\lambda x_1} - \lambda e^{\lambda x_1} x_1 \quad (1)$$

Για να είναι η $y = x + 1$ εφαπτομένη της k πρέπει να ταυτίζεται με την (1), άρα

$$\begin{cases} \lambda e^{\lambda x_1} = 1 \\ e^{\lambda x_1} - \lambda e^{\lambda x_1} x_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\lambda x_1} = \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} - x_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\lambda x_1} = \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} - 1 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\lambda \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)} = \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} - 1 = x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda e^{1-\lambda} - 1 = 0 \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\delta(x) = xe^{1-x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η δ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\delta'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$.

$$\text{Είναι } \delta'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Για κάθε $x < 1$ είναι $\delta'(x) > 0$ και επειδή η δ είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 1$ είναι $\delta'(x) < 0$ και επειδή η δ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η δ έχει μέγιστο για $x = 1$ το $\delta(1) = 0$, άρα $\delta(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα η $\lambda = 1$ είναι η μοναδική λύση της (2).

2ος τρόπος: Είναι $k'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $k''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ άρα η k είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους.

Δηλαδή $k(x) \geq x + 1 \Leftrightarrow e^{\lambda x} - x - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο

για $x = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\zeta(x) = e^{\lambda x} - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

είναι $\zeta(x) \geq \zeta(0)$, δηλαδή η ζ έχει ελάχιστο για $x = 0$. Η ζ είναι παραγωγίσιμη με

$$\zeta'(x) = \lambda e^{\lambda x} - 1. \text{ Από το θεώρημα Fermat είναι } \zeta'(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

ζ) Είναι $h(x) = \frac{x+1}{e^{\lambda x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$h'(x) = \frac{(x+1)' e^{\lambda x} - (e^{\lambda x})' (x+1)}{(e^{\lambda x})^2} = \frac{1 - \lambda x - \lambda}{e^{\lambda x}}$$

$$\text{Είναι } h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \lambda x - \lambda}{e^{\lambda x}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1 - \lambda}{\lambda}.$$

$$\text{Για κάθε } x < \frac{1 - \lambda}{\lambda} \text{ είναι } h'(x) > 0 \text{ άρα } h \nearrow \left(-\infty, \frac{1 - \lambda}{\lambda}\right).$$

$$\text{Για κάθε } x > \frac{1 - \lambda}{\lambda} \text{ είναι } h'(x) < 0 \text{ άρα } h \searrow \left[\frac{1 - \lambda}{\lambda}, +\infty\right).$$

$$\text{Η } h \text{ έχει μέγιστο το } h\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda}\right) = \frac{\frac{1 - \lambda}{\lambda} + 1}{e^{\frac{1 - \lambda}{\lambda}}} = \frac{\frac{1 - \lambda + \lambda}{\lambda}}{e^{1 - \lambda}} = \frac{e^{\lambda - 1}}{\lambda}.$$

$$\text{Έστω } b(\lambda) = \frac{e^{\lambda - 1}}{\lambda} \text{ με } \lambda > 0 \text{ η συνάρτηση των μεγίστων της } h.$$

$$\text{Τότε } b'(\lambda) = \frac{e^{\lambda - 1} \lambda - e^{\lambda - 1}}{\lambda^2} = \frac{e^{\lambda - 1} (\lambda - 1)}{\lambda^2} \text{ και } b'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 1.$$

Για κάθε $\lambda < 1$ είναι $b'(\lambda) < 0$ άρα η b είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και για κάθε $\lambda > 1$ είναι $b'(\lambda) > 0$, άρα η b είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η b έχει ελάχιστο για $\lambda = 1$. Τότε όμως με βάση το προηγούμενο σκέλος η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(\lambda x)$.

39.α) Η συνάρτηση θ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 24]$ με

$$\theta'(t) = 1 - \frac{4}{2\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}}. \text{ Είναι } \theta'(t) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{t} - 2}{\sqrt{t}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{t} \geq 2 \Leftrightarrow t \geq 4.$$

Για κάθε $t \in (0, 4)$ είναι $\theta'(t) < 0$ και για κάθε $t \in (4, 24]$ είναι $\theta'(t) > 0$. Επειδή η θ είναι

λ	0	1	$+\infty$
b'	-	ϕ	+
b	$\searrow$		$\nearrow$

συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 4]$ και γνησίως αύξουσα στο $[4, 24]$.

Επομένως για $t \in (0, 4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4, 24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.

$$\text{Η συνάρτηση } \theta \text{ έχει ελάχιστο το } \theta(4) = 4 - 4\sqrt{4} + \alpha = -4 + \alpha.$$

Επειδή η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι 0°C ισχύει ότι $-4 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$.

β) Για το πεδίο ορισμού της $\theta \circ \theta$ έχουμε:

$$A_{\theta;\theta} = \{t \in A_\theta / \theta(t) \in A_\theta\} = \{t \in (0, 24] / (t - 4\sqrt{t} + 4) \in (0, 24]\} = \\ \{t \in (0, 24] / (\sqrt{t} - 2)^2 \in (0, 24]\}. \text{ Για κάθε } t \in (0, 24] \text{ είναι } (\sqrt{t} - 2)^2 \geq 0.$$

$$(\sqrt{t} - 2)^2 \leq 24 \Leftrightarrow |\sqrt{t} - 2| \leq \sqrt{24} \Leftrightarrow -2\sqrt{6} \leq \sqrt{t} - 2 \leq 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \\ 2 - 2\sqrt{6} \leq \sqrt{t} \leq 2 + 2\sqrt{6}$$

$$\text{Όμως } t \geq 0, \text{ οπότε } 0 \leq \sqrt{t} \leq 2 + 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq (2 + 2\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq t \leq 4 + 24 + 8\sqrt{6} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 28 + 8\sqrt{6}$$

$$\text{Όμως } t \in (0, 24], \text{ οπότε με συναλήθευση προκύπτει ότι } A_{\theta;\theta} = (0, 24].$$

$$(\theta \circ \theta)(t) = \theta(\theta(t)) = \left(\sqrt{(\sqrt{t} - 2)^2} - 2 \right)^2 = (|\sqrt{t} - 2| - 2)^2.$$

$$\text{Όταν } t \in (0, 4] \text{ είναι } \sqrt{t} \leq 2, \text{ οπότε } (\theta \circ \theta)(t) = (-\sqrt{t} + 2 - 2)^2 = t.$$

$$\gamma) \text{ Για κάθε } t \in [4, 24] \text{ είναι } f(t) = \sqrt{\theta(t)} = \sqrt{(\sqrt{t} - 2)^2} = |\sqrt{t} - 2| = \sqrt{t} - 2.$$

$$\text{Για κάθε } t_1, t_2 \in [4, 24] \text{ με } t_1 < t_2 \text{ είναι}$$

$$\sqrt{t_1} < \sqrt{t_2} \Leftrightarrow \sqrt{t_1} - 2 < \sqrt{t_2} - 2 \Leftrightarrow f(t_1) < f(t_2) \Leftrightarrow f \nearrow [4, 24] \Rightarrow f \text{ 1-1, οπότε η } f \\ \text{αντιστρέφεται. Για κάθε } 4 \leq t \leq 24 \text{ είναι}$$

$$f(4) \leq f(t) \leq f(24) \Leftrightarrow 0 \leq f(t) \leq \sqrt{24} - 2 \Leftrightarrow 0 \leq f(t) \leq 2\sqrt{6} - 2, \text{ οπότε η } f \text{ έχει}$$

$$\text{σύνολο τιμών το } [0, 2\sqrt{6} - 2], \text{ άρα το πεδίο ορισμού της } f^{-1} \text{ είναι το}$$

$$[0, 2\sqrt{6} - 2]. \text{ Για κάθε } t \in [4, 24] \text{ και } y \in [0, 2\sqrt{6} - 2], \text{ είναι}$$

$$f(t) = y \Leftrightarrow \sqrt{t} - 2 = y \Leftrightarrow \sqrt{t} = y + 2 \Leftrightarrow t = (y + 2)^2. \text{ Άρα}$$

$$f^{-1}(y) = (y + 2)^2, y \in [0, 2\sqrt{6} - 2], \text{ οπότε } f^{-1}(t) = (t + 2)^2, t \in [0, 2\sqrt{6} - 2].$$

$$\delta) \text{ Επειδή γνωρίζουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των } f, f^{-1} \text{ είναι συμμετρικές} \\ \text{ως προς την ευθεία } y = t \text{ (αφού αντί για } x \text{ έχουμε άγνωστο το } t), \text{ θα βρούμε τη} \\ \text{σχετική θέση της } f \text{ με την ευθεία αυτή. } f(t) > t \Leftrightarrow t > \sqrt{t} - 2 \Leftrightarrow t - \sqrt{t} + 2 > 0 \quad (1)$$

$$\text{Θέτουμε } \sqrt{t} = \omega \text{ και η (1) γίνεται } \omega^2 - \omega + 2 > 0 \text{ που ισχύει αφού είναι τριώνυμο} \\ \text{με } \Delta < 0. \text{ Άρα η γραφική παράσταση της } f \text{ βρίσκεται πάνω από την ευθεία } y = t, \\ \text{οπότε λόγω συμμετρίας η γραφική παράσταση της } f^{-1} \text{ βρίσκεται κάτω από την} \\ y = t, \text{ επομένως } f(t) > f^{-1}(t)$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Έστω $\Delta K = \Lambda \Gamma = x$ οπότε $E = \frac{(AB + \Gamma \Delta) \nu}{2} = \frac{(2 + 2x + 2) \sqrt{4 - x^2}}{2}$

Οπότε $E(x) = (x + 2) \sqrt{4 - x^2}$, $x \in (0, 2)$. Η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$

με $E'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x(x + 2)}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - x^2 - x^2 - 2x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-2(x^2 + x - 2)}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Είναι $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$.

Η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2)$, οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 1$ την τιμή $E(1) = 3\sqrt{3}$. **Σωστή απάντηση Δ.**

2. Έστω $A(x, f(x)) = (x, \sqrt{x-1})$ σημείο της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f τότε $(AM) = d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x-1})^2} = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$.

Η συνάρτηση $d(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$

με $d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}}$ και $d'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Η συνάρτηση d είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο

$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{3}{2}$. Το ζητούμενο σημείο είναι το

$A\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **Σωστή απάντηση Γ.**

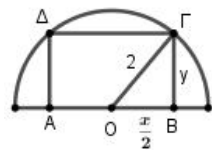
3. Έστω $AB\Gamma\Delta$ το ορθογώνιο που είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο κέντρου O , τότε αν $AB=x$ και $B\Gamma=y$ θα είναι

$OB = \frac{x}{2}$, οπότε από πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο

τρίγωνο $OB\Gamma$ έχουμε $OB^2 + B\Gamma^2 = O\Gamma^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ (1).

Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι

$E = xy \Rightarrow E(x) = x \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$, $x \in (0, 4)$ και $E'(x) = \frac{16 - 2x^2}{4\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}}$.



Είναι $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 16 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 8 \Leftrightarrow |x| < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 0 < x < 2\sqrt{2}$

Η E είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2\sqrt{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2\sqrt{2}, 4)$,

παρουσιάζει μέγιστο για $x = 2\sqrt{2}$, συνεπώς από (1) $y = \sqrt{2}$

Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδό του ορθογωνίου είναι

$E = xy = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$. **Σωστή απάντηση Β.**

4. Είναι $K(t) = \frac{A}{4} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{7}} e^{-\frac{t}{7}} + c = -\frac{7A}{4} e^{-\frac{t}{7}} + c$ και $K(0) = 0$ άρα $c = \frac{7A}{4}$.

Επομένως $K(t) = -\frac{7A}{4} e^{-\frac{t}{7}} + \frac{7A}{4}$. Το συνολικό κέρδος $P(t)$ είναι

$P(t) = K(t) + f(t)$ δηλαδή $P(t) = -\frac{7A}{4} e^{-\frac{t}{7}} + \frac{7A}{4} + \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}$ με

$P'(t) = -\frac{7A}{4} e^{-\frac{t}{7}} \left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \left(-\frac{1}{14}\right) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} - \frac{A}{4} e^{-\frac{t+28}{14}}$ και

$P'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{A}{4} \left(e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t+28}{14}}\right) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}} > e^{-\frac{t+28}{14}} \Leftrightarrow -\frac{t}{7} > -\frac{t+28}{14} \Leftrightarrow$

$2t < t+28 \Leftrightarrow t < 28$. Η $P(t)$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $t \in [0, 28]$ και γνησίως φθίνουσα όταν $t > 28$. Άρα το συνολικό κέρδος γίνεται μέγιστο για $t = 28$ έτη.

Σωστή απάντηση Δ.

5. Έστω x, y οι διαστάσεις του κειμένου τότε $xy = 360 \Leftrightarrow y = \frac{360}{x}$ (1). Το

εμβαδό της σελίδας είναι $E = (x+4)(y+10) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} E(x) = (x+4)\left(\frac{360}{x} + 10\right), x > 0$.

Με $E'(x) = \frac{360}{x} + 10 + (x+4)\left(-\frac{360}{x^2}\right) = \frac{360}{x} + 10 - \frac{360}{x} - \frac{1440}{x^2} = \frac{10x^2 - 1440}{x^2}$

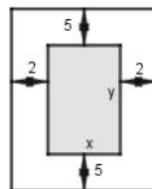
Είναι $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 12$. Η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα

στο $(0, 12]$ και γνησίως αύξουσα στο $[12, +\infty)$, παρουσιάζει

ελάχιστο για $x = 12$ οπότε $y = \frac{360}{12} = 30$. Συνεπώς το πλάτος

της σελίδας θα είναι $12+4=16\text{cm}$ και το ύψος $30+10=40\text{cm}$.

Σωστή απάντηση Α.



Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	2. Σ	3. Λ	4. Σ	5. Σ

1ο Διαγώνισμα με όλη έως και τα ακρότατα συνάρτησης

A1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

• Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

• Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1). \text{ Επειδή το } \xi \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } \Delta, \text{ ισχύει}$$

$$f'(\xi) = 0, \text{ οπότε, λόγω της (1), είναι } f(x_1) = f(x_2).$$

• Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του

πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός

αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με

$$f'(x_0). \text{ Δηλαδή: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

A3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$ και

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1. \text{ Είναι φανερό ότι } f \circ g \neq g \circ f.$$

A4. B A5. α) Λ β) Σ γ) Λ

Θέμα B

B1. Θέτω $\ln x = u, u \in \mathbb{R}$ και η σχέση $f(\ln x) = \ln x |\ln x|$ γίνεται

$$f(u) = u|u|, u \in \mathbb{R}, \text{ οπότε } f(x) = x|x|, x \in \mathbb{R}.$$

B2. Είναι $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 2x > 0$ και για κάθε

$x < 0$ είναι $f'(x) = -2x > 0$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για $x \geq 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 = y \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$ και για $x < 0$ είναι

$$-x^2 = y < 0 \Leftrightarrow x^2 = -y \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y}.$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt{-y}, & y < 0 \end{cases}, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}.$$

$$\mathbf{B3.} \text{ Για κάθε } x \geq 0 \text{ είναι } f(x) > f^{-1}(x) \Leftrightarrow x^2 > \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 > x \Leftrightarrow x^4 - x > 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

Για κάθε $x < 0$ είναι

$$f(x) > f^{-1}(x) \Leftrightarrow -x^2 > -\sqrt{-x} \Leftrightarrow x^2 < \sqrt{-x} \Leftrightarrow x^4 < -x \Leftrightarrow$$

$$x^4 + x < 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) < 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > -1 \Leftrightarrow x > -1.$$

Άρα $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

$$\mathbf{B4.} f^2(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow$$

$x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in [0, 1]$. Είναι $h(1) = 0$,

οπότε από το σχήμα Horner η h γράφεται

$$h(x) = (x-1)(x^3 + x - 1).$$

Έστω $\pi(x) = x^3 + x - 1$, $x \in [0, 1]$. Είναι $\pi(0) = -1$,

$\pi(1) = 1$, δηλαδή $\pi(0)\pi(1) < 0$ και επειδή η π είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\pi(x_1) = 0$.

Η π είναι παραγωγίσιμη με $\pi'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \pi \nearrow \mathbb{R}$, οπότε το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\pi(x) = 0$.

$h(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\pi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $(\pi(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1)$, άρα η εξίσωση

$h(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$.

$$\mathbf{B5.} f^2(\eta\mu x) \geq f^2(x) + x^{2020} \Leftrightarrow \eta\mu^4 x \geq x^4 + x^{2020} \Leftrightarrow \eta\mu^4 x - x^4 \geq x^{2020} \quad (1)$$

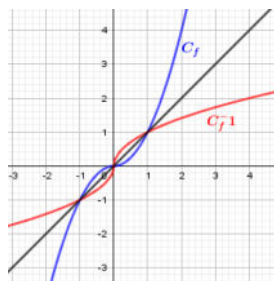
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $\eta\mu^4 x \leq x^4 \Leftrightarrow \eta\mu^4 x - x^4 \leq 0$. Όμως $x^{2020} \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα η (1) ισχύει μόνο για $x = 0$.

Θέμα Γ

Γ1. Έστω (1) η σχέση $h^3(x) + h(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$. Με παραγωγή της

$$\text{έχουμε } 3h^2(x)h'(x) + h'(x) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow h'(x) \left(\underbrace{3h^2(x) + 1}_{>0} \right) = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{3h^2(x) + 1} > 0 \text{ αφού } x^2 + x + 1 > 0 \quad (\Delta = -3 < 0) \text{ άρα η } h \text{ είναι γνησίως}$$



αύξουσα .

Γ2. Από τη σχέση (1) έχουμε :

$$h^3(x) + h(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Leftrightarrow h(x)(h^2(x) + 1) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 6x}{6} \Leftrightarrow$$

$$h(x) \left(\underbrace{h^2(x) + 1}_{>0} \right) = \frac{x(2x^2 - 3x + 6)}{6} \Leftrightarrow h(x) = \frac{x(2x^2 - 3x + 6)}{6(h^2(x) + 1)} > 0 \text{ αφού } x > 0$$

και $2x^2 - 3x + 6 > 0$ ($\Delta = -39 < 0$). Όμως

$$h(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g(x+u) - g(x-u)}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{g(x+u) - g(x)}{u} - \frac{g(x-u) - g(x)}{u} \right) =$$

$$\frac{1}{2} (g'(x) + g'(x)) = g'(x). \text{ Άρα } g'(x) > 0 \text{ για } x \neq 0, \text{ η } g \text{ συνεχής στο } [0, +\infty)$$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Γ3.α) $g(0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln x - \ln(x^2 + 2020) + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x - \sqrt{x}}] = 0$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x^2 - \ln(x^2 + 2020)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2}{x^2 + 2020} = \lim_{\omega \rightarrow 1} \ln \omega = 0 \text{ όπου}$$

$$\omega = \frac{x^2}{x^2 + 2020} \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 2020} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1. \text{ Ακόμη}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + (x + \sqrt{x})}{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - (x + \sqrt{x})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \sqrt{x}}{x^2 + x + 1 - (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \sqrt{x}}{1 - 2x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{\cancel{x} \sqrt{x} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}} - 2} = 0$$

β) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g''(x) = h'(x) > 0$ άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = e^{\frac{g(x)}{x}} \cdot \frac{xg'(x) - g(x)}{x^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = xg'(x) - g(x), x \geq 0$. Η συνάρτηση α είναι

παραγωγίσιμη με παράγωγο $\alpha'(x) = \cancel{g'(x)} + xg''(x) - \cancel{g'(x)} = xg''(x) > 0$ άρα η α είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για $x > 0 \Leftrightarrow \alpha(x) > \alpha(0) \Leftrightarrow \alpha(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, η f συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Γ4.α) Το $\frac{1}{2} \in (g(0), g(1))$, η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ οπότε από το θεώρημα

ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = \frac{1}{2}$.

β) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στα $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ άρα υπάρχουν

$$\xi_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ τέτοια ώστε } g'(\xi_1) = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right) - g(0)}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow g'(\xi_1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$g'(\xi_2) = \frac{g(1) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \Leftrightarrow g'(\xi_2) = 2\left(1 - g\left(\frac{1}{2}\right)\right). \text{ Επομένως}$$

$$g'(\xi_1) + g'(\xi_2) = 2\left(1 - g\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(1 - g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2.$$

γ) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στα $[0, \xi], [\xi, 1]$ άρα υπάρχουν

$\theta_1 \in (0, \xi), \theta_2 \in (\xi, 1)$ τέτοια ώστε

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} \Leftrightarrow g'(\theta_1) = \frac{\frac{1}{2}}{\xi} \Leftrightarrow \frac{1}{g'(\theta_1)} = \frac{\xi}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{g'(\theta_1)} = 2\xi,$$

$$g'(\theta_2) = \frac{g(1) - g(\xi)}{1 - \xi} \Leftrightarrow g'(\theta_2) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \xi} \Leftrightarrow \frac{1}{g'(\theta_2)} = \frac{1 - \xi}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{g'(\theta_2)} = 2 - 2\xi.$$

$$\text{Επομένως } \frac{1}{g'(\theta_1)} + \frac{1}{g'(\theta_2)} = 2\xi + 2 - 2\xi = 2.$$

Θέμα Δ

$$\Delta 1. e^{\alpha x} - 3(x+1)^2 + 2 \leq f(x) \leq e^{\beta x} - 3(x+1)^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{\alpha x} - 3(x+1)^2 + 2 \leq f(x) \Leftrightarrow e^{\alpha x} - 3(x+1)^2 + 2 - f(x) \leq 0 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq e^{\beta x} - 3(x+1)^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) - e^{\beta x} + 3(x+1)^2 - 2 \leq 0 \quad (2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Έστω $\varphi(x) = e^{\alpha x} - 3(x+1)^2 + 2 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$\varphi(0) = 1 - 3 + 2 - f(0) = 0$, οπότε η σχέση (1) γράφεται: $\varphi(x) \leq \varphi(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς η φ έχει μέγιστο στο $x = 0$. Επειδή η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = \alpha e^{\alpha x} - 6(x+1) - f'(x)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 6 - f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 6 + 5 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Έστω $h(x) = f(x) - e^{\beta x} + 3(x+1)^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $h(0) = f(0) - 1 + 3 - 2 = 0$, οπότε η σχέση (2) γίνεται: $h(x) \leq h(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς η h έχει μέγιστο στο $x = 0$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f'(x) - \beta e^{\beta x} + 6(x+1)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - \beta + 6 = 0 \Leftrightarrow -5 - \beta + 6 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

$$\text{Τότε } e^{\alpha x} - 3(x+1)^2 + 2 \leq f(x) \leq e^{\beta x} - 3(x+1)^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$e^x - 3(x+1)^2 + 2 \leq f(x) \leq e^x - 3(x+1)^2 + 2 \Leftrightarrow f(x) = e^x - 3(x+1)^2 + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x - 6(x+1)$ και $f''(x) = e^x - 6$.

Είναι

x	$-\infty$	ρ_1	$\ln 6$	ρ_2	$+\infty$
f''	-			+	
f'	+	↘	↘	↗	+
f	↗		$-6 \ln 6$		↗

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \ln 6. \text{ Για κάθε } x < \ln 6 \text{ είναι}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, \ln 6] \text{ και για κάθε } x > \ln 6 \text{ είναι}$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [\ln 6, +\infty).$$

$$\text{Είναι } f'(\ln 6) = -6 \ln 6 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 6(x+1)) = +\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, \ln 6)$ η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = (-6 \ln 6, +\infty)$. Επειδή $0 \in f'(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho_1) = 0$.

Είναι $f'(4) = e^4 - 30 = 24,5 > 0$, οπότε $f'(\ln 6)f'(4) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, υπάρχει $\rho_2 \in (\ln 6, 4) \subseteq [\ln 6, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho_2) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 6, +\infty)$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο διάστημα αυτό. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει

δύο ρίζες, η f έχει δύο κρίσιμα σημεία.

Δ3. Για κάθε $x < \rho_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(\rho_1) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, \rho_1]$, για κάθε

$\rho_1 < x < \ln 6 \Rightarrow f'(x) < f'(\rho_1) = 0 \Rightarrow f \searrow [\rho_1, \ln 6]$, για κάθε

$\ln 6 < x < \rho_2 \Rightarrow f'(x) < f'(\rho_2) = 0 \Rightarrow f \searrow [\ln 6, \rho_2]$ και τέλος για κάθε

$x > \rho_2 \Leftrightarrow f'(x) > f'(\rho_2) = 0 \Rightarrow f \nearrow [\rho_2, +\infty)$. Είναι $f'(0) = -5 < 0$, οπότε

$\rho_1 < 0$ γιατί $0 \in f'((-\infty, \ln 6))$.

Είναι $\rho_1 < 0 \Leftrightarrow f(\rho_1) > f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, οπότε στο διάστημα

$\Delta_1 = (-\infty, \rho_1)$ η f έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-\infty, f(\rho_1))$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_1)$, η f έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1 \in \Delta_1$. Είναι

$\rho_2 > 0 \Leftrightarrow f(\rho_2) < f(0) = 0$.

Επειδή $f(0) = 0$, $0 \in (\rho_1, \rho_2)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, το 0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό. Είναι

$f(5) = e^5 - 76 = 148 - 76 = 72 > 0$, οπότε $f(\rho_2)f(5) < 0$ και επειδή η f είναι

συνεχής, λόγω του Θ. Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα

στο διάστημα $x_2 \in (\rho_2, 5) \subseteq (\rho_2, +\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο

$(\rho_2, +\infty)$, η ρίζα είναι μοναδική στο διάστημα αυτό. Τελικά η f έχει τρεις ρίζες,

τις $x_1, x_2, 0$.

Δ4. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την f υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{e^{x_2} - 3(x_2 + 1)^2 + \cancel{2} - e^{x_1} + 3(x_1 + 1)^2 - \cancel{2}}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{e^{x_2} - e^{x_1} - 3x_2^2 - 6x_2 - \cancel{2} + 3x_1^2 + 6x_1 + \cancel{2}}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{e^{x_2} - e^{x_1} - 3(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 6(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} - 3(x_2 + x_1) - 6 \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi_1) = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} - 3x_2 - 3x_1 - 6 \quad (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x) = e^x$, $x \in [x_1, x_2]$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για

την t , υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $t'(\xi_2) = \frac{t(x_2) - t(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$

$$e^{\xi_2} = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1}. \text{ Τότε η σχέση (3) γίνεται: } f'(\xi_1) = e^{\xi_2} - 3x_2 - 3x_1 - 6.$$

2ο Διαγώνισμα με ύλη έως και τα ακρότατα συνάρτησης

Θέμα Α

A1. Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β) . Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

A2. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

A3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = -\frac{1}{x^4}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

$$\text{όμως } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = -\infty$$

A4.α) Η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα έχει εξίσωση της μορφής $y = ax$. Όμως $a = f'(3) = \tan 45^\circ = 1$, το σημείο A ανήκει σ' αυτή οπότε $f(3) = 3$.

$$\text{β)} (f \circ f)'(3) = f'(f(3))f'(3) = f'(3)f'(3) = 1 \quad g(f(3)) = g(3) = 9 - 3 = 6,$$

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2x + \frac{9}{x^2}$.

$$(g \circ f)'(3) = g'(f(3))f'(3) = g'(3) = 6 + \frac{9}{9} = 7$$

$$\gamma) (g+f)'(3) = g'(3) + f'(3) = 7 + 1 = 8,$$

$$(g \cdot f)'(3) = g'(3)f(3) + g(3)f'(3) = 7 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 27$$

Θέμα Β

B1. Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2 - \Delta\Delta^2 = 32 - x^2 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = \sqrt{32 - x^2} \text{ και}$$

$$E(x) = \frac{1}{2} \Delta\Gamma \cdot \Delta\Delta = \frac{1}{2} x \sqrt{32 - x^2}$$

B2. 1ος τρόπος: Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 3\sqrt{2})$ με:

$$E'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{32 - x^2} + \frac{1}{2} x \cdot \frac{-x}{\sqrt{32 - x^2}} = \frac{32 - x^2 - x^2}{2\sqrt{32 - x^2}} = \frac{32 - 2x^2}{2\sqrt{32 - x^2}}$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{32 - 2x^2}{2\sqrt{32 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 32 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 16 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι $E'(x) > 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 4]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x \in (4, 3\sqrt{2})$ είναι $E'(x) < 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο διάστημα $[4, 3\sqrt{2})$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η E έχει μέγιστο για $x = 4\text{cm}$. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ που ξεκινήσαμε να ανασηκώνουμε το σημείο A ήταν $x = 0$, αν t η χρονική στιγμή που $x = 4$

$$\text{τότε } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{4}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{4}{t} \Leftrightarrow t = 20\text{sec}, \text{ δηλαδή μετά από } 20$$

δευτερόλεπτα το τρίγωνο $\Delta\Delta\Gamma$ έχει μέγιστο εμβαδό.

2ος τρόπος: Είναι $x'(t) = 0,2 \Leftrightarrow x(t) = 0,2t + c, c \in \mathbb{R}$. Είναι

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα } x(t) = 0,2t.$$

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) \sqrt{32 - x^2(t)} = \frac{1}{2} \cdot 0,2t \sqrt{32 - 0,04t^2} = 0,1t \sqrt{32 - 0,04t^2}$$

Επειδή $x(t) \in [0, 3\sqrt{2})$ είναι $0 \leq 0,2t < 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq t < 15\sqrt{2}$. Είναι

$$E'(t) = 0,1 \sqrt{32 - 0,04t^2} + 0,1t \frac{-0,08t}{\sqrt{32 - 0,04t^2}} = 0,1 \frac{32 - 0,08t^2}{\sqrt{32 - 0,04t^2}}.$$

$$E'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0,1 \frac{32 - 0,08t^2}{\sqrt{32 - 0,04t^2}} \geq 0 \Leftrightarrow 32 - 0,08t^2 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \leq 400 \Leftrightarrow t \leq 20$$

Όταν $t \in (0, 20)$ είναι $E'(t) > 0 \Rightarrow E \nearrow [0, 20]$ και για $t \in (20, 15\sqrt{2})$ είναι

$$E'(t) < 0 \Rightarrow E \searrow [20, 15\sqrt{2}).$$

Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t = 20 \text{ sec}$.

B3. Είναι $\eta\mu\hat{A}\hat{B}\Delta = \frac{A\Delta}{AB} \Leftrightarrow \eta\mu\theta(t) = \frac{x(t)}{3\sqrt{2}}$ και

$$[\eta\mu\theta(t)]' = \left[\frac{x(t)}{3\sqrt{2}} \right]' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta(t) \cdot \theta'(t) = \frac{x'(t)}{3\sqrt{2}} = \frac{0,2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{30}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 20$ είναι

$$\sigma\upsilon\nu\theta(20) \cdot \theta'(20) = \frac{\sqrt{2}}{30} \Leftrightarrow \theta'(20) = \frac{\sqrt{2}}{30 \cdot \sigma\upsilon\nu\theta(20)}. \text{ Είναι}$$

$$x(20) = 0,2 \cdot 20 = 4 \text{ cm} \text{ και } B\Delta^2 = AB^2 - A\Delta^2 = (3\sqrt{2})^2 - 4^2 = 2 \Leftrightarrow B\Delta = \sqrt{2},$$

$$\text{οπότε } \sigma\upsilon\nu\theta(20) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \text{ και } \theta'(20) = \frac{\sqrt{2}}{30 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \text{ rad/sec}$$

B4. Είναι $E(0) = 0$, $E(20) = 0,1 \cdot 20\sqrt{32 - 0,04 \cdot 20^2} = 8$ και

$$E(15\sqrt{2}) = 0,1 \cdot 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{32 - 0,04 \cdot (15\sqrt{2})^2} = \frac{15}{10} \sqrt{2} \cdot \sqrt{32 - \frac{4}{10\theta} \cdot 45\theta} \Leftrightarrow$$

$$E(15\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{14} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = [0, 20]$ η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1) = [0, 8]$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (20, 15\sqrt{2})$ η E είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2) = (3\sqrt{7}, 8)$. Είναι $5 < 3\sqrt{7}$ γιατί $5^2 < (3\sqrt{7})^2 \Leftrightarrow 25 < 63$, οπότε το 5 περιέχεται στο $E(\Delta_1)$ και δεν περιέχεται στο $E(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t \in (0, 20)$ έτσι ώστε $E(t) = 5 \text{ cm}^2$.

Θέμα Γ

Γ1. 1^{ος} τρόπος

$$f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x \neq 0 \text{ στο } (0, \pi) f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)' = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = ce^x, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = ce^x \cdot \eta\mu x. \text{ Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ έχουμε}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}} = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow c = 1 \text{ οπότε } f(x) = e^x \cdot \eta\mu x, x \in (0, \pi).$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow f(\pi) = 0. \text{ Άρα } f(x) = e^x \cdot \eta\mu x, x \in [0, \pi].$$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} - e^x, x \in (0, \pi).$$

Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{\eta\mu x \cdot f'(x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)}{\eta\mu^2 x} - e^x = \frac{f(x) \cancel{\eta\mu x}}{\eta\mu^2 x} - e^x = g(x) \text{ οπότε}$$

$$g(x) = ce^x, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ έχουμε } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}} = ce^{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{οπότε } g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} - e^x = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\eta\mu x} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x \cdot \eta\mu x, x \in (0, \pi)$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow f(\pi) = 0. \text{ Άρα } f(x) = e^x \cdot \eta\mu x, x \in [0, \pi].$$

Γ2. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f'(x) = e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$. Για το πρόσημο της παραγώγου έχουμε :

$$f'(x) = 0 \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \text{ αφού}$$

$$x \in [0, \pi]. \text{ Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ είναι } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\eta\mu \frac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0 \text{ και για}$$

$$x = \pi \text{ είναι } f'(\pi) = e^{\pi} \cdot (\eta\mu \pi + \sigma\upsilon\nu \pi) = -e^{\pi} < 0. \text{ Επομένως } f'(x) > 0 \text{ στο}$$

$$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ και } f'(x) < 0 \text{ στο } \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right].$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ άρα η $f \nearrow$ στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, η $f \searrow$ στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$,

$$\text{Η } f \text{ έχει ολικό μέγιστο το } f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}, \text{ ολικό ελάχιστο στα σημεία } 0, \pi \text{ το}$$

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

β) Θεωρούμε τα διαστήματα $A_1 = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ και $A_2 = \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Λόγω της μονοτονίας στα παραπάνω διαστήματα έχουμε :

$$f(A_1) = \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right] \text{ και}$$

$$f(A_2) = \left[f(\pi), \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} f(x)\right] = \left[0, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right]$$

$$\text{Άρα η } f \text{ έχει σύνολο τιμών το } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[0, \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right].$$

γ) Αν $\alpha < 0$ ή $\alpha > \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $\alpha \notin f(A)$. Αν

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2} \text{ έχει μοναδική ρίζα την } x_0 = \frac{3\pi}{4}. \text{ Αν } \alpha \in \left[0, \frac{\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}\right) \text{ έχει δύο}$$

ακριβώς ρίζες αφού $\alpha \in f(A_1)$ και $\alpha \in f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in A_1, A_2$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = \alpha$. Οι ρίζες είναι μοναδικές αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα A_1, A_2 .

Γ3. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = e^{\frac{\pi}{2}}$. Αν $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της με την γραφική παράσταση της f τότε

$$f'(x_0) = e^{\frac{\pi}{2}}. \text{ Η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } [0, \pi] \text{ με}$$

$$f''(x) = e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) + e^x (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) = 2e^x \sigma\upsilon\nu x. \text{ Για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο

$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Άρα η f' παρουσιάζει

μέγιστο στο $\frac{\pi}{2}$ το $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $f'(x_0) \leq f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ με το ίσον να ισχύει μόνο

$x = \frac{\pi}{2}$. Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη με εξίσωση

$$y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y - e^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot x + e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Γ4. Για την f ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $\left[0, \frac{2\pi}{5}\right]$ και $\left[\frac{2\pi}{5}, \pi\right]$ οπότε

υπάρχουν $\xi_1 \in \left(0, \frac{2\pi}{5}\right), \xi_2 \in \left(\frac{2\pi}{5}, \pi\right)$ τέτοιοι ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{2\pi}{5}\right) - f(0)}{\frac{2\pi}{5} - 0} = \frac{f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\frac{2\pi}{5}} = \frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\pi) - f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\pi - \frac{2\pi}{5}} = -\frac{f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\frac{3\pi}{5}} = -\frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{3\pi}. \text{ Επομένως}$$

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = \cancel{2} \frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\cancel{2}\pi} - \cancel{3} \frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\cancel{3}\pi} = \frac{5f\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 5f\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{\pi} = 0.$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω ότι η πολυωνυμική έχει βαθμό n . Τότε η f' θα είναι $n-1$ βαθμού και το άθροισμα $f + f'$ θα είναι n βαθμού. Όμως το άθροισμα $f + f'$ είναι 4ου βαθμού, άρα $n = 4$. Έστω $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a \neq 0$. Είναι

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \text{ και}$$

$$f(x) + f'(x) = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25 \Leftrightarrow$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e + 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax^4 + (\beta + 4a)x^3 + (\gamma + 3\beta)x^2 + (\delta + 2\gamma)x + \varepsilon + \delta = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta + 4\alpha = 20 \\ \gamma + 3\beta = -30 \\ \delta + 2\gamma = -40 \\ \varepsilon + \delta = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -30 \\ \delta = 20 \\ \varepsilon = 5 \end{cases}. \text{ Άρα } f(x) = 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5.$$

Δ2. Είναι $f'(x) = 20x^3 - 60x + 20 = 20(x^3 - 3x + 1)$ και

$$f''(x) = 20(3x^2 - 3) = 60(x^2 - 1).$$

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$. Για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [-1, 1]$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (20x^3 - 60x + 20) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 20x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 20x^3 = +\infty, f'(-1) = 60 \text{ και } f'(1) = -20. \text{ Τα παραπάνω}$$

παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+
f'	$-\infty$	$\nearrow$ TM	$\searrow$ TE	$+\infty$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = (-\infty, 60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [-1, 1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = [-20, 60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = 0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3 = [-1, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3) = [-20, +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f'(x_3) = 0$.

Για κάθε $x < x_1 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, x_1]$. Για κάθε

$x_1 < x < -1 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [x_1, -1]$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το

$f(x_1)$. Για κάθε $-1 < x < x_2 \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) > f'(x_2) = 0 \Rightarrow f' \searrow [-1, x_2]$. Για κάθε

$x_2 < x < 1 \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) < f'(x_2) = 0 \Rightarrow f' \searrow [x_2, 1]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_2)$.

Για κάθε $1 < x < x_3 \Rightarrow f'(x) < f'(x_3) = 0 \Rightarrow f \searrow [1, x_3]$ και για κάθε

$x > x_3 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_3) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_3, +\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_3)$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
f	$+\infty$							$+\infty$

Diagram illustrating the behavior of the function f across intervals defined by critical points x_1, x_2, x_3 .

The intervals and corresponding function behavior are:

- Interval $(-\infty, x_1)$: f' is negative, f is decreasing from $+\infty$ to a local minimum.
- Interval (x_1, x_2) : f' is positive, f is increasing from a local minimum to a local maximum.
- Interval (x_2, x_3) : f' is negative, f is decreasing from a local maximum to a local minimum.
- Interval $(x_3, +\infty)$: f' is positive, f is increasing from a local minimum to $+\infty$.

The function f is labeled as TE (Turning End) at x_1 and x_3 , and TM (Turning Maximum) at x_2 .

Λ3.

$$x^4 + 4x + 1 = 6x^2 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty.$$

Είναι $x_1 < -1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(-1) = -40 < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, x_1)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$.

Είναι $x_2 < 1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(1) = 0 > 0$. Η f είναι συνεχής στο -1 , οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [x_1, x_2]$ και έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = [f(x_1), f(x_2)]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(A_2)$, υπάρχει μοναδικό ρ_2 στο εσωτερικό του A_2 τέτοιο, ώστε $f(\rho_2) = 0$.

Επειδή $f(1) = 0$, η εξίσωση έχει ρίζα το 1. Η f είναι συνεχής στο $x = 1$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = [x_2, x_3]$ και η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Είναι $x_3 > 1 \Leftrightarrow f(x_3) < f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_4 = [x_3, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_4) = [f(x_3), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_4)$, η f έχει ρίζα ρ_3 στο A_4 . Τελικά η f έχει τέσσερις ρίζες.

Ακέραια ρίζα της f είναι το 1. Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι

διαιρέτες του 1, δηλαδή ± 1 . Είναι $f(-1) = -40 \neq 0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα.

Δ4. Τα κοινά σημεία των C_h, C_g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ άρα τα $\{p_1, p_2, p_3\}$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x = p_1$ πρέπει

$h'(p_1) = g'(p_1) \Leftrightarrow h'(p_1) - g'(p_1) = 0 \Leftrightarrow f'(p_1) = 0$, που είναι άτοπο. Όμοια για τις $x = p_2, x = 1$ και $x = p_3$. Άρα δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

Δ5. Έχουμε: $f(x) = g(x) - 6 \Leftrightarrow f(x) - g(x) + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5 - x^4 - 4x - 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^4 - 30x^2 + 16x + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(4x^3 + 4x^2 - 26x - 10) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x^3 + 4x^2 - 26x - 10 = 0$$

Έστω

$$t(x) = 4x^3 + 4x^2 - 26x - 10, x \in [1, 3]. \text{ Είναι}$$

$$t(1) = -28 < 0, t(3) = 108 + 36 - 78 - 10 = 56 > 0, \text{ δηλαδή } t(1)t(3) < 0 \text{ και}$$

επειδή η t είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως πολυωνυμική, λόγω του Θ. Bolzano, η εξίσωση $t(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 - 26x - 10 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 3)$.

4	0	-30	16	10	ρ=1
↓	4	4	-26	-10	
4	4	-26	-10	0	

30

Κυρτότητα – Σημεία Καμψής

19.

x	-3	-2	-1	1	3	5	7
f'	+	+	-	-	+	+	
f'	↗	↘	↘	↗	↗	↗	↘
f							

Τοπικά ελάχιστα τα $f(-3)$, $f(3)$. Τοπικά μέγιστα τα $f(-1)$, $f(7)$ και σημεία καμψής τα $(-2, f(-2))$, $(1, f(1))$, $(5, f(5))$.

20. α) Ο μαθητής κάνει λάθος καθώς το ότι η C_f βρίσκεται κάτω από μία εφαπτομένη της δεν σημαίνει ότι η f είναι κοίλη.

β) Αν ήταν κοίλη στο πεδίο ορισμού της τότε η C_f θα ήταν κάτω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση τα σημεία στα οποία εφάπτεται. Η ε_2 όπως φαίνεται τέμνει σε δύο σημεία την C_f και μόνο στο ένα εφάπτεται. Επομένως δεν είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

21. α) $f'(x) = 4x^3 - 12x + 7$, $f''(x) = 12x^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 1$. Η f είναι κυρτή στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, κοίλη στο $[-1, 1]$ και έχει σημεία καμψής τα $(-1, f(-1)) \equiv (-1, -14)$ και $(1, f(1)) \equiv (1, 0)$.

β) $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμψής.

$$\gamma) f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 2) - (2e^x + 1)e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{-5e^x}{(e^x - 2)^2}, f''(x) = \frac{5e^{2x} + 10e^x}{(e^x - 2)^3}, x \neq \ln 2.$$

Η f είναι κυρτή στο $(\ln 2, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, \ln 2)$.

22. α) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Για $x < 0$ είναι $f'(x) = -4x - 3x^2$ και για $x > 0$ είναι $f'(x) = 8x - 3x^2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x^2 - x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(-2 - x)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 - x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2(4 - x)}{x} = 0, \text{ άρα } f'(0) = 0. \text{ Για κάθε}$$

$x < 0$ είναι $f''(x) = -4 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}$. Η f είναι κυρτή στο $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) = 8 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}$.

Η f είναι κυρτή στο $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$. Σημεία καμπής τα $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right), (0, 0), \left(\frac{4}{3}, \frac{128}{27}\right)$.

β) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 6 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -4, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -4$, άρα $f'(0) = -4$. Είναι

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \leq 0 \\ 3x^2 - 12x - 4, & x > 0 \end{cases}$. Είναι $f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 6x - 12, & x > 0 \end{cases}$. Η f είναι κυρτή

στο $(-\infty, 0]$ και στο $[2, +\infty)$ και κοίλη στο $[0, 2]$. Έχει σημεία καμπής τα $(0, 6), (2, -18)$

23. $f'(x) = \ln(x-1) + 1 - \ln x - 1 = \ln(x-1) - \ln x$. Είναι $f''(x) = \frac{1}{x(x-1)} > 0$

οπότε η f είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

24. α) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$.

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (e, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

β) $f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e\sqrt{e}$. Για κάθε $x \in (0, e\sqrt{e})$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x \in (e\sqrt{e}, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $(0, e\sqrt{e}]$ και κυρτή στο $[e\sqrt{e}, +\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $\left(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \frac{1}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{DLH} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$. Στο $\Delta_1 = (0, e)$

είναι $f(\Delta_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$ και στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$ είναι $f(\Delta_2) = \left(0, \frac{1}{e}\right]$ άρα

$$f(A) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right) \cup \left(0, \frac{1}{e}\right] = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right] .$$

$$25. \quad g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} > 0 \Rightarrow g \cup [a, \beta]$$

$$26. \alpha) \quad f'(x) = 2\lambda x - 2 \ln x - 2, \quad f''(x) = 2\lambda - \frac{2}{x} = \frac{2\lambda x - 2}{x} \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2\lambda x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \geq \frac{1}{\lambda}. \text{ Για κάθε } x < \frac{1}{\lambda} \text{ είναι } f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ κοίλη στο } \left(-\infty, \frac{1}{\lambda}\right] \text{ και για κάθε}$$

$$x > \frac{1}{\lambda} \text{ είναι } f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ κυρτή στο } \left[\frac{1}{\lambda}, +\infty\right).$$

$$\beta) \varepsilon: \quad y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \lambda = (2\lambda - 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = (2\lambda - 2)x + 2 - \lambda .$$

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πρέπει

$$0 = (2 - \lambda) \cdot 0 + 2 - \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Αυξημένης δυσκολίας

27. α) Αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο A τότε η f'' έχει πεδίο ορισμού το A και επομένως οι $\frac{1}{f''}$ και $\sqrt{f''}$ ορίζονται σε υποσύνολο του A .

Έστω ότι $C_f \equiv C_2$ τότε η $\frac{1}{f''}$ θα παριστάνεται από την C_3 , η οποία ορίζεται σε υποσύνολο του $A = \mathbb{R} - \{1\}$. Τότε και η $\sqrt{f''}$ θα πρέπει να ορίζεται σε υποσύνολο του A πράγμα που δεν συμβαίνει ούτε στην C_1 ούτε στην C_4 . Άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Έστω ότι $C_f \equiv C_3$ τότε η $\frac{1}{f''}$ θα παριστάνεται από την C_2 , η οποία ορίζεται σε υποσύνολο του $A = \mathbb{R} - \{1\}$. Τότε ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο γιατί η $\sqrt{f''}$ θα πρέπει να ορίζεται σε υποσύνολο του A πράγμα που δεν συμβαίνει. Έστω ότι $C_f \equiv C_4$ τότε καταλήγουμε σε άτοπο αφού οι υπόλοιπες γραφικές δεν ορίζονται σε υποσύνολο του $A = [1, +\infty)$. Επομένως είναι $C_f \equiv C_1$.

β) Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό άρα $f''(1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{f''(1)} = 0$. Επομένως η $\sqrt{f''}$ μπορεί να παριστάνεται μόνον από την C_4 .

γ) Έστω ότι η $\frac{1}{f''}$ παριστάνεται από την C_3 τότε $\frac{1}{f''(x)} > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ για κάθε $x \neq 1$ και f' συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη άρα $f' \in \mathcal{C}^1$, δηλαδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Τότε για κάθε $x \neq 1$ η C_f βρίσκεται πάνω από την (ε) πράγμα άτοπο. Άρα τελικά η $\frac{1}{f''}$ παριστάνεται από την C_2 .

28. α) $f'(x) = e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$, $f''(x) = 2e^x \sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f''(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $f''(x) < 0$,

επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, είναι κυρτή στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και κοίλη στο

$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Η f έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

β) Είναι $f'(x) = 2e^x \sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x) = 2e^x (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ είναι $f''(x) \neq 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής,

διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$.

Είναι $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) > 0$, άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και

επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

Είναι $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} < 0$, άρα $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ και επειδή η f

είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Η f έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\right)$.

γ) Είναι $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4^x}{\ln^2 4} - \frac{4^{-x}}{\ln^2 4} + 2\eta\mu x$.

$f'(x) = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{4^{-x}}{\ln 4} + 2\sigma\upsilon\nu x$, $f''(x) = \frac{4^x \ln 4}{\ln 4} - \frac{4^{-x} \ln 4}{\ln 4} - 2\eta\mu x = 4^x - 4^{-x} - 2\eta\mu x$

$$f^{(3)}(x) = 4^x \ln 4 + 4^{-x} \ln 4 - 2 \sin x = \ln 4 \left(4^x + \frac{1}{4^x} \right) - 2 \sin x \quad \text{όμως}$$

$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

$$\text{οπότε } \ln 4 \left(4^x + \frac{1}{4^x} \right) - 2 \leq \ln 4 \left(4^x + \frac{1}{4^x} \right) - 2 \sin x \leq \ln 4 \left(4^x + \frac{1}{4^x} \right) + 2$$

$$\text{Δηλαδή } f^{(3)}(x) \geq \ln 4 \left(4^x + \frac{1}{4^x} \right) - 2 > 1 \left(4^x + \frac{1}{4^x} \right) - 2 = \left(2^x - \frac{1}{2^x} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow f'' \nearrow \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και για κάθε

$x > 0 \Leftrightarrow f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[0, +\infty)$. Σημείο καμπής το $(0, 0)$.

29. Για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \frac{\ln x - \frac{x-1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1 + \frac{1}{x}}{\ln^2 x}. \text{ Είναι } \ln^2 x > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Γνωρίζουμε ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για

$$x = 1, \text{ άρα για } x \text{ το } \frac{1}{x} \text{ είναι } \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow \ln x - 1 + \frac{1}{x} \geq 0 \text{ για}$$

κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Άρα είναι

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Από εδώ και πέρα θα εργαστούμε με δύο διαφορετικούς τρόπους:

1ος τρόπος: (Χρήση ορισμού κυρτότητας)

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 = f'(1) \text{ άρα η } f' \text{ είναι συνεχής στο}$$

$x_0 = 1$, άρα $f' \nearrow (0, +\infty)$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

2ος τρόπος: (Χρήση του θεωρήματος)

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{\ln x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{x \ln x - \ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} \text{ άρα } f''(1) = \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

30. Είναι $(f(x-1))' = (f(3-x))' \Leftrightarrow f'(x-1) = -f'(3-x)$ και για $x=2$:
 $f'(1) = -f'(1) \Leftrightarrow 2f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$. $f \cap \mathbb{R} \Leftrightarrow f' \searrow \mathbb{R}$, οπότε για κάθε
 $x < 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 1]$ και για
 $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(1)$.

31. Είναι $\ln x \leq x-1 < x \Leftrightarrow x-\ln x > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $D_f = (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x-\ln x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{x-1}{x^2-x\ln x}, \quad f''(x) = \frac{-x^2-\ln x+3x-1}{(x^2-x\ln x)^2}$$

Έστω $g(x) = -x^2 - \ln x + 3x - 1, x > 0$. Είναι $g'(x) = \frac{(x-1)(-2x+1)}{x}$,

$$g \searrow \left(0, \frac{1}{2} \right], \nearrow \left[\frac{1}{2}, 1 \right], \searrow [1, +\infty) . g \left(\left(0, \frac{1}{2} \right) \right) = \left[\frac{1}{4} + \ln 2, +\infty \right) , \text{ άρα } g(x) > 0 \Rightarrow$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup \left(0, \frac{1}{2} \right] . g \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) = \left[\frac{1}{4} + \ln 2, 1 \right] , \text{ άρα } g(x) > 0 \Rightarrow$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right] . \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(-1 - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right] = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 , \text{ άρα } g((1, +\infty)) = (-\infty, 1) .$$

$0 \in g((1, +\infty))$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 > 1 : g(x_1) = 0$. Για κάθε

$$1 < x < x_1 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_1) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup [1, x_1] \text{ και για κάθε}$$

$$x > x_1 \stackrel{g \searrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x_1) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap [x_1, +\infty) . \text{ Η } f \text{ έχει μοναδικό σημείο καμπής το } (x_1, f(x_1)) .$$

32. α) $f(x) = \ln \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right) = \ln(2^x + 3^x) - \ln 2$, Είναι $f'(x) = \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{2^x + 3^x}$

και $f''(x) = \frac{2^x \cdot 3^x \left[(\ln 2 - \ln 3)^2 + \ln 2 \cdot \ln 3 \right]}{(2^x + 3^x)^2} > 0 \Rightarrow f$ κυρτή.

β) Έστω $g(x) = f(x) - \lambda x, x \in \mathbb{R}$. Είναι $f(x) \geq \lambda x \Leftrightarrow f(x) - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$, άρα η g έχει ελάχιστο στο $x=0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - \lambda = \frac{2^x \ln 2 + 3^x \ln 3}{2^x + 3^x} - \lambda$, από το θ.Fermat ισχύει ότι:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 6}{2}.$$

33.α) Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\pi, 0)$ με $f'(x) = -\sin x - 1$ και $f''(x) = -\eta\mu x < 0$ για κάθε $x \in (-\pi, 0)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\pi, 0]$. Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f'(x) = \sin x + 1$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = -\eta\mu x < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ άρα η g είναι κοίλη στο $[0, \pi)$.

β) Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Η C_f έχει εφαπτομένη στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ την

$$(\varepsilon): y - 1 - \frac{\pi}{2} = x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Για $x \in (-\pi, 0)$: $f(x) = x + 1 \Leftrightarrow -\eta\mu x - x = x + 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + 2x + 1 = 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x) = \eta\mu x + 2x + 1$, $-\pi \leq x \leq 0$

Η k είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-\pi, 0)$ με παράγωγο $k'(x) = \sin x + 2 > 0$ για κάθε $x \in (-\pi, 0)$, άρα η k είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$. Είναι $k(-\pi) = -2\pi + 1 < 0$, $k(0) = 1 > 0$ άρα από θεώρημα Bolzano και αφού k γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $k(x_1) = 0$. Για $x \in [0, \pi)$ αφού η f είναι κοίλη και η είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ τότε ισχύει $f(x) \leq x + 1$ για κάθε $x \in [0, \pi)$ με την ισότητα να

ισχύει μόνον για $x = \frac{\pi}{2}$. Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και της (ε) έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

γ) Έστω ότι η (ε) εφάπτεται στην C_f και σε άλλο σημείο $x_1 \neq \frac{\pi}{2}$. Τότε με βάση το προηγούμενο ερώτημα αυτό θα συμβαίνει στο σημείο $x_1 \in (-\pi, 0)$.

Θα είναι λοιπόν $f'(x_1) = \frac{1}{2}$ πράγμα αδύνατο γιατί $f'(x) = -\sin x - 1 < 0$

αφού στο διάστημα αυτό είναι $\sin x > 0$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

δ) 1^{ος} τρόπος: Αν η f ήταν κοίλη στο πεδίο ορισμού της τότε για κάθε x του

πεδίου ορισμού θα πρέπει να ισχύει $f(x) \leq x+1$ με την ισότητα να ισχύει

μόνον για $x = \frac{\pi}{2}$, που είναι το σημείο στο οποίο εφάπτεται, πράγμα άτοπο

καθώς έχουν κι άλλο κοινό σημείο.

2^{ος} τρόπος: Για $x_1 \in (-\pi, 0)$ είναι $f'(x_1) = -\sin x_1 - 1 < 0$ γιατί $\sin x_1 > 0$ και για $x_2 \in (0, \pi)$ είναι $f'(x_2) = \sin x_2 + 1 > 0$ γιατί $\sin x_2 > 0$. Άρα $g'(x_1) < g'(x_2)$, οπότε η g' δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της άρα δεν είναι κοίλη σε αυτό.

34. Έστω ότι η g έχει σημείο καμπής στο $x = x_0$, τότε επειδή η g είναι δύο

φορές παραγωγίσιμη, ισχύει ότι $g''(x_0) = 0$. Είναι $(g(x)g'(x))' = (2)' \Leftrightarrow$

$(g'(x))^2 + g(x)g''(x) = 0$ και για $x = x_0$ είναι $(g'(x_0))^2 + g(x_0)g''(x_0) = 0 \Leftrightarrow g'(x_0) = 0$. Αντικαθιστώντας $x = x_0$ στην αρχική έχουμε:

$g(x_0) \cancel{g'(x_0)}^0 = 2 \Leftrightarrow 0 = 2$ που είναι άτοπο.

35. Έστω ότι η g έχει σημείο καμπής στο $x = x_0$, τότε επειδή η g είναι δύο

φορές παραγωγίσιμη, ισχύει ότι $g''(x_0) = 0$. Παραγωγίζοντας προκύπτει

$$2g(x)g'(x) + g(x) + xg'(x) + 2x = 0 \text{ και}$$

$$2(g'(x))^2 + 2g(x)g''(x) + 2g'(x) + xg''(x) + 2 = 0. \text{ Για } x = x_0 \text{ έχουμε}$$

$$2(g'(x_0))^2 + 2g(x_0)g''(x_0) + 2g'(x_0) + x_0g''(x_0) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(g'(x_0))^2 + g'(x_0) + 1 = 0 \text{ που είναι αδύνατη } (\Delta < 0).$$

36. Είναι $x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f''(x) = -\frac{xe^{f(x)}}{x^2 + x + 1}$. Για κάθε

$x < 0$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap [0, +\infty)$.

Σημείο καμπής το $(0, f(0))$.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
f''	+		-		+
f	↗		↘		↗

37. α) $f'(x) = -4xe^{-x^2}$. Για

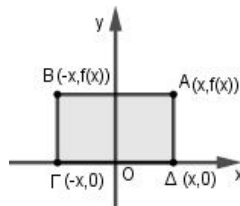
$x < 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$ και για $x > 0$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 2$.

β) $f''(x) = 4xe^{-x^2} (2x^2 - 1)$

Η f έχει ΣΚ τα $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

γ) Για να είναι ορθογώνιο πρέπει οι άλλες δύο κορυφές να έχουν της ίδια τεταγμένη. Επειδή $f(-x) = f(x)$ (f άρτια) οι άλλες δύο κορυφές έχουν αντίθετες τεταγμένες. Έστω $A(x, f(x))$, $x > 0$ και $B(-x, f(x))$.



Τότε $E = (AB) \cdot (AD) = 2x \cdot 2e^{-x^2} = 4xe^{-x^2}$. Έστω

$E(x) = 4xe^{-x^2}$, $x > 0$. Είναι $E'(x) = 4(1 - 2x^2)e^{-x^2}$. Για κάθε $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

είναι $E'(x) > 0 \Rightarrow E \nearrow \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και για $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι

$E'(x) < 0 \Rightarrow E \searrow \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Μέγιστο για $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, τότε τα A και A' είναι τα σημεία καμπής.

38. Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$, είναι $f(0) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 9f\left(\frac{2}{3}x\right) - 8f\left(\frac{3}{4}x\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x) = 9f'\left(\frac{2}{3}x\right) \frac{2}{3} - 8f'\left(\frac{3}{4}x\right) \frac{3}{4} = 6\left[f'\left(\frac{2}{3}x\right) - f'\left(\frac{3}{4}x\right)\right]$.

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x < 0$ είναι $\frac{2}{3}x > \frac{3}{4}x \Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right) > f'\left(\frac{3}{4}x\right) \Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right) - f'\left(\frac{3}{4}x\right) > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow$

$h \nearrow (-\infty, 0]$. Για κάθε $x > 0$ είναι $\frac{2}{3}x < \frac{3}{4}x \Leftrightarrow f'\left(\frac{2}{3}x\right) < f'\left(\frac{3}{4}x\right) \Leftrightarrow$

$f'\left(\frac{2}{3}x\right) - f'\left(\frac{3}{4}x\right) < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [0, +\infty)$. Η h έχει μέγιστο το

$h(0) = 0$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow 9f\left(\frac{2}{3}x\right) - 8f\left(\frac{3}{4}x\right) \leq 0 \Leftrightarrow$

$9f\left(\frac{2}{3}x\right) \leq 8f\left(\frac{3}{4}x\right)$.

39. α) Επειδή $3f^2(x) - 6f(x) + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta = -24 < 0$ είναι

$f'(x) > 0$. Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[α, β]$ υπάρχει $ξ \in (α, β)$:

$$f'(ξ) = \frac{f(β) - f(α)}{β - α} = \frac{2f(α) - f(α)}{β - α} = \frac{f(α)}{β - α} \text{ και αφού } f'(ξ) > 0 \text{ τότε } \frac{f(α)}{β - α} > 0$$

άρα $f(α) > 0$.

β) i. Αφού η f παραγωγίσιμη τότε $3f^2(x) - 6f(x) + 5$ παραγωγίσιμη άρα και f' παραγωγίσιμη με $f''(x) = 6f(x)f'(x) - 6f'(x) = 6f'(x)(f(x) - 1)$. Αφού $f'(x) > 0$ τότε $f' \nearrow$ για $x \geq α$, $f(x) \geq f(α) > 1$ άρα $f(x) - 1 > 0$ οπότε $f''(x) > 0$ άρα f κυρτή.

ii. Έστω ότι υπάρχει $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ συνευθειακά τότε:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \text{ Από Θ.Μ.Τ. στα } [x_1, x_2], [x_2, x_3] \text{ προκύπτει}$$

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και από το θ. Rolle για f' στο $[\xi_1, \xi_2]$ προκύπτει $f''(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

Εύρεση παραμέτρων μέσω κυρτότητας και σημείων

$$40. f'(x) = 4(\alpha - 3)x^3 - 12x^2 - 12x, f''(x) = 12(\alpha - 3)x^2 - 24x - 12 = 12((\alpha - 3)x^2 - 2x - 1),$$

Αν $\alpha = 3$ τότε $f''(x) = 12(-2x - 1)$, $f \cup \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, $f \cap \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ απορρίπτεται

Αν $\alpha \neq 3$, $\Delta = 4 + 4(\alpha - 3) = 4(\alpha - 2)$.

Αν $\alpha \in (2, 3) \cup (3, +\infty)$ τότε $\Delta > 0$, η f'' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, άρα η f δεν είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Αν $\alpha = 2$ τότε

$f''(x) = 12(-x^2 - 2x - 1) = -12(x + 1)^2 < 0$ για κάθε $x \neq 1$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$. Αν $\alpha < 2$ τότε $\Delta < 0$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap \mathbb{R}$.

Τελικά $\alpha \leq 2$.

41. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{\alpha}{x} - \frac{1}{x^2}$ και

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2 - \alpha x}{x^3}. f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \alpha x}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \alpha x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{\alpha}.$$

$f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{2}{\alpha}\right)$ άρα η f είναι κυρτή στο $\left(0, \frac{2}{\alpha}\right]$ και $f''(x) < 0$

για κάθε $x \in \left(\frac{2}{\alpha}, +\infty\right)$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left[\frac{2}{\alpha}, +\infty\right)$. Η f έχει σημείο καμπής το $A\left(\frac{2}{\alpha}, f\left(\frac{2}{\alpha}\right)\right)$ ή $A\left(\frac{2}{\alpha}, \alpha \ln \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία ε : $y - f\left(\frac{2}{\alpha}\right) = f'\left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(x - \frac{2}{\alpha}\right) \Leftrightarrow y - \left(\alpha \ln \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha^2}{4}\left(x - \frac{2}{\alpha}\right) \Leftrightarrow y = \frac{\alpha^2}{4}x + \alpha \ln \frac{2}{\alpha}$. Για να διέρχεται η ε από το σημείο M πρέπει $0 = \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{4}{\alpha} + \alpha \ln \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow 0 = \alpha + \alpha \ln \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\left(\ln \frac{2}{\alpha} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ που είναι αδύνατο ή $\ln \frac{2}{\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{2}{\alpha} = -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} = e^{-1} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha = 2e$.

42. Πρέπει $f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta - 1 + 2 = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0$ (1)

Είναι $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x - 1$, $f''(x) = 12x^2 + 6\alpha x + 2\beta$.

Πρέπει $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 12 + 6\alpha + 2\beta = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = -6$ (2). Από τις (1), (2)

προκύπτει ότι: $\alpha = -3$ και $\beta = 3$. Τότε $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + 2$,

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$, $f''(x) = 12x^2 - 18x + 6 = 12\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$ ή $x \geq 1$. Η f είναι κυρτή σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$,

$[1, +\infty)$ και κοίλη στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Έχει σημεία καμπής στα $x = 0$ και $x = 1$.

43. $f'(x) = 3x^2 - 4\alpha x$, $f''(x) = 6x - 4\alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2\alpha}{3}$.

Για κάθε $x < \frac{2\alpha}{3}$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{2\alpha}{3}\right)$ και για κάθε

$x > \frac{2\alpha}{3}$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\left[\frac{2\alpha}{3}, +\infty\right)$. Σημείο καμπής το

$\left(\frac{2\alpha}{3}, f\left(\frac{2\alpha}{3}\right)\right)$. Επειδή το $A(x_0, y_0)$ είναι σημείο καμπής της C_f , ισχύει ότι

$x_0 = \frac{2\alpha}{3}$. Είναι $g'(x) = 2x - (\alpha + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\alpha + 1}{2}$. Για κάθε $x < \frac{\alpha + 1}{2}$ είναι

$$g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow \left(-\infty, \frac{\alpha+1}{2} \right] \text{ και για κάθε } x > \frac{\alpha+1}{2} \text{ είναι}$$

$$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow \left[\frac{\alpha+1}{2}, +\infty \right). \text{ Ελάχιστο για } x = \frac{\alpha+1}{2}. \text{ Πρέπει}$$

$$\frac{\alpha+1}{2} = \frac{2\alpha}{3} \Leftrightarrow 3\alpha+3=4\alpha \Leftrightarrow \alpha=3 \text{ και } g(2)=-13 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \beta=2.$$

44. $f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta$, $f''(x) = 12\alpha x^2 + 6\beta x + 2\gamma$. Η f'' είναι τριώνυμο και έχει διακρίνουσα $\Delta = 36\beta^2 - 96\alpha\gamma = 12(3\beta^2 - 8\alpha\gamma)$. Επειδή η C_f έχει δύο σημεία καμπής, η f'' έχει 2 ρίζες, άρα

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12(3\beta^2 - 8\alpha\gamma) > 0 \Leftrightarrow 3\beta^2 - 8\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > \frac{8}{3}\alpha\gamma.$$

Γεωμετρικός τύπος σημείου καμπής

45. $f'(x) = 3x^2 + 6x\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha$, $f''(x) = 6x + 6\sigma\upsilon\nu 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

Για κάθε $x < -\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty, -\sigma\upsilon\nu 2\alpha]$ και για

κάθε $x > -\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[-\sigma\upsilon\nu 2\alpha, +\infty)$. Σημείο

καμπής το $A(-\sigma\upsilon\nu 2\alpha, f(-\sigma\upsilon\nu 2\alpha)) \equiv (-\sigma\upsilon\nu 2\alpha, 7\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - 1)$. Επειδή

$$y_A = -7x_A^2 - 1, \text{ το } A \text{ ανήκει στη παραβολή } y = -7x^2 - 1.$$

46. $f'(x) = 6x - 6e^{x-\alpha}$, $f''(x) = 6 - 6e^{x-\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} \leq 1 \Leftrightarrow x - \alpha \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \alpha$.

Για κάθε $x < \alpha$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $(-\infty, \alpha]$ και για κάθε $x > \alpha$

είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $[\alpha, +\infty)$.

Σημείο καμπής το $M(\alpha, f(\alpha)) \equiv (\alpha, 3\alpha^2 - 6)$.

Είναι $x_M = \alpha$, $y_M = 3\alpha^2 - 6 = 3x_M^2 - 6$, άρα ο γεωμετρικός τύπος του M είναι η παραβολή $y = 3x^2 - 6$.

47. $f'(x) = 2\lambda e^x - 2x$, $f''(x) = 2\lambda e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow x \geq -\ln \lambda$. Για κάθε

$x < -\ln \lambda$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty, -\ln \lambda]$ και για κάθε $x > -\ln \lambda$

είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[-\ln \lambda, +\infty)$. Σημείο καμπής το

$$M(-\ln \lambda, f(-\ln \lambda)) \equiv (-\ln \lambda, 2 - \ln^2 \lambda).$$

Είναι $x_M = -\ln \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda = -x_M$ και $y_M = 2 - \ln^2 \lambda = 2 - x_M^2$, άρα ο γ. τύπος του M είναι η παραβολή $y = 2 - x^2$.

Κυρτότητα και Θ.Μ.Τ.

48. α) $f'(x) = 4xe^x + 2x^2e^x$, $f''(x) = 2(x^2 + 4x + 2)e^x$. Για κάθε $x < -2 - \sqrt{2}$

ή $x > -2 + \sqrt{2}$ είναι $f''(x) > 0$ άρα η f είναι κυρτή σε καθένα από τα

διαστήματα $(-\infty, -2 - \sqrt{2})$, $[-2 + \sqrt{2}, +\infty)$ και για κάθε

$x \in (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap [-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}]$.

β) Για $x > 0$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0, +\infty)$. Από το Θ.Μ.Τ. για την f στο

$[x, x+1]$ υπάρχει $\xi \in (x, x+1) : f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

$x < \xi < x+1 \Rightarrow f'(\xi) < f'(x+1)$, άρα $f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

49. α) Είναι $f'(x) = \ln x + 1$ και $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ και παραγωγίσιμη

στα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$. Λόγω του θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχουν

$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} \ln \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha \ln \alpha}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\beta \ln \beta - \frac{\alpha+\beta}{2} \ln \frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta - \alpha}{2}}. \text{ Είναι } \xi_1 < \xi_2 \text{ και η } f' \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα (f κυρτή) άρα $f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{\frac{\alpha+\beta}{2} \ln \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha \ln \alpha}{\frac{\beta - \alpha}{2}} <$

$$\frac{\beta \ln \beta - \frac{\alpha+\beta}{2} \ln \frac{\alpha+\beta}{2}}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} \ln \frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha \ln \alpha < \beta \ln \beta - \frac{\alpha+\beta}{2} \ln \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$2 \frac{\alpha+\beta}{2} \ln \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \ln \beta + \alpha \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta) \ln \frac{\alpha+\beta}{2} < \ln \beta^\beta + \ln \alpha^\alpha \Leftrightarrow \ln \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right)^{\alpha+\beta} < \ln \beta^\beta \alpha^\alpha \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right)^{\alpha+\beta} < \beta^\beta \alpha^\alpha.$$

50. α) Για να ορίζεται η f πρέπει $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα $A_f = (1, +\infty)$.

Είναι $f'(x) = \frac{1}{\ln x} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln x} > 0$ για κάθε $x > 1$, άρα η f είναι γνησίως

αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Είναι $f''(x) = -\frac{1}{(x \ln x)^2} (x \ln x)' = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$ για κάθε $x > 1$, άρα η f είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$.

β) Αν $\alpha < \beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right]$,

$\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$, λόγω του

θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2} \right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta \right)$

$$\text{τέτοια, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{\ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \ln(\ln \alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\ln(\ln \beta) - \ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}.$$

Είναι $1 < \alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα:

$$f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \ln(\ln \alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} > \frac{\ln(\ln \beta) - \ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \ln(\ln \alpha) > \ln(\ln \beta) - \ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$2 \ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\ln \alpha) + \ln(\ln \beta) \Leftrightarrow \ln\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 > \ln(\ln \alpha \ln \beta) \Leftrightarrow$$

$$\left(\ln \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 > \ln \alpha \ln \beta \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\ln \alpha \ln \beta}$$

Όμοια αν $\alpha > \beta$, προκύπτει ότι $\ln \frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\ln \alpha \ln \beta}$.

Τέλος αν $\alpha = \beta$, τότε $\ln \frac{2\alpha}{2} \geq \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \alpha} \Leftrightarrow \ln \alpha \geq \sqrt{\ln^2 \alpha}$ που ισχύει

$$51. \alpha) f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$$

$$\beta) f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}.$$

γ) Έστω $g(x) = xf'(x) - f(x) - \ln 2, x \geq 0$

$$g'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) = xf''(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [0, +\infty).$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) - \ln 2 < 0$

δ) Από το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = f(x+1) - f(x).$$

$$x < \xi < x+1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) > f'(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x+1} + 1} < f(x+1) - f(x) < \frac{1}{e^x + 1}$$

52. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$. Για κάθε $x \in (0, 1)$

είναι $f'(x) < 0$, άρα $f \searrow (0, 1]$. Για $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα

$f \nearrow [1, +\infty)$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$. Όταν $x \in (0, e)$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0, e]$. Όταν $x \in (e, +\infty)$ είναι $f''(x) < 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[e, +\infty)$.

β) $x(\ln^2 x - 1) - 2(x - e) \ln x > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - 1}{x - e} > \frac{2 \ln x}{x}$. Η f είναι συνεχής στο

$[e, x]$, $x > e$ και παραγωγίσιμη στο (e, x) με $f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$. Λόγω του

θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $x_0 \in (e, x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \frac{\ln^2 x - 1}{x - e}. \text{ Είναι } e < x_0 < x \text{ και η } f' \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στο $[e, +\infty)$, άρα $f'(x_0) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x - 1}{x - e} > \frac{2 \ln x}{x}$.

$$53. \alpha) f'(x) = 2x - \frac{32}{x} = \frac{2x^2 - 32}{x} \geq 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 2x^2 - 32 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Η f είναι $\searrow$ στο $(0, 4]$ και $\nearrow[4, +\infty)$. Είναι $f''(x) = 2 + \frac{32}{x^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0 + \infty)$.

β) Από το Θ.Μ.Τ για την f , υπάρχουν $\xi_1 \in (4, 5)$ και $\xi_2 \in (5, 6)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = f(5) - f(4) \text{ και } f'(\xi_2) = f(6) - f(5).$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(5) - f(4) < f(6) - f(5) \Leftrightarrow 2f(5) < f(4) + f(6).$$

54. Επειδή η f στρέφει κοίλα άνω στο $[a, \beta]$, η f' είναι $\nearrow$ στο διάστημα αυτό.

Από το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχουν $\xi_1 \in (a, \gamma)$ και $\xi_2 \in (\gamma, \beta)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} = -\frac{f(a)}{\gamma - a} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma}.$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f(a)}{\gamma - a} < \frac{f(\beta)}{\beta - \gamma} \Leftrightarrow -f(a)(\beta - \gamma) < f(\beta)(\gamma - a) \Leftrightarrow$$

$$f(\beta)(\gamma - a) + f(a)(\beta - \gamma) > 0.$$

55. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0, 5]$, η f' είναι $\searrow$ στο

διάστημα αυτό. Από το Θ.Μ.Τ για την f , υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 5)$

$$\text{τέτοια, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = -\frac{f(0)}{2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(2)}{3} = \frac{f(5)}{3}.$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{f(0)}{2} > \frac{f(5)}{3} \Leftrightarrow -3f(0) > 2f(5) \Leftrightarrow$$

$$2f(5) + 3f(0) < 0.$$

56. Είναι $f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0$ και $f' \cup \Rightarrow f'' \nearrow [\alpha, \beta]$. Λόγω Θ.Μ.Τ., για την f'

$$\text{υπάρχει } \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right): f''(\xi_1) = \frac{f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f'(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} = -\frac{2f'(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ και όμοια}$$

υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) : f''(\xi_2) = \frac{2f'(\beta)}{\beta-\alpha}$. Είναι $\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow$

$$f''(\xi_1) < f''(\xi_2) \Leftrightarrow -\frac{2f'(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{2f'(\beta)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow f'(\alpha) + f'(\beta) > 0.$$

57. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\nearrow$ στο I . Από το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$. Είναι

$$x < \xi < x+1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1).$$

58. 1ος τρόπος: Έστω $g(x) = f(x) - x, x \in [-\alpha, \alpha]$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για

$$\text{την } f, \text{ υπάρχει } \xi \in (-\alpha, \alpha) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)} = \frac{2\alpha}{2\alpha} = 1.$$

Είναι $g'(x) = f'(x) - 1 = f'(x) - f'(\xi)$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε για κάθε $-\alpha < x < \xi$ είναι

$f'(x) < f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[-\alpha, \xi]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\xi < x < \alpha$ είναι

$f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[\xi, \alpha]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει τοπικά μέγιστα τα

$g(-\alpha) = g(\alpha) = 0$, οπότε έχει μέγιστο το και ισχύει ότι

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - x < 0 \Leftrightarrow f(x) < x \text{ για κάθε } x \in (-\alpha, \alpha).$$

2ος τρόπος: Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (-\alpha, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \geq x_0$. Από το Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi_1 \in (-\alpha, x_0)$ και $\xi_2 \in (x_0, \alpha)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(-\alpha)}{x_0 + \alpha} = \frac{f(x_0) + \alpha}{x_0 + \alpha} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha) - f(x_0)}{\alpha - x_0} = \frac{\alpha - f(x_0)}{\alpha - x_0}.$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\nearrow$ στο $[-\alpha, \alpha]$, οπότε:

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) + \alpha}{x_0 + \alpha} < \frac{\alpha - f(x_0)}{\alpha - x_0} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - x_0)f(x_0) + \cancel{\alpha x_0} - \alpha x_0 < \cancel{\alpha x_0} + \alpha x_0 - (x_0 + \alpha)f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - x_0)f(x_0) + (x_0 + \alpha)f(x_0) < 2\alpha x_0 \Leftrightarrow (\alpha - \cancel{x_0} + \cancel{x_0} + \alpha)f(x_0) < 2\alpha x_0 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha f(x_0) < 2\alpha x_0 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} f(x_0) < x_0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

59. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο I η f' είναι γνησίως

φθίνουσα. Ακόμη επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $O(0,0)$ ισχύει ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=0$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1, x]$, $x > 1$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) = (x - 1)f'(\xi_1) + f(1). \text{ Είναι}$$

$$0 < 1 < \xi_1 < x \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(0) > f'(1) > f'(\xi_1) > f'(x) \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(1) < 0$$

$$f(x) = (x - 1)f'(\xi_1) + f(1) < (x - 1)f'(1) + f(1)$$

Επειδή η f είναι κοίλη, η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε

$$0 < 1 \Leftrightarrow f'(0) > f'(1) \Leftrightarrow f'(1) < 0.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x - 1)f'(1) + f(1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf'(1)) = -\infty$, είναι και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Όμοια για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο

διάστημα $[x, -1]$, $x < -1$ και υπάρχει $\xi_2 \in (x, -1)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(-1) - f(x)}{-1 - x} \Leftrightarrow f(x) = (x + 1)f'(\xi_2) - f(-1).$$

$$x < \xi_2 < -1 < 0 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\xi_2) > f'(-1) > f'(0) = 0, \text{ άρα}$$

$$f(x) = (x + 1)f'(\xi_2) - f(-1) < (x + 1)f'(\xi_2) - f(-1). \text{ Επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x + 1)f'(-1) + f(1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xf'(-1)) = -\infty, \text{ είναι κα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$ άρα $f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

60. Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Αν $f'(0) > 0$, τότε από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (0, x)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow f(x) = xf'(\xi) + f(0) > xf'(0) + f(0).$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf'(0) + f(0)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf'(0)) = +\infty$ είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ που είναι άτοπο. Όμοια αν $f'(0) < 0$. Αν $f'(0) = 0$ τότε από το ΘΜΤ υπάρχει

$$\xi \in (1, x): f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f(x) = (x - 1)f'(\xi) + f(1)$$

$$\text{Είναι } 0 < 1 < \xi < x \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} 0 = f'(0) < f'(1) < f'(\xi) < f'(x), \text{ άρα}$$

$$f(x) = (x-1)f'(\xi) + f(1) > (x-1)f'(1) + f(1).$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-1)f'(1) + f(1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf'(1)) = +\infty$ είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ που είναι άτοπο.

61. Έστω ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ της C_f με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε: $AB \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (1). \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στα διαστήματα } [x_1, x_2],$$

$[x_2, x_3]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1, x_2) και (x_2, x_3) , οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \text{ Από τη σχέση (1) είναι}$$

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[a, \beta]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι και 1-1. Είναι:

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \xi_1 = \xi_2 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Οπότε δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

62. Η ευθεία AB έχει εξίσωση $y - f(a) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}(x - a) \Leftrightarrow$

$y = \lambda_{AB}x - \alpha\lambda_{AB} + f(a)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) > \lambda_{AB}x - \alpha\lambda_{AB} + f(a)$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Έστω $g(x) = f(x) - \lambda_{AB}x + \alpha\lambda_{AB} - f(a)$, $x \in [a, \beta]$. Είναι $g'(x) = f'(x) - \lambda_{AB}$. Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[a, \beta]$,

υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \lambda_{AB}$.

Για κάθε $a < x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [a, \xi]$, οπότε για κάθε $a < x \leq \xi$ είναι $g(x) > g(a) = 0$. Για κάθε

$\xi < x < \beta \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [\xi, \beta]$, οπότε για κάθε $\xi \leq x < \beta$ είναι $g(x) > g(\beta) = 0$. Άρα για κάθε $x \in (a, \beta)$ είναι $g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > \lambda_{AB}x - \alpha\lambda_{AB} + f(a)$.

Κυρτότητα και εφαπτομένη

63. α) $f'(x) = e^x + 4(x-1)^3$, $f''(x) = e^x + 12(x-1)^2 > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f(0) = 2$, $f'(0) = -3$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -3x + 2$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής, άρα $f(x) \geq -3x + 2 \Leftrightarrow e^x + (x-1)^4 \geq -3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

64. α) $f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x+1}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{-x+1} < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(0 + \infty)$.

β) Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 2$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 3$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0 + \infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, άρα $f(x) \leq 2x - 3$ για κάθε $x > 0$.

Αυξημένης δυσκολίας

65. α) Η f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$. Επειδή $f(-2) = f(2)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχουν $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε το ξ είναι η μοναδική ρίζα της f' . Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, το ξ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της.

β) Είναι $-2 < \xi < 2 \Leftrightarrow f'(-2) < f'(\xi) < f'(2) \Leftrightarrow f'(-2) < 0 < f'(2)$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση: $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y = f'(-2)x + 2f'(-2)$ και η εφαπτομένη της C_f στο B έχει εξίσωση $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = f'(2)x - 2f'(2)$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq f'(-2)x + 2f'(-2)$ και $f(x) \geq f'(2)x - 2f'(2)$.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(-2)x + 2f'(-2)) = +\infty$, οπότε από τη σχέση

$f(x) \geq f'(-2)x + 2f'(-2)$, προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(2)x - 2f'(2)) = +\infty$, οπότε από τη σχέση $f(x) \geq f'(2)x - 2f'(2)$, προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

66. α) Από το Θ. Bolzano στα $[0, 1]$, $[1, 2]$ άρα η f έχει τουλάχιστον δύο ρίζες.

Έστω ότι έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ τότε από το Θ. Rolle υπάρχουν

$\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = 0 = f'(\xi_2)$. Από το Θ. Rolle

για την f' υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) : f''(\xi) = 0$ που είναι άτοπο.

β) Θ.Μ.Τ. για f στο $[0, 1] : \exists x_1 \in (0, 1) : f'(x_1) = f(1) - f(0) < 0$

Θ.Μ.Τ. για f στο $[1, 2] : \exists x_2 \in (1, 2) : f'(x_2) = f(2) - f(1) > 0$

Θ.Μ.Τ. για f' στο $[x_1, x_2] : \exists \theta \in (x_1, x_2) : f''(\theta) = \frac{f'(x_2) - f'(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

Επειδή f'' συνεχής ως πολυωνυμική και δεν μηδενίζεται τότε διατηρεί πρόσημο. Αφού $f''(\theta) > 0$ τότε και $f''(x) > 0$ άρα f κυρτή.

γ) Εφαπτομένη στο $(0, f(0)) : y = f'(0)x + f(0)$, αφού f κυρτή τότε $f(x) \geq y$ δηλαδή $f(x) \geq f'(0)x + f(0)$.

67. α) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4} = 2. \text{ Είναι } 0 < \xi < 4 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(\xi) < f'(4) \Leftrightarrow f'(4) > 2.$$

β) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 2)$, $\xi_2 \in (2, 4)$ τέτοια,

$$\text{ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{f(2) - 1}{2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(2)}{2} = \frac{9 - f(2)}{2}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(2) - 1}{2} < \frac{9 - f(2)}{2} \Leftrightarrow f(2) < 5.$$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο B έχει εξίσωση $y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow$

$$y = f'(4)x - 4f'(4) + 9. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από την}$$

εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$$f(x) \geq f'(4)x - 4f'(4) + 9. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(4)x - 4f'(4) + 9) = +\infty, \text{ οπότε και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

68. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ είναι η $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow$

$$y = f'(1)x - f'(1) + f(1). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από την}$$

εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \leq f'(1)x - f'(1) + f(1).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(1)x - f'(1) + f(1)) = -\infty, \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

69. α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

β) Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$,

οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Επειδή ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$, η f έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))$.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $f'(-1) = f'(1) = 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = -1$ έχει εξίσωση: $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1 + f(-1)$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \leq 0$ είναι $f(x) \leq x + 1 + f(-1)$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + f(-1)) = -\infty$ είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ έχει εξίσωση:

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1 + f(1)$. Επειδή η f κυρτή στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq x - 1 + f(1)$. Επειδή

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + f(1)) = +\infty$ είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

70. α) Έστω $g(x) = \frac{f(x) - x^2}{x - 1}$, $x \neq 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$. Τότε

$f(x) = g(x)(x - 1) + x^2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x - 1) + x^2] = 1$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$, οπότε:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1. \quad f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x - 1) + x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)(x - 1) + (x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(g(x) + x + 1)}{x - 1} =$$

$\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + x + 1) = 4$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία ε :

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 3.$$

β) Επειδή η f είναι κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, δηλαδή η C_f βρίσκεται πάνω από την ε , οπότε

$$f(x) \geq 4x - 3 \Leftrightarrow f(x) - 4x + 3 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ) **1ος τρόπος:** Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$, τότε η f θα ήταν κοίλη στο διάστημα αυτό, οπότε για κάθε $x \in (1, 2)$ θα ήταν $f(x) \leq 4x - 3$ που είναι άτοπο.

2ος τρόπος: Για $x = 2$ είναι $f(2) - 4 \cdot 2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow f(2) \geq 5$. Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$, άρα λόγω του θεωρήματος Μέσης

Τιμή υπάρχει $\xi_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) \geq 5 - 1 = 4. \text{ Η } f' \text{ είναι συνεχής στο } [1, \xi_1]$$

και παραγωγίσιμη στο $(1, \xi_1)$, άρα λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε: } f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(1)}{\xi_1 - 1} = \frac{f'(\xi_1) - 4}{\xi_1 - 1} \geq 0.$$

$$71. \alpha) \text{ Έστω } g(x) = \frac{f(x) - 3x}{x - 2}, x \neq 2 \Leftrightarrow f(x) = (x - 2)g(x) + 3x \quad (1)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο $x = 2$, οπότε:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 + 6 = 6. \text{ Είναι } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)g(x) + 3x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) + 3] = 1 + 3 = 4, \text{ οπότε η εφαπτομένη}$$

$$\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 6 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 2$$

$\beta)$ Έστω $h(x) = f(x) - (x + 3), x \in [2, 4]$.

$h(2) = 1 > 0, h(4) = -1 < 0$ και h συνεχής, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα

Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (2, 4) : h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 + 3$

$\gamma)$ Επειδή $f(2) = f(4) = 6$ από το Θ. Rolle για την f στο $[2, 4]$ υπάρχει

$\xi \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Αφού f κοίλη είναι $f' \searrow$ στο $[2, 4]$ οπότε ξ

μοναδικό. Για $2 < x < \xi$ είναι $f'(x) > f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2, \xi]$. Για

$\xi < x < 4$ είναι $f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f' \searrow [\xi, 4]$. Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο

στο $x_0 = \xi$.

72. $\alpha)$ Επειδή η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Επειδή

$f(0) = f(1)$, για την f εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[0, 1]$, οπότε υπάρχει

$\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Για κάθε $x < \xi \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, \xi]$ και για

κάθε $x > \xi \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \searrow [\xi, +\infty)$, οπότε η f έχει μέγιστο στο ξ .

$\beta)$ Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ έχει εξίσωση

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 4$. Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω

από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \leq -2x + 4$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 4) = -\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = 2x + 2$.

Επειδή η f είναι κοίλη ισχύει ότι $f(x) \leq 2x + 2, x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 2) = -\infty \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

γ) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((-\infty, 0)) = (-\infty, 2)$. Επειδή $0 \in f((-\infty, 0))$ υπάρχει

μοναδικό $x_1 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f((1, +\infty)) = (-\infty, 2)$. Επειδή $0 \in f((1, +\infty))$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \xi]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\xi, 1]$, οπότε έχει ελάχιστο στα $x=0$ και $x=1$, και ισχύει ότι $f(x) \geq f(0) = f(1) = 2$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $[0, 1]$.

73. α) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $f(-1) = f(1)$, για την f εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[-1, 1]$, οπότε

υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Για κάθε

$$x < \xi \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, \xi] \text{ και για κάθε}$$

$$x > \xi \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow [\xi, +\infty), \text{ οπότε η } f \text{ έχει ελάχιστο στο } \xi.$$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = -1$ έχει εξίσωση $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2$. Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq -x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 2) = +\infty \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x = 1$$

έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x + 1) \Leftrightarrow y = x - 2$. Επειδή η f είναι κυρτή ισχύει ότι $f(x) \geq x - 2, x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

γ) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((-\infty, -1)) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in f((-\infty, -1))$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, -1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((1, +\infty)) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in f((1, +\infty))$ υπάρχει

μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

$[-1, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, 1]$, οπότε έχει μέγιστο στα $x=-1$ και $x=1$, και ισχύει ότι $f(x) \leq f(-1) = f(1) = -1$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $[-1, 1]$.

Θεωρητικές ασκήσεις

74. Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $\alpha < x < \beta \Rightarrow f'(x) > f'(\alpha) > 0 \Rightarrow f \nearrow [\alpha, \beta]$. Για κάθε $\alpha < x < \beta \Rightarrow f(x) > f(\alpha) > 0$.

75. Επειδή οι f, g είναι κυρτές, οι f', g' είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f'(x_1) < f'(x_2)$ και $g'(x_1) < g'(x_2)$. Τότε όμως είναι και $f'(x_1) + g'(x_1) < f'(x_2) + g'(x_2) \Leftrightarrow (f' + g')(x_1) < (f' + g')(x_2)$, άρα η $f' + g'$ είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, οπότε η $f + g$ είναι κυρτή.

76. α) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 , είναι $f'(x_0) = 0$ και $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, x_0]$ και για κάθε $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_0, +\infty)$. Άρα η f έχει ελάχιστο στο x_0 .

Επειδή το μέγιστο και το ελάχιστο της f ταυτίζονται, είναι σταθερή συνάρτηση.

β) Επειδή η f είναι κοίλη, η f' είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$. Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , είναι $f'(x_0) = 0$ και $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Αν $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, x_0]$ και αν $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \searrow [x_0, +\infty)$, άρα η f έχει μέγιστο στο x_0 . Επειδή το μέγιστο και το ελάχιστο της f ταυτίζονται, είναι σταθερή συνάρτηση.

77. α) Έστω $f'(3) = 0$ τότε $f \cup \mathbb{R} \Leftrightarrow f' \nearrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα και $1-1$. Οπότε είναι $f'(2) = f'(3) = 0$ άρα $2=3$ (άτοπο) αφού η f' είναι $1-1$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι η $f \circ f$ παραγωγίσιμη με $(f \circ f)'(x) = f'(f(x))f'(x)$. Αφού η $f \circ f$ έχει τοπ. μέγιστο στο $x_0 = 3$ τότε $(f \circ f)'(3) = 0$ δηλαδή: $f'(f(3))f'(3) = 0$ οπότε $f'(f(3)) = 0 \Leftrightarrow f'(f(3)) = f'(2) \Leftrightarrow f(3) = 2$.

78. α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει το πολύ δύο

ρίζες. Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$ και έστω ότι η h έχει τρεις ρίζες τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. Τότε επειδή η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο I , λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοια, ώστε: $h'(\xi_1) = 0$ και $h'(\xi_2) = 0$. Δηλαδή η h' έχει τουλάχιστον δύο ρίζες (1). Όμως $h'(x) = f'(x) - g'(x)$. Επειδή η f είναι κυρτή στο I η f' είναι γνησίως αύξουσα στο I , ενώ επειδή η g είναι κοίλη στο I η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο I . Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$\begin{cases} f'(x_1) < f'(x_2) \\ g'(x_1) > g'(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_1) < f'(x_2) \\ -g'(x_1) < -g'(x_2) \end{cases} \text{ άρα και} \\ f'(x_1) - g'(x_1) < f'(x_2) - g'(x_2) \Leftrightarrow h'(x_1) < h'(x_2), \text{ άρα η } h' \text{ είναι γνησίως} \\ \text{αύξουσα στο } I, \text{ οπότε η εξίσωση } h'(x) = 0 \text{ έχει το πολύ μια ρίζα στο } I \text{ και η} \\ \text{σχέση (1) είναι άτοπη. Άρα η } h \text{ έχει το πολύ δύο ρίζες στο } I.$$

β) Έστω ότι οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο το $M(x_0, y_0)$ τότε: $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Επειδή οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο M , ισχύει ότι: $f'(x_0) = g'(x_0)$. Τότε: $h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) = 0$ και επειδή η h' είναι γνησίως αύξουσα στο I , το x_0 είναι μοναδικό.

Σύνθετες ασκήσεις

79. α) Επειδή $f(a) = f(b) = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) λόγω του θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε: $a < \xi < b \Leftrightarrow f'(a) < f'(\xi) < f'(b) \Leftrightarrow f'(a) < 0 < f'(b)$, άρα $f'(a)f'(b) < 0$.

β) Για κάθε $a < x < \xi$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι: $f'(a) < f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow f'(a) < f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \xi]$. Για κάθε $a < x \leq \xi$, είναι $f(a) > f(x) \geq f(\xi)$, δηλαδή $f(x) < f(a) = 0$. Για κάθε $\xi < x < b$, επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, είναι: $f'(\xi) < f'(x) < f'(b) \Leftrightarrow 0 < f'(x) < f'(b)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi, b]$. Για κάθε $\xi < x < b$ είναι $f(\xi) < f(x) < f(b) = 0$. Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Για κάθε $x < a \Leftrightarrow f(x) > f(a) = 0$ και για κάθε $x > b \Leftrightarrow f(x) > f(b) = 0$.

γ) Έστω ότι $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

Τότε $f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) > 0$, άρα $[e^{-x}f(x)]' > 0$.

Έστω $g(x) = e^{-x}f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι $g'(x) = [e^{-x}f(x)]' > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή $\alpha < \beta$, είναι

$$g(\alpha) < g(\beta) \Leftrightarrow e^{-\alpha}f(\alpha) < e^{-\beta}f(\beta) \Leftrightarrow 0 < 0 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) \geq f'(x_0)$.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = \beta$ έχει εξίσωση

$$y - f(\beta) = f'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = f'(\beta)x - \beta f'(\beta). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή,}$$

βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$$f(x) \geq f'(\beta)x - \beta f'(\beta) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(\beta)x - \beta f'(\beta)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\beta)x = +\infty \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

80. α) i. $f'(x) = 8x \ln x - 8x + 8$, $f''(x) = 8 \ln x$. Για κάθε $x > 1$ είναι

$f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[1, +\infty)$ και για $x \in (0, 1)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(0, 1]$. Σημείο καμπής το $(1, f(1)) \equiv (1, 3)$.

ii. $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, +\infty)$, οπότε για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$ και $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (0, 1]$, οπότε για $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow (0, 1]$.

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι $\nearrow$ στο $(0, +\infty)$.

β) i. Είναι $f(1) = 0$ και αφού $f \nearrow$ τότε το $x_0 = 1$ μοναδική ρίζα της f . Για

$$x < 1 \text{ είναι } f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0 \text{ και για } x > 1 \text{ είναι}$$

$$f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [4x^2 \ln x + 6x^2 + 8x - 2] = -2$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-\frac{2}{x^3}} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^2(2 \ln x - 3) + 8x - 2] = +\infty. \text{ Άρα } f(A) = (-2, +\infty)$$

81. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με

$$f'(x) = (\ln x - 1)^2 + \cancel{x} \cdot 2(\ln x - 1) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \ln^2 x - \cancel{2\ln x} + 1 + \cancel{2\ln x} - 2 = \ln^2 x - 1$$

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln^2 x \geq 1 \Leftrightarrow |\ln x| \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$(\ln x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq e^{-1}) \text{ ή } (\ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e). \text{ Για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, +\infty)$$

είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{e}\right] \cup [e, +\infty)$, είναι γνησίως

αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και $[e, +\infty)$. Για κάθε

$$x \in \left(\frac{1}{e}, e\right) \text{ είναι } f'(x) < 0 \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[\frac{1}{e}, e\right], \text{ είναι}$$

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \left(\ln \frac{1}{e} - 1\right)^2 = \frac{1}{e} (-1 - 1)^2 = \frac{4}{e} \text{ και τοπικό ελάχιστο το } f(e) = 0.$$

β) Αρκεί να βρούμε πότε η f' γίνεται ελάχιστη. Είναι $f''(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $(0, 1]$,

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι

$f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα

στο διάστημα αυτό. Η f' γίνεται ελάχιστη για $x = 1$, οπότε το ζητούμενο

σημείο της C_f είναι το $A(1, f(1)) \equiv (1, 1)$. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η

εφαπτομένη της C_f στο A , τότε $\epsilon\phi\omega = f'(1) = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$.

γ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 > 0$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη της C_f στο M

είναι η ευθεία $\epsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Για να διέρχεται από το $O(0, 0)$

$$\text{πρέπει } -f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Leftrightarrow \cancel{x_0} (\ln x_0 - 1)^2 = \cancel{x_0} (\ln^2 x_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$(\ln x_0 - 1)^2 - (\ln x_0 - 1)(\ln x_0 + 1) = 0 \Leftrightarrow (\ln x_0 - 1)(\cancel{\ln x_0 - 1} - \cancel{\ln x_0 - 1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = e. \text{ Είναι } f(e) = 0 \text{ και } f'(e) = 0, \text{ οπότε η}$$

ζητούμενη εφαπτομένη είναι η $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$.

$$\text{δ) } f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x(\ln x - 1)^2 = \ln^2 x - 1 \Leftrightarrow$$

$$x(\ln x - 1)^2 - (\ln x - 1)(\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln x - 1)(x(\ln x - 1) - (\ln x + 1)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } x \ln x - x - \ln x - 1 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x \ln x - x - \ln x - 1$, $x \in [1, e]$.

$$\text{Είναι } g'(x) = \ln x + 1 - 1 - \frac{1}{x}, g''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ και επειδή η } g' \text{ είναι}$$

συνεχής στο $[1, e]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

$$\text{Είναι } g'(1) = -1 < 0, g'(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0, \text{ δηλαδή } g'(1)g'(e) < 0 \text{ και επειδή η } g'$$

είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (1, e)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } g'(\rho) = 0. \text{ Για κάθε } 1 < x < \rho \Rightarrow g'(x) < g'(\rho) = 0 \Rightarrow g \searrow [1, \rho], \text{ οπότε}$$

$$g(1) > g(x) > g(\rho) \Rightarrow g(x) < -2. \text{ Για κάθε}$$

$$\rho < x < e \Rightarrow g'(x) > g'(\rho) = 0 \Rightarrow g \nearrow [\rho, e], \text{ οπότε}$$

$g(\rho) < g(x) < g(e) \Rightarrow g(x) < -2$. Άρα $g(x) < -2$ για κάθε $x \in (1, e)$, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη στο διάστημα αυτό.

$$\epsilon) \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } (\ln x - 1)^2 \geq 3 - \frac{2e^2}{x} \Leftrightarrow x(\ln x - 1)^2 \geq 3x - 2e^2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq 3x - 2e^2. \text{ Αν } x \in (0, 1), \text{ τότε } f(x) > 0, 3x - 2e^2 < 0, \text{ οπότε}$$

$$f(x) > 3x - 2e^2. \text{ Στο διάστημα } [1, +\infty):$$

Παρατηρούμε ότι η $y = 3x - 2e^2$ είναι ευθεία οπότε θα εξετάσουμε αν είναι

εφαπτομένη της C_f . Θα αναζητήσουμε $x_1 \geq 1$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = \lambda = 3$.

$$\text{Είναι } f'(x_1) = 3 \Leftrightarrow \ln^2 x - 1 = 3 \Leftrightarrow \ln^2 x = 4 \Leftrightarrow \ln x = \pm 2 \Leftrightarrow x = e^2 \text{ ή}$$

$$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1 \text{ απορρίπτεται. Είναι } f(e^2) = e^2(\ln e^2 - 1)^2 = e^2(2 - 1)^2 = e^2.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = e^2$ είναι η ευθεία ϵ

$$y - f(e^2) = f'(e^2)(x - e^2) \Leftrightarrow$$

$$y - e^2 = 3(x - e^2) \Leftrightarrow y = 3x - 2e^2. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή στο } [1, +\infty)$$

βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα και από την ϵ , οπότε $f(x) \geq 3x - 2e^2$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

$$\mathbf{82. \alpha)} \text{ Είναι } g'(x) = e^{-2x} (f'(x) - 2f(x))$$

$$g''(x) = e^{2x} (f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)).$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g''(x) > 0 \Rightarrow g \cup \mathbb{R}$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = f'(1)x + f(1) - f'(1)$. Επειδή όμως η $y = x - 9$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$, ισχύει ότι $f'(1) = 1$ και $f(1) - f'(1) = -9 \Leftrightarrow f(1) = -8$.

Είναι $g(1) = e^{-2}f(1) = -8e^{-2}$ και $g'(1) = e^{-2}(f'(1) - 2f(1)) = 17e^{-2}$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση: $y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 8e^{-2} = 17e^{-2}(x - 1) \Leftrightarrow y = 17e^{-2}x - 25e^{-2}$.

γ) Επειδή η g είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 17e^{-2}x - 25e^{-2} \Leftrightarrow$

$$e^{-2x}f(x) \geq 17e^{-2}x - 25e^{-2} \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{e^{-2}(17x - 25)}{e^{-2x}} = e^{2x-2}(17x - 25).$$

Για κάθε $x > 2$ είναι $f(x) \geq e^{2x-2}(17x - 25) > 0$ (1).

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-2}(17x - 25) = +\infty$ και λόγω της (1) είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

83. α) Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 - h)}{h} =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[2 \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{2h} + \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \right] =$$

$$= 2f'(x_0) + f'(x_0) = 3f'(x_0) \text{ οπότε } 3f'(x_0) = -6x_0 e^{f(x_0)}.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + kh) - f(x_0)}{kh} \stackrel{kh=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} = f'(x_0). \text{ Άρα για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f'(x) = -2x e^{f(x)} \Leftrightarrow -f'(x) e^{-f(x)} = 2x, \text{ άρα}$$

$$(e^{-f(x)})' = (x^2)' \Leftrightarrow e^{-f(x)} = x^2 + c$$

Για $x = 0$ είναι $c = 1$ άρα $e^{-f(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = -\ln(x^2 + 1), x \in \mathbb{R}$

β) $f'(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$

και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(0) = 0$

γ) Είναι $f''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f''		+	-	+
f	$\cup$	$\circ$	$\cap$	$\cup$

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ είναι

$f''(x) > 0$ και για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f''(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και κοίλη στο $[-1, 1]$. Έχει σημεία καμπής τα $A(-1, -\ln 2)$ και $B(1, -\ln 2)$

δ) Έστω ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά, τότε

$$AB \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (1)$$

Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \quad \text{Επειδή } f''(x) > 0 \text{ για}$$

κάθε $x > 1$, η f' είναι $\nearrow$, άρα και $1 - 1$. Από την (1), είναι:

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \Leftrightarrow \xi_1 = \xi_2 \text{ που είναι άτοπο.}$$

84. α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως ρητή με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{2\alpha x(x^3 + \alpha x) - (\alpha x^2 + \beta)(3x^2 + \alpha)}{(x^3 + \alpha x)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2\alpha x^4 + 2\alpha^2 x^2 - 3\alpha x^4 - \alpha^2 x^2 - 3\beta x^2 - \alpha\beta}{(x^3 + \alpha x)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-\alpha x^4 + \alpha^2 x^2 - 3\beta x^2 - \alpha\beta}{(x^3 + \alpha x)^2} = \frac{g(x)}{(x^3 + \alpha x)^2}, x \in \mathbb{R}^*.$$

Η g ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως η g έχει ολικό μέγιστο στο $x=0$ το $g(0) = -\alpha\beta$ άρα

ισχύει ότι $g(x) \leq -\alpha\beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

αφού $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ και $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow -\alpha\beta < 0$. Άρα ισχύει

$$-\alpha x^4 + x^2(\alpha^2 - 3\beta) - \alpha\beta < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε έχουμε ότι } f'(x) < 0 \text{ για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ αφού ισχύει επίσης ότι $(x^3 + \alpha x)^2 > 0$ κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Επομένως

η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και

$(0, +\infty)$. Έστω $A_1 = (-\infty, 0)$ και $A_2 = (0, +\infty)$. Επειδή η f είναι συνεχής και

γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα A_1 και A_2 τότε:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0) \text{ καθώς είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x^3 + \alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta}{x^2 + \alpha} \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x^3 + \alpha x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(\alpha + \frac{\beta}{x^2} \right)}{\cancel{x^3} \left(1 + \frac{\alpha}{x^2} \right)} = 0. \text{ Είναι}$$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, +\infty) \text{ καθώς είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta}{x^2 + \alpha} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x^3 + \alpha x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left(\alpha + \frac{\beta}{x^2} \right)}{\cancel{x^3} \left(1 + \frac{\alpha}{x^2} \right)} = 0.$$

Άρα αν $x_1 < 0$ και $x_2 > 0$ είναι $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της.

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ είναι $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + x}$, $x \neq 0$ και $f'(x) = \frac{-x^4 - 5x^2 - 2}{(x^3 + x)^2}$.

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρητή με παράγωγο:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-4x^3 - 10x)(x^3 + x)^2 - 2(-x^4 - 5x^2 - 2)(x^3 + x)(3x^2 + 1)}{(x^3 + x)^4} = \\ &= \frac{\cancel{(x^3 + x)} [(-4x^3 - 10x)(x^3 + x) - 2(-x^4 - 5x^2 - 2)(3x^2 + 1)]}{(x^3 + x)^4} = \\ &= \frac{-4x^6 - 4x^4 - 10x^4 - 10x^2 - 2(-3x^6 - 15x^4 - 6x^2 - x^4 - 5x^2 - 2)}{(x^3 + x)^3} = \\ &= \frac{-4x^6 - 4x^4 - 10x^4 - 10x^2 - 2(-3x^6 - 16x^4 - 11x^2 - 2)}{(x^3 + x)^3} = \\ &= \frac{-4x^6 - 4x^4 - 10x^4 - 10x^2 + 6x^6 + 32x^4 + 22x^2 + 4}{(x^3 + x)^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2x^6 + 18x^4 + 12x^2 + 4}{(x^3 + x)^3} = 2 \frac{x^6 + 9x^4 + 6x^2 + 2}{(x^3 + x)^3} = 2 \frac{x^2(x^4 + 9x^2 + 6) + 2}{(x^3 + x)^3}, x \neq 0$$

$x^4 + 9x^2 + 6 > 0$, $x^2 \geq 0$ και επίσης έχουμε ότι:

$$x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow (x^3 + x)^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και ομοίως}$$

$$\text{ισχύει: } x^3 + x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \Rightarrow (x^3 + x)^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο $(0, +\infty)$.

γ) Έχουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + x}, x \in \mathbb{R}^* \text{ είναι}$$

γνησίως φθίνουσα σε
καθένα από τα διαστήματα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	+	ϕ	+
$x^4 + 9x^2 + 6$	+		+
$x^2(x^4 + 9x^2 + 6) + 2$	+	ϕ	+
$(x^3 + x)^3$	-		+
f''	-		+
f	$\cap$		$\cup$

$(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Είναι $f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$ και

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty), \text{ άρα}$$

$f((-\infty, 0)) \cap f((0, +\infty)) = \emptyset$ οπότε η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της και

άρα αντιστρέφεται. Είναι $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^*$.

δ) Έστω ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in (-\infty, 0)$ με $y_1 < y_2$ τέτοια, ώστε

$$f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2), \text{ τότε επειδή η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (-\infty, 0),$$

έχουμε: $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$ άτοπο. Άρα για κάθε

$$y_1, y_2 \in (-\infty, 0) \text{ με } y_1 < y_2 \text{ είναι } f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2), \text{ οπότε η } f^{-1} \text{ είναι}$$

γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$. Έστω ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in (0, +\infty)$ με

$$y_1 < y_2 \text{ τέτοια, ώστε } f^{-1}(y_1) \leq f^{-1}(y_2), \text{ τότε επειδή η } f \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, έχουμε: $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$ άτοπο.

Άρα για κάθε $y_1, y_2 \in (0, +\infty)$ με $y_1 < y_2$ είναι $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, οπότε η

$$f^{-1} \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, +\infty).$$

$$\epsilon) f(x^2) - f(\eta\mu^2 x) < f^{-1}(\eta\mu^2 x) - f^{-1}(x^2) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) + f^{-1}(x^2) < f(\eta\mu^2 x) + f^{-1}(\eta\mu^2 x) \quad (1). \text{ Πρέπει } x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και}$$

$\eta\mu^2 x \neq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + f^{-1}(x)$, $x > 0$. Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$ και $f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι $g(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow g \searrow (0, +\infty)$.

Η σχέση (1) γίνεται: $g(x^2) < g(\eta\mu^2 x) \stackrel{g \searrow (0, +\infty)}{\Leftrightarrow} x^2 > \eta\mu^2 x \Leftrightarrow |\eta\mu x| < |x|$ που ισχύει αφού $x \neq 0$.

$$\mathbf{85. \alpha)} e^{x^2 - f(x)} - 1 = e^x \Leftrightarrow e^{x^2 - f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow x^2 - f(x) = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow$$

$f(x) = x^2 - \ln(e^x + 1)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και

άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = 2x - \frac{e^x}{e^x + 1}$. Η f' είναι

$$\text{παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f''(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^{2x} + 3e^x + 2}{(e^x + 1)^2}$$

Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R} \Leftrightarrow f \cup \mathbb{R}$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty - 1 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty - 0 = -\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1 + e^{-x})} = 1. \text{ Είναι}$$

$f'(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Επειδή το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της f'

υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$. Επειδή f' είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x_1) = 0$, η f έχει ακριβώς ένα κρίσιμο σημείο.

$$\mathbf{\gamma)} e^{x^2} = e^x + 1 \Leftrightarrow x^2 = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Για κάθε $x < x_1 \stackrel{f' \nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, x_1]$ και για κάθε

$x > x_1 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1

το $f(x_1)$. Είναι $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $f'(1) = 2 - \frac{e}{e+1} > 0$ και η f' είναι συνεχής

στο

$[0, 1]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει

τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Όμως το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της f' , άρα

$x_1 \in (0, 1)$. Είναι $x_1 < 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(1) < 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 - \ln(e^x + 1)] = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x^2} \right) \right] = +\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x} (1 + e^{-x})}{2x} = 0 .$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, x_1)$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο Δ_1 τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (x_1, +\infty)$ άρα έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο Δ_2 τέτοιο, ώστε $f(x_3) = 0$. Επειδή $x_3 \in \Delta_2$ είναι $x_3 > 0$.

Είναι $f(0) = -\ln 2$ και $f((-\infty, 0)) = (-\ln 2, +\infty)$. Επειδή $0 \in f((-\infty, 0))$ η $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο $(-\infty, 0)$. Όμως η f έχει μοναδική ρίζα στο $\Delta_1 = (-\infty, x_1)$, άρα η ρίζα αυτή περιορίζεται στο $(-\infty, 0)$ και είναι αρνητική.

δ) Είναι $f(\Delta_1) = (f(x_1), +\infty) = f(\Delta_2)$. Έστω $\alpha \in \Delta_1$ τότε $f(\alpha) \in f(\Delta_1)$ και $f(\alpha) \in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $\beta \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) = f(\alpha)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) εφαρμόζεται γι αυτήν το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

$$\text{ε)} \quad e^x + 1 \leq 2e^{x^2 + \frac{1}{2}x} \Leftrightarrow e^x + 1 \leq e^{\ln 2} e^{x^2 + \frac{1}{2}x} \Leftrightarrow e^x + 1 \leq e^{x^2 + \frac{1}{2}x + \ln 2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x + 1) \leq x^2 + \frac{1}{2}x + \ln 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x - \ln 2 \leq x^2 - \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}x - \ln 2. \text{ Είναι } f'(x) = 2x - \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ και } f'(0) = -\frac{1}{2}. \text{ Η εφαπτομένη}$$

της C_f στο $x=0$ έχει εξίσωση: $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \ln 2$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της

εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq -\frac{1}{2}x - \ln 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{στ)} \quad f(x) \leq \ln \frac{e^{x^2}}{x+2} \Leftrightarrow x^2 - \ln(e^x + 1) \leq \ln e^{x^2} - \ln(x+2) \Leftrightarrow$$

$$x^x - \ln(e^x + 1) \leq x^x - \ln(x+2) \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x + 1) \geq \ln(x+2) \Leftrightarrow e^x + 1 \geq x+2 \Leftrightarrow e^x \geq x+1 \text{ ισχύει}$$

86. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν $\Leftrightarrow \mu > \nu$

- Αν $x > 0$ έχουμε: $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[\mu]{x^\mu}}{x} = \frac{\sqrt[\mu]{x^\mu}}{\sqrt[\nu]{x^\nu}} = \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}.$

Αν $\mu = \nu$ τότε $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[\mu]{x^\mu}}{x} = \frac{\sqrt[\mu]{x^\mu}}{x} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

Αν $\mu > \nu$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ και αν $\mu < \nu$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

- Αν $x < 0$ τότε η f ορίζεται όταν ο μ είναι άρτιος. Τότε:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[\mu]{x^\mu}}{x} = \frac{\sqrt[\mu]{(-x)^\mu}}{-\sqrt[\nu]{(-x)^\nu}} = -\sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}}.$$

Αν $\mu = \nu$ τότε $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[\mu]{x^\mu}}{x} = \frac{\sqrt[\mu]{x^\mu}}{x} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

Αν $\mu > \nu$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 0$, αν $\mu < \nu$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν τότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mu > \nu.$

β) Αν $\mu \neq \nu$ τότε $f(x) = \sqrt[\mu]{x^\mu} = \begin{cases} (-x)^{\frac{\mu}{\nu}}, & x < 0 \\ 0 & , x = 0 \text{ και αν } \mu = \nu \text{ τότε} \\ x^{\frac{\mu}{\nu}}, & x > 0 \end{cases}$

$$f(x) = \sqrt[\mu]{x^\mu} = \sqrt[\nu]{x^\nu} = |x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \text{ γιατί ο } \mu \text{ είναι άρτιος.}$$

Αν $x > 0$ και $\mu < \nu$ έχουμε: $f'(x) = \left(\sqrt[\mu]{x^\mu}\right)' = \left(x^{\frac{\mu}{\nu}}\right)' = \frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu}{\nu}-1} = \frac{\mu}{\nu} \sqrt[\nu]{x^{\mu-\nu}}$ και

ομοίως αν $\mu > \nu$. Αν $x < 0$ και $\mu < \nu$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\sqrt[\mu]{(-x)^\mu}\right)' = \left((-x)^{\frac{\mu}{\nu}}\right)' = -\frac{\mu}{\nu}(-x)^{\frac{\mu}{\nu}-1} = -\frac{\mu}{\nu} \sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}} \text{ και ομοίως αν}$$

$\mu > \nu$. Αν $x > 0$ και $\mu = \nu$ έχουμε: $f'(x) = (x)' = 1$ και αν $x < 0$ και $\mu = \nu$

έχουμε: $f'(x) = (-x)' = -1$.

Αν $\mu > \nu$ η f είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν με $f'(0) = 0$ ενώ αν $\mu \leq \nu$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν. Επομένως έχουμε: Αν $\mu < \nu$ τότε

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\mu}{\nu} \sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}} & , x < 0 \\ \frac{\mu}{\nu} \sqrt[x]{x^{\mu-\nu}} & , x > 0 \end{cases} \quad , \text{αν } \mu > \nu \text{ τότε } f'(x) = \begin{cases} -\frac{\mu}{\nu} \sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-\nu}} & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \frac{\mu}{\nu} \sqrt[x]{x^{\mu-\nu}} & , x > 0 \end{cases}$$

$$\text{και αν } \mu = \nu \text{ τότε } f'(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

γ) Αν $\mu < \nu$ τότε: Για

$$x < 0 : f''(x) = \left(-\frac{\mu}{\nu} (-x)^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} \right)' = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} (-x)^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} \sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-2\nu}} < 0$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

$$\text{Για } x > 0 : f''(x) = \left(\frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} \right)' = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} \sqrt[x]{x^{\mu-2\nu}} < 0 \text{ και}$$

επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$. Αν $\mu > \nu$ τότε:

Για

$$x < 0 : f''(x) = \left(-\frac{\mu}{\nu} (-x)^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} \right)' = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} (-x)^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} \sqrt[\nu]{(-x)^{\mu-2\nu}} > 0$$

και επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$.

$$\text{Για } x > 0 : f''(x) = \left(\frac{\mu}{\nu} x^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} \right)' = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} x^{\frac{\mu-2\nu}{\nu}} = \frac{\mu(\mu-\nu)}{\nu^2} \sqrt[x]{x^{\mu-2\nu}} > 0 \text{ και}$$

επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$. Αν $\mu = \nu$ τότε:

Για $x < 0 : f''(x) = 0$ άρα δεν είναι ούτε κοίλη ούτε κυρτή.

Για $x > 0 : f''(x) = 0$ άρα δεν είναι ούτε κοίλη ούτε κυρτή.

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^\mu - 2}{x^\mu - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[\nu]{x^\mu} + x^\mu - 2}{x^\mu - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[\nu]{x^\mu} + x^\mu - 2}{x^\mu - 1} \quad (M)$$

Θέτω $\sqrt[\nu]{x^\mu} = u \Leftrightarrow x^\mu = u^\nu$ και όταν $x \rightarrow 1$ τότε το $u \rightarrow 1$ άρα το (M) γίνεται:

$$(M) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u + u^v - 2}{u^v - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u - 1 + u^v - 1}{u^v - 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{u - 1}{u^v - 1} + \frac{\cancel{u^v - 1}}{\cancel{u^v - 1}} \right) =$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \left(\frac{\cancel{u - 1}}{(\cancel{u - 1})(u^{v-1} + u^{v-2} + \dots + u + 1)} + 1 \right) = \frac{1}{v} + 1$$

ε) i) Είναι $f(1) = 1$ και $f'(1) = \frac{2}{3}$, άρα (ε): $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

H f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ οπότε η (ε) βρίσκεται πάνω από την C_f με

εξαίρεση το σημείο επαφής τους, δηλαδή είναι $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ για $x = 1$ στο

$$[0, +\infty). \text{ Για } x < 0: f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x^2} = 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$27x^2 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \begin{matrix} \text{Σχήμα Horner} \\ \Leftrightarrow \\ \text{με } \rho = 1 \end{matrix}$$

$$8(x-1)^2 \left(x + \frac{1}{8} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ Απορρίπτεται ή } x = -\frac{1}{8} \text{ δεκτή.}$$

Άρα η (ε) τέμνει την C_f σε ακριβώς δύο σημεία τα $A(1, f(1)) \equiv A(1, 1)$ και

$$B\left(-\frac{1}{8}, f\left(-\frac{1}{8}\right)\right) \equiv B\left(-\frac{1}{8}, \sqrt[3]{\frac{1}{64}}\right).$$

ii) Επειδή η (ε) τέμνει την C_f σε ακριβώς δύο σημεία, μόνο σε αυτά θα μπορεί να εφάπτεται. Άρα αν εφάπτεται σε διαφορετικό σημείο αυτό θα

συμβαίνει στο $x_1 = -\frac{1}{8}$, δηλαδή $f'\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{2}{3} > 0$ άτοπο καθώς

$$f'(x) = -\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} < 0 \text{ για κάθε } x < 0. \text{ Άρα η (ε) εφάπτεται στην } C_f \text{ μόνον}$$

στο $A(1, 1)$.

87. α) $f(x) = \frac{x^2}{e^x} \Leftrightarrow f(x)e^x - x^2 = 0$. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = e^x f(x) - x^2, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x) - 2x \text{ και}$$

$$g''(x) = e^x (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) - 2 = e^x \cdot 2e^{-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow g'(x) = c.$$

$$\text{Είναι } g'(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα } g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1. \text{ Είναι}$$

$$g(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 e^{-x}.$$

β) $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$, για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, 2]$ και για κάθε $x > 2$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [2, +\infty)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = 0$,

$$f(2) = \frac{4}{e^2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0. \text{ Στο } A_1 = (-\infty, 0]$$

είναι $f(A_1) = [0, +\infty)$, στο $A_2 = (0, 2)$ είναι $f(A_2) = \left(0, \frac{4}{e^2}\right)$ και στο

$$A_3 = [2, +\infty) \text{ είναι } f(A_3) = \left(0, \frac{4}{e^2}\right]. \text{ Είναι}$$

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [0, +\infty).$$

$$\gamma) x^2 = 2e^{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^x} = 2e^{-2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{e^2}.$$

Επειδή $\frac{2}{e^2} \in f(A_1)$, $\frac{2}{e^2} \in f(A_2)$ και $\frac{2}{e^2} \in f(A_3)$ η εξίσωση έχει μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$.

$$\delta) f(x) + 2e + 3ex \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -3ex - 2e$$

Είναι $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) > 0$ για κάθε $x < 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους. Είναι $f'(-1) = -3e$, $f(-1) = e$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x = -1$ έχει εξίσωση $y = -3ex - 2e$, άρα $f(x) + 2e + 3ex \geq 0$ για κάθε $x \leq 0$.

88. α) Είναι $f'(x) = g(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα. Για κάθε $x < 0$ είναι

$$f(x) < x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^-} x \Leftrightarrow f(0) \leq 0 \quad (1) \text{ και}$$

$$\text{για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) > x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} x \Leftrightarrow f(0) \geq 0 \quad (2). \text{ Από}$$

$$(1), (2) \Rightarrow f(0) = 0. \text{ Είναι } g'(0) = f(0) = 0 \text{ οπότε για } x < 0 \text{ είναι}$$

$$f(x) < f(0) \Leftrightarrow g'(x) < 0 \text{ και } g \text{ γνησίως φθίνουσα στο } (-\infty, 0], \text{ ενώ για}$$

$$x > 0 \text{ είναι } f(x) > f(0) \Leftrightarrow g'(x) > 0 \text{ και } g \text{ γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty).$$

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0.

β) Είναι $g''(x) = f'(x) = g(x) > 0$, άρα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επίσης $f''(x) = g'(x)$ και αν είναι $x < 0$ ισχύει $f''(x) = g'(x) < 0$, οπότε f κοίλη στο $(-\infty, 0]$, ενώ για $x > 0$ ισχύει $f''(x) = g'(x) > 0$, οπότε f κυρτή στο $[0, +\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$.

γ) Έστω $h(x) = f(x) - xg(0)$, $x \in [0, +\infty)$. Είναι

$h'(x) = f'(x) - g(0) = g(x) - g(0) > 0$ για $x > 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x) - xg(0) > 0 \Leftrightarrow f(x) > xg(0).$$

δ) Είναι $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$ και με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) - g'(x) &= g(x) - f(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' + (f(x) - g(x)) = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) - g(x))' e^x + (f(x) - g(x)) e^x &= 0 \Leftrightarrow [(f(x) - g(x)) e^x]' = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) - g(x)) e^x &= c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - g(x) = c e^{-x}. \text{ Για } x=0 \text{ είναι} \\ f(0) - g(0) &= c \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) - g(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow f(x) > g(x) \end{aligned}$$

89. α) $\varphi'(x) = f''(x) - f'(x) < 0$ άρα $\varphi \searrow [0, +\infty)$.

$$\text{Για } x > 0 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow f'(x) - f(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < f(x) \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0 \Rightarrow g \searrow [0, +\infty).$$

β) i) Έστω $h(x) = f^2(x)$, $h'(x) = 2f(x)f'(x)$,

$$h''(x) = 2(f'(x))^2 + 2f(x)f''(x)$$

$$\text{Για } x > 0 \stackrel{g \searrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \quad (2). \text{ Από } (1), (2)$$

$$f'(x) < f(x) < 0 \text{ και αφού } f''(x) < f'(x) \text{ τότε } f''(x) < 0. \text{ Άρα}$$

$$f(x)f''(x) > 0 \text{ και } h''(x) > 0 \Rightarrow h \text{ κυρτή.}$$

ii. Η εφαπτομένη της h στο $x = 1$ έχει εξίσωση:

$y - h(1) = h'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = h'(1)x + h(1) - h'(1)$. Επειδή η h είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x \geq 0$ είναι $h(x) \geq h'(1)x + h(1) - h'(1)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h'(1)x + h(1) - h'(1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h'(1)x = +\infty$ γιατί $h'(1) > 0$, οπότε

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = +\infty.$$

iii. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την h στα $[0,1]$ και $[1,3]$, υπάρχουν $\xi_1 \in (0,1)$

$$\text{και } \xi_2 \in (1,3) : h'(\xi_1) = \frac{f^2(1) - f^2(0)}{1-0} = f^2(1), h'(\xi_2) = \frac{f^2(3) - f^2(1)}{3-1}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(\xi_1) < h'(\xi_2) \Leftrightarrow f^2(1) < \frac{f^2(3) - f^2(1)}{2} \Leftrightarrow 3f^2(1) < f^2(3)$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + f(x^2)$, $x \geq 0$. Είναι

$$h'(x) = f'(x) + 2xf'(x^2) < 0 \Rightarrow h \searrow [0, +\infty). \text{ Είναι}$$

$$f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10}) \Leftrightarrow h(x) = h(x^5) \Leftrightarrow$$

$$x = x^5 \Leftrightarrow x - x^5 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x^4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^4 = 1 \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

90. α) i. Αφού η f έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ είναι $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ άρα και $f(-x) > 0$ οπότε από τη σχέση $f'(x)f(-x) = 4$ (1) θα είναι $f'(x) > 0$ άρα $f \nearrow$.

ii) $f'(x)f(-x) = 4 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{4}{f(-x)}$. Επειδή η συνάρτηση $\frac{4}{f(-x)}$ είναι

παραγωγίσιμη, η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = -\frac{4}{f^2(-x)} f'(-x)(-x)' = \frac{4}{f^2(-x)} \cdot \frac{4}{f(x)} > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow f(-x_1) > f(-x_2)$ άρα $f(-x)$ είναι $\searrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Στην (1) όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f'(-x)f(x) = 4 \Leftrightarrow -f'(-x)f(x) = -4 \Rightarrow [f(-x)]' f(x) = -4 \quad (3)$$

Προσθέτουμε (1), (3) οπότε $f'(x)f(-x) + [f'(-x)]' f(x) = 0 \Rightarrow$

$$[f(-x)f(x)]' = 0 \Leftrightarrow f(-x)f(x) = c \text{ για } x = 0$$

$$f(0) \cdot f(0) = c \Rightarrow 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow c = 4 \text{ άρα } f(-x)f(x) = 4 \quad (4). \text{ Από (1), (4)}$$

$$f'(x)f(-x) = f(-x)f(x) \stackrel{f(-x) > 0}{\Rightarrow}$$

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x \text{ και για } x = 0 \text{ είναι } c = 2. \text{ Άρα } f(x) = 2e^x.$$

$$91. \alpha) h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + x, \quad h''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} + 1. \text{ Όμως } h''(x) > 1$$

$$\text{άρα } \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} > 0 \Leftrightarrow f''(x)f(x) > f^2(x) \geq 0. \text{ Επομένως}$$

$$f''(x)f(x) > 0 \stackrel{f(x)>0}{\Rightarrow} \text{τότε } f''(x) > 0 \text{ άρα } f \text{ κυρτή.}$$

$$\beta) \text{ Είναι } \frac{f(4)}{f(2)} = e^{-6} \text{ οπότε } \ln \frac{f(4)}{f(2)} = \ln e^{-6} \Leftrightarrow \ln f(4) - \ln f(2) = -6 \Leftrightarrow$$

$$\ln f(4) + 8 = \ln f(2) + 2 \Leftrightarrow \ln f(4) + \frac{1}{2}4^2 = \ln f(2) + \frac{1}{2}2^2. \text{ Άρα } h(4) = h(2)$$

$$\text{οπότε από } \Theta. \text{ Rolle } \exists x_0 \in (2, 4) : h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} + x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = -x_0 f(x_0)$$

$$\gamma) \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x=2 \text{ έχει εξίσωση: } y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$y = f'(2)x - 2f'(2) + e^6 f(4). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από} \\ \text{κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε } x > 0 \text{ είναι} \\ f(x) \geq f'(2)x - 2f'(2) + f(4)e^6 \Leftrightarrow f(x) + 2f'(2) \geq f'(2)x + f(4)e^6.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} \right] = 2 \cdot 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\ln x)}{\ln x} \stackrel{\ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x}.$$

$$92. \alpha) f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow \mathbb{R} \text{ άρα για } x < 0 \Rightarrow f''(x) < f''(0) = 0 \Rightarrow$$

$$f'' \searrow (-\infty, 0] \text{ και για } x > 0 \Rightarrow f''(x) > f''(0) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [0, +\infty).$$

$$\text{Για } x < 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$$

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } x = 0$$

είναι $f \nearrow \mathbb{R}$. Επειδή για $x < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$ και για $x > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στο $x = 0$ τότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Η f παρουσιάζει καμπή στο μηδέν, δηλαδή έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))$.

$$\beta) \text{ Για το πεδίο ορισμού της } S = \frac{f}{g} \text{ πρέπει: :}$$

$$\begin{cases} x \in D_f \\ 1-x^2-\sin^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 1-x^2-\sin^2 x \neq 0 \end{cases}$$

Ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Άρα έχουμε: $|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow 1-\sin^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow 1-x^2-\sin^2 x \leq 0$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα έχουμε ότι $D_S = \mathbb{R}^*$ αφού

$$1-x^2-\sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0. \text{ Είναι } S(x) = \frac{f(x)}{1-x^2-\sin^2 x} \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

γ) Η f ως γνησίως αύξουσα συνάρτηση θα έχει το πολύ μια ρίζα, όμως για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(x) \neq 0$, γιατί για να μην τέμνει η γραφική παράσταση της

$$S \text{ τον } x'x \text{ άξονα πρέπει: } S(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{1-x^2-\sin^2 x} \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \text{ για}$$

κάθε $x \neq 0$. Επομένως αφού η f έχει ακριβώς μία ρίζα και είναι διάφορη του μηδενός άρα η ρίζα είναι το μηδέν δηλαδή $f(0)=0$.

$$\delta) f(\ln(x^2)) + \ln x = f[(x-1)(x+1)] \Leftrightarrow f(\ln(x^2)) + \ln x = f(x^2-1) \quad (1)$$

Ισχύει για κάθε $x > 0$ ότι $\ln x \leq x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Για x το x^2 έχουμε: $\ln(x^2) \leq x^2-1$ για κάθε $x \neq 0$ αφού $x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

$$\text{Για } x \in (0,1) \text{ έχουμε ότι: } \ln(x^2) < x^2-1 \xrightarrow{f'} \Leftrightarrow f(\ln(x^2)) < f(x^2-1) \quad (2)$$

$$\text{Επίσης για } x \in (0,1) \text{ ισχύει ότι } \ln x < 0 \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2),(3) προκύπτει ότι: $f(\ln(x^2)) + \ln x < f(x^2-1)$ για κάθε $x \in (0,1)$.

$$\text{Για } x=1 \text{ ισχύει ότι } \ln(x^2) = x^2-1 \Rightarrow f(\ln(x^2)) = f(x^2-1) \text{ και } \ln 1 = 0.$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1]$ την $x=1$.

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο $x=\kappa > 0$ έχει εξίσωση

$$y-f(\kappa) = f'(\kappa)(x-\kappa) \Leftrightarrow y = f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή στο } (0, +\infty) \text{ ισχύει ότι } f(x) \geq f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa) \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και το ίσον ισχύει μόνο για } x = \kappa.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(\kappa)x = +\infty, \text{ είναι και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x=\lambda < 0 \text{ έχει εξίσωση}$$

$$y-f(\lambda) = f'(\lambda)(x-\lambda) \Leftrightarrow y = f'(\lambda)x - \lambda f'(\lambda) + f(\lambda). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι}$$

κοίλη στο $(-\infty, 0)$ ισχύει ότι $f(x) \leq f'(\lambda)x - \lambda f'(\lambda) + f(\lambda)$ για κάθε $x < 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = \lambda$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(\lambda)x - \lambda f'(\lambda) + f(\lambda)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(\lambda)x = -\infty$, είναι και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \text{ Επομένως } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $f'(x) = e^x + (x-2)e^x + \alpha$ και $f''(x) = e^x + e^x + (x-2)e^x = xe^x$.

Είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, 0]$, παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_0 = 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y + 2 = (\alpha - 1)x \Leftrightarrow y = (\alpha - 1)x - 2$.

Τότε $\alpha - 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 3$. **Σωστή απάντηση Β.**

$$2. f'(x) = \frac{4x^3}{12} + \frac{3\sqrt{\alpha-1}x^2}{6} + (\alpha-1)^2 x + 1 = \frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{\alpha-1}x^2}{2} + (\alpha-1)^2 x + 1$$

$$\text{και } f''(x) = x^2 + \sqrt{\alpha-1}x + (\alpha-1)^2 \text{ με } \Delta = (\alpha-1) - 4(\alpha-1)^2 = (\alpha-1)(5-4\alpha).$$

Αν $\alpha < 1$ ή $\alpha > \frac{5}{4}$ τότε $\Delta < 0$, οπότε $f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}$ και δεν έχει σημείο

καμπής. Αν $1 < \alpha < \frac{5}{4}$ τότε $\Delta > 0$, η f'' έχει δύο ρίζες, αλλάζει πρόσημο γύρω

τους οπότε η f έχει 2 σημεία καμπής και απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.

Αν $\alpha = 1$ τότε $f''(x) = x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ οπότε η f είναι κυρτή και δεν έχει σημεία καμπής.

$$\text{Αν } \alpha = \frac{5}{4} \text{ τότε } f''(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \text{ για κάθε } x \neq -\frac{1}{2} \text{ οπότε η}$$

f είναι κυρτή και δεν έχει σημεία καμπής.

Τελικά η f δεν έχει σημεία καμπής όταν $\alpha \leq 1$ ή $\alpha \geq \frac{5}{4}$ και η μικρότερη τιμή του φυσικού αριθμού α είναι το 0. **Σωστή απάντηση Δ.**

$$3. \text{ Η συνάρτηση } f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\alpha x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1 \text{ είναι συνεχής και δυο φορές}$$

$$\text{παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2} + x + 1 \text{ και } f''(x) = x^2 - \alpha x + 1 \text{ η}$$

οποία είναι τριώνυμο ως προς x με $\Delta = \alpha^2 - 4$

• Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \alpha < -2$ ή $\alpha > 2$ τότε η $f''(x)$ έχει δυο ρίζες

ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$) και είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < \rho_1$ ή $x > \rho_2$ και

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \rho_1 < x < \rho_2$ (αφού $\alpha = 1 > 0$). Άρα η f είναι κυρτή στα

διαστήματα $(-\infty, \rho_1]$ και $[\rho_2, +\infty)$, ενώ είναι κοίλη στο $[\rho_1, \rho_2]$.

- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ ή $\alpha = 2$ τότε η $f''(x)$ έχει μια διπλή ρίζα ρ και είναι $f''(x) \geq 0$ (αφού $\alpha = 1 > 0$) και μηδενίζεται μόνο για $x = \rho$ στο οποίο είναι συνεχής οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < \alpha < 2$ τότε η $f''(x) > 0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha \in [-2, 2]$.

Σωστή απάντηση Β.

4. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$ και $f''(x) = 6x + 2\alpha$. Πρέπει

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f(2) = -2 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2\alpha + \beta = 0 \\ 8 + 4\alpha + 2\beta + \gamma = -2 \\ 12 + 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -15 \\ \gamma = 44 \\ \alpha = -6 \end{cases} \quad \text{Τότε}$$

$f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 44$ με $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x-5)(x+1)$ και

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 5$, ενώ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$ οπότε η f

παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -1$

Επίσης, $f''(x) = 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και

κυρτή στο $[2, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x_1 = 2$.

Σωστή απάντηση Α.

5. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = e^x(1+x-\alpha)$$

και $f''(x) = e^x(2+x-\alpha)$. Είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2+x-\alpha > 0 \Leftrightarrow x > \alpha-2$ η f

είναι κοίλη στο $(-\infty, \alpha-2]$ και κυρτή στο $[\alpha-2, +\infty)$ και παρουσιάζει σημείο

καμπής στο $A(\alpha-2, -2e^{\alpha-2})$. Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος του σημείου

καμπής είναι η καμπύλη $y = -2e^x$. **Σωστή απάντηση Δ.**

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Σ	2. Λ	3. Λ	4. Λ	5. Λ	6. Σ	7. Λ	8. Λ	9. Σ	10. Σ
11. Σ	12. Λ	13. Σ	14. Σ	15. Σ	16. Σ	17. Λ	18. Σ	19. Σ	20. Λ
21. Σ	22. Σ	23. Σ	24. Σ	25. Σ					

31

Ασύμπτωτες

11.α) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \Rightarrow x = 1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)}{x-4} = 3 \Rightarrow$ η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} 1 \Rightarrow$ η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} \ln x = +\infty$ άρα η $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ε) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} = -\infty \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x} = +\infty \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

στ) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1} = -\infty \Rightarrow x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

12.α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 6} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 6} + x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} + 1} = 2 \Rightarrow y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 6} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}} - 1 \right) \right] = +\infty \Rightarrow$ δεν

έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = 2 \Rightarrow y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x} = -2 \Rightarrow y = -2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 6x + 5}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη}$$

στο $+\infty$. Όμοια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη και στο $-\infty$.

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x}}{\frac{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - (x+1) \ln(x+1)) = 0$ άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$14. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ κατακόρυφη}$$

ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} \left[(x-2) \frac{1}{x+5} \right] = +\infty \Rightarrow x = -5 \text{ κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\cancel{x^2} + 3x + 1 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$y = \frac{3}{4}$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(-\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right)}{\cancel{x}} = -4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 4x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4\cancel{x^2} + 3x + 1 - \cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(-\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2 \right)} = -\frac{3}{4}, \text{ άρα η } y = -4x - \frac{3}{4} \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη}$$

της C_f στο $-\infty$.

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \frac{1}{x} \right) = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη.}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta_{\mu x}}{x} = 1 \Rightarrow \nexists \text{ κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

$$\left| \frac{\eta_{\mu x}}{x} \right| = \frac{|\eta_{\mu x}|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta_{\mu x}}{x} \leq \frac{1}{|x|} \text{ και από το Κ.Π είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty \text{ και όμοια στο } -\infty.$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty(+\infty) = -\infty \text{ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο } -\infty.$$

$$15. \text{Αρκεί } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 1}{x - 2} - (2x - 1) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1 - 2x^2 + 4x + x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x - 2} = 0.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3x - 2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \Rightarrow x = 0 \text{ κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{1}{x^2} \right) = -2,$$

άρα η $y = 3x - 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty$$

17. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = ax + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\alpha x}{x} \right) = \alpha$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$
 άρα η C_f έχει στο $\pm\infty$ πλάγια ασύμπτωτη τον εαυτό της. Αν $\alpha = 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$
 τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \beta$ άρα η C_f έχει στο $\pm\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη τον εαυτό της.

Αυξημένης δυσκολίας

18. Για $y = x_0$ είναι $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{(x - x_0)^2}{|x - x_0| + 1}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^2}{|x - x_0| + 1} = 0$, άρα
 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και
 δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\text{19. Έστω } f(x) - x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + x^2 \eta\mu \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} + x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta\mu \frac{1}{x} \stackrel{\frac{1}{x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) + x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[g(x) + x \left(x \eta\mu \frac{1}{x} - x \right) \right] = 2$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x \eta\mu \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} = 2$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{συν} u - 1}{2u} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{DLH}} \frac{-\eta\mu u}{2} = 0, \text{ άρα η } y = x + 2 \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty.$$

$$\text{20. α) } A_f = (0, 1) \cup (1, +\infty). \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = 0, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{x-1} \right) = \frac{1}{2} \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = 0, \text{ άρα η } y = 0 \text{ είναι}$$

οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

β) Έστω $g(x) = 2e^x + x - 1$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) = 2e^x + 1 > 0$, άρα $g \nearrow$ στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) \geq g(0) = 1 > 0 \Leftrightarrow 2e^x + x - 1 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2e^x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x \left(2 + \frac{x}{e^x} - e^{-x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + \frac{x}{e^x} - e^{-x}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + x}{2e^x + x - 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 1}{2e^x + 1} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{2e^x} = 0, \text{ άρα η } y = \frac{1}{2}x$$

είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

21.α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta_{\mu x} \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta_{\mu x}}{x} \cdot x \ln x \right) = 0, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta_{\mu x}}{x} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\beta) \text{ Για πλάγια ασύμπτωτη έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta_{\mu x} \cdot \ln x}{x}.$$

$$\text{Είναι } \left| \frac{\eta_{\mu x} \cdot \ln x}{x} \right| = |\eta_{\mu x}| \left| \frac{\ln x}{x} \right| \leq \left| \frac{\ln x}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{\ln x}{x} \right| \leq \frac{\eta_{\mu x} \cdot \ln x}{x} \leq \left| \frac{\ln x}{x} \right|$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, λόγω του κριτηρίου

παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x \cdot \ln x}{x} = 0$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

$$22. \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + e^{-2x} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2, \text{ γιατί}$$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \text{ και από κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0. \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + e^{-2x} \eta\mu x) = -1, \text{ γιατί}$$

$$|e^{-2x} \eta\mu x| = |e^{-2x}| |\eta\mu x| \leq e^{-2x} \Leftrightarrow -e^{-2x} \leq e^{-2x} \eta\mu x \leq e^{-2x}. \text{ Επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-2x}) = 0, \text{ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} \eta\mu x = 0$. Επομένως η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\beta) f(x) = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 + e^{-2x} \eta\mu x = 2x - 1 \Leftrightarrow e^{-2x} \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Κοινά σημεία τα $(k\pi, 2k\pi - 1), k \in \mathbb{Z}$.

23. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[1, x]$, $x > 1$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$, άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει

$$\xi \in (1, x) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{f(x)}{x - 1}. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή, η}$$

$$f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}. \text{ Είναι } 1 < \xi < x \Leftrightarrow f'(1) < f'(\xi) <$$

$$f'(x) \leq 1 + \frac{\ln x}{x^2}. \text{ Όμως } 1 \leq f'(1) \leq 1 + \frac{\ln 1}{1^2} \Leftrightarrow 1 \leq f'(1) \leq 1 \Leftrightarrow f'(1) = 1, \text{ άρα}$$

$$1 < f'(\xi) < 1 + \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow 1 < \frac{f(x)}{x - 1} < 1 + \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow x - 1 < f(x) < x - 1 + \frac{(x - 1) \ln x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$0 < f(x) - (x - 1) < \frac{(x - 1) \ln x}{x^2}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 1) \ln x}{x^2} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \frac{x - 1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{2x} + \frac{x - 1}{2x^2} \right) = 0, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$ άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\lambda x + \beta)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x=-u \\ u \rightarrow -\infty}} (f(-u) - (-\lambda u + \beta)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (-f(u) + \lambda u - \beta) = 0 \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow -\infty} [-(f(u) - \lambda u + \beta)] = 0 \Leftrightarrow$$

$\lim_{u \rightarrow -\infty} (f(u) - (\lambda u - \beta)) = 0$, άρα η ευθεία $y = \lambda x - \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

25. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (a, \beta)$, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$. Όμως $f(A) = \mathbb{R}$, άρα $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty$. Άρα οι ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .

$$26. \text{Έστω } \frac{f(x) - x}{xf(x) + x^2 - 3x + 1} = g(x) \text{ με } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2. \text{ Τότε}$$

$$f(x) - x = g(x)(xf(x) + x^2 - 3x + 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x)(1 - xg(x)) = x + g(x)(x^2 - 3x + 1) \quad (1)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xg(x)) = -\infty$, άρα για πολύ μεγάλες τιμές του x είναι

$$1 - xg(x) < 0 \text{ και η (1) γίνεται: } f(x) = \frac{x + g(x)(x^2 - 3x + 1)}{1 - xg(x)}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + g(x)(x^2 - 3x + 1)}{1 - xg(x)} + x - 2 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + g(x)(x^2 - 3x + 1) + x - 2 - x(x - 2)g(x)}{1 - xg(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)(x^2 - 3x + 1 - x^2 + 2x) + 2x - 2}{1 - xg(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)(1 - x) + 2x - 2}{1 - xg(x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left[g(x) \frac{1-x}{x} + 2 - \frac{2}{x} \right]}{\cancel{x} \left(\frac{1}{x} - g(x) \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + 2 - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} - g(x)} = \frac{2(0-1) + 2 - 0}{0 - 2} = 0,$$

άρα η ευθεία $y = -x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(f(x) - 2x)^2 - 8(f(x) - 2x) \right] = -16 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(f(x) - 2x)^2 - 8(f(x) - 2x) + 16 \right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 4)^2 = 0.$$

$$\text{Είναι } -|f(x) - 2x - 4| \leq f(x) - 2x - 4 \leq |f(x) - 2x - 4| \Leftrightarrow$$

$$-(f(x) - 2x - 4)^2 \leq f(x) - 2x - 4 \leq (f(x) - 2x - 4)^2.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 4) = 0$, άρα η ευθεία $y = 2x + 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Εύρεση παραμέτρων σε συναρτήσεις με γνωστή ασύμπτωτη

28. Αν $x^2 + \alpha x + \beta \neq 0$, τότε $A_f = \mathbb{R}$ και η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αν ρ_1, ρ_2 ρίζες του τριωνύμου, τότε $A_f = \mathbb{R} - \{\rho_1, \rho_2\}$ και πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι οι $x = \rho_1$ και $x = \rho_2$. Άρα $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 4$. Τότε $1 + \alpha + \beta = 0$ (1) και $16 + 4\alpha + \beta = 0$ (2). Από το σύστημα των (1), (2)

$$\text{προκύπτει: } \alpha = -5 \text{ και } \beta = 4. \text{ Τότε } f(x) = \frac{4x - 5}{x^2 - 5x + 4} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{4x - 5}{x - 4} \cdot \frac{1}{x - 1} \right) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{4x - 5}{x - 1} \cdot \frac{1}{x - 4} \right) = +\infty.$$

29. Επειδή $A_f = \mathbb{R} - \{\gamma\}$, η ευθεία $x = \gamma$ είναι η μόνη πιθανή κατακόρυφη

ασύμπτωτη της C_f . Άρα $\gamma = 2$. Τότε $f(x) = \frac{(a-1)x^2 + \beta x + 3}{x - 2}$. Για να είναι η ευθεία $y = 2$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Αν $a \neq 1$,

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x^2}{x} = \pm\infty \text{ άτοπο, άρα } a = 1.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta x + 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\beta + \frac{3}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = \beta, \text{ άρα } \beta = 2. \text{ Τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[(2x+3) \frac{1}{x-2} \right] = -\infty.$$

30. Είναι $\lambda_{AB} = \frac{5-3}{3-2} = 2$ και $\varepsilon: y = 2x-1$.

Πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x-1)) = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x-1)) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 - \beta x + 2}{x-3} - (2x-1) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^2 + (7-\beta)x - 1}{x-3}.$$

Αν $\alpha \neq 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^2}{x} = \pm\infty$, οπότε για να είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x-1)) = 0 \text{ πρέπει } \alpha = 2.$$

Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(7-\beta)x - 1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7-\beta-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 7-\beta$.

Πρέπει $7-\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 7$.

31. Πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x-4)) = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x-4)) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\alpha+1)x^2 - \beta x + \gamma}{x+\gamma} - (3x-4) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^2 + (3\gamma+4-\beta)x + 5\gamma}{x+\gamma}$$

Αν $\alpha \neq 2$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x-4)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha-2)x^2}{x} = \pm\infty$, άρα πρέπει

$$\alpha = 2. \text{ Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (3x-4)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3\gamma+4-\beta)x + 5\gamma}{x+\gamma} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\gamma+4-\beta+\frac{5\gamma}{x}}{1+\frac{\gamma}{x}} = 3\gamma+4-\beta. \text{ Πρέπει } 3\gamma+4-\beta = 0 \quad (1)$$

Επειδή $A_f = \mathbb{R} - \{-\gamma\}$, η ευθεία $x = -\gamma$ είναι η μόνη πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Άρα $\gamma = 2$ και $(1) \Rightarrow 6+4-\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 10$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 - 10x + 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[(3x^2 - 10x + 2) \frac{1}{x+2} \right] = +\infty.$$

32. Για να είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y = -2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta}{x} + \frac{10}{x^2}} - \gamma \right) \right].$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta}{x} + \frac{10}{x^2}} - \gamma \right) = \alpha - \gamma, \text{ αν } \alpha - \gamma > 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\text{ενώ αν } \alpha - \gamma < 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty. \text{ Άρα για να είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2, \text{ πρέπει}$$

$$\alpha - \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha = \gamma. \text{ Τότε } f(x) = \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta x + 10} - \alpha x. \text{ Για να είναι η ευθεία}$$

$$\varepsilon_2: y = -2x + 2 \text{ είναι ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } -\infty, \text{ πρέπει}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x + 2)) = 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x + 2)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta x + 10} - \alpha x + 2x - 2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta x + 10} - (\alpha - 2)x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta}{x} + \frac{10}{x^2}} - \alpha + 2 - \frac{2}{x^2} \right) \right]$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta}{x} + \frac{10}{x^2}} - \alpha + 2 - \frac{2}{x^2} \right) = -2\alpha + 2, \text{ αν } -2\alpha + 2 > 0 \text{ τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x + 2)) = +\infty, \text{ ενώ αν } -2\alpha + 2 < 0 \Leftrightarrow \alpha > 1, \text{ τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x + 2)) = -\infty. \text{ Άρα για να είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x + 2)) = 0, \text{ πρέπει } -2\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \gamma = 1. \text{ Τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-2x + 2)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + \beta x + 10} + x - 2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\cancel{x^2} + \beta x + 10 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + \beta x + 10} - x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\cancel{x} \left(\beta + \frac{10}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 + \frac{\beta}{x} + \frac{10}{x^2}} - 1 \right)} - 2 \right) = -\frac{\beta}{2} - 2$$

$$\text{Πρέπει } -\frac{\beta}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow \beta = -4.$$

Εύρεση παραμέτρων σε συναρτήσεις με άγνωστη ασύμπτωτη

$$\mathbf{33.α)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 5$$

$$\mathbf{\beta)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda f(x) + 4x}{x f(x) - 2x^2 + 3x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\lambda \frac{f(x)}{x} + 4 \right)}{\cancel{x} (f(x) - 2x + 3)} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\lambda + 4}{5 + 3} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$34. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 4, \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 4x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 4x^2 + 6x\eta\mu x}{x^2 f(x) - 4x^3 + 2\eta\mu x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{f(x)}{x} - 4 + 6 \frac{\eta\mu x}{x} \right)}{x^2 \left(f(x) - 4x + 2 \frac{\eta\mu x^2}{x^2} \right)} = \frac{4 - 4 + 6 \cdot 0}{3 + 2 \cdot 0} = 0$$

γιατί $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ και από Κ.Π. είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

και όμοια $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x^2}{x^2} = 0$.

Αυξημένης δυσκολίας

35. Αρκεί να βρούμε τα λ, β για τα οποία η $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη

της $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x + 1}$ στο $-\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 3}{x + 1} - 2x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x}{x} = -7, \text{ άρα η ευθεία}$$

$y = 2x - 7$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, επομένως $\lambda = 2$ και $\beta = -7$.

36. Αρκεί να βρούμε τη πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, x \neq 0$ στο $+\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta\mu \frac{1}{x} \stackrel{\frac{1}{x}=u \Leftrightarrow x=\frac{1}{u}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - x \right) \stackrel{\frac{1}{x}=u \Leftrightarrow x=\frac{1}{u}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \eta\mu u - \frac{1}{u} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{DLH \ u \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0, \text{ άρα η } y=x \text{ είναι ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο}$$

$+\infty$, οπότε $\lambda = 1$ και $\beta = 0$.

37. Αρκεί να βρούμε τα α, β για τα οποία η $y = \alpha x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη

της C_f στο $+\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x} + 2 + \frac{1}{x} \right) = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(e^{-x} + 2) + 1 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + 1 \right) = 1, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \text{ Άρα η ευθεία } y=2x+1 \text{ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της}$$

C_f στο $+\infty$, οπότε $\alpha=2$ και $\beta=1$.

Συνδυασμός ασυμπτωτών f, g

38.α) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -7$,

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{4}{x} \right) = 3 - 1 = 2.$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(9 \frac{g(x)}{x} + 3 + \frac{\eta\mu 2x}{x} \right)}{\cancel{x} \left(f(x) - 3x + \frac{1}{x} \right)} = \frac{18 + 3 + 0}{-7 + 0} = -3$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x + 7) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x - 4 - 3x + 7) = 0 \Leftrightarrow$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x + 3) = 0$ άρα η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

39. Έστω $\varepsilon_1: y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda_2 x + \beta_2$ οι πλάγιες ασύμπτωτες των

C_g, C_f αντίστοιχα. Τότε $\lambda_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και $\lambda_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Για να είναι

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.

Στη σχέση $|g(x)f(x) + x^2| \leq x \ln x$ διαιρούμε με x^2 , και έχουμε:

$$\left| \frac{g(x)f(x) + x^2}{x^2} \right| \leq \frac{x \ln x}{x^2} \Leftrightarrow \left| \frac{g(x)f(x)}{x^2} + 1 \right| \leq \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\ln x}{x} \leq \frac{g(x)f(x)}{x^2} + 1 \leq \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x} - 1 \leq \frac{g(x)f(x)}{x^2} \leq \frac{\ln x}{x} - 1.$$

Όμως, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -1, \text{ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)f(x)}{x^2} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = -1 \text{ άρα } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1.$$

40. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (-x + 4)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - (-x + 4)) = 0 \Leftrightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 4)) = 0$, άρα η ευθεία $y = x + 4$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

41. Είναι $g'(x) = f'(x) + 3 \Leftrightarrow g'(x) = (f(x) + 3x)'$.

$g(x) = f(x) + 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$. Επειδή οι C_f , C_g τέμνονται επί της ευθείας

$x = 2$, ισχύει: $f(2) = g(2)$. Όμως $f(2) = g(2) + 6 + c \Leftrightarrow c = -6$ και

$g(x) = f(x) + 3x - 6$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η C_g έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία

$y = -x + 2$, ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (-x + 2)) = 0 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 3x - 6 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 4x - 8) = 0$. Οπότε η ευθεία

$y = -4x + 8$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

42. Αρχικά θα βρούμε το βαθμό της g .

Επειδή η ευθεία ε_3 διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$, είναι η $y = x$.

Επειδή η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y = x$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Αν το πολυώνυμο g είναι 1ου βαθμού, τότε θα είναι της μορφής $g(x) = ax + \beta$,

$\alpha \neq 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 10}{\alpha x^2 + \beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{\alpha x^{\cancel{2}}} = \infty$ απορρίπτεται.

Αν το πολυώνυμο g έχει βαθμό $v \geq 3$, τότε

$g(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $f(x) = \frac{x^3 - x + 10}{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 10}{\alpha_v x^{v+1} + \alpha_{v-1} x^v + \dots + \alpha_1 x^2 + \alpha_0 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\alpha_v x^{v+1}} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_v x^{v-2}} = 0$ απορρίπτεται. Άρα το g είναι 2ου βαθμού.

Έστω $g(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 10}{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{\alpha x^{\cancel{3}}} = \frac{1}{\alpha}$. Είναι $\frac{1}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$ αντίστοιχα. Αν η g δεν έχει ρίζες, τότε η f θα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και δεν θα έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αν η g έχει μία ρίζα, τότε η f θα έχει το πολύ μία κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επομένως, επειδή οι $x = -1$ και $x = 1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες, τα $-1, 1$ είναι ρίζες της g , άρα $g(-1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \beta + \gamma = 0$ (1) και

$g(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \beta + \gamma = 0$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $2 + 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -1$ και από την (1) $\Rightarrow \beta = 0$. Άρα $g(x) = x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.

Θεωρητικές ασκήσεις

43. Η συμμετρική ευθεία της $y = \alpha$ ως προς την ευθεία $y = x$ είναι η $x = \alpha$.

Ευθύ: Αν η ευθεία $y = \alpha$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha.$$

Ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ άρα έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ (1)

Επίσης έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) \stackrel{f(x)=u, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=u}{=} \lim_{u \rightarrow \alpha} f^{-1}(u)$ (2) δηλαδή από (1) και

(2) είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f^{-1}(x) = +\infty$ άρα η ευθεία $x = \alpha$ είναι

κατακόρυφη ασύμπτωτη της.

Αντιστρόφως: Αν η ευθεία $x = \alpha$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f^{-1}(x) = +\infty \text{ αφού το σύνολο τιμών της } f^{-1} \text{ είναι το } (0, +\infty).$$

Ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ άρα έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(f^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} x = \alpha$ (3)

Επίσης έχουμε $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(f^{-1}(x)) \stackrel{f^{-1}(x)=u, \lim_{x \rightarrow \alpha} f^{-1}(x)=+\infty}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u)$ (4) δηλαδή από (3) και

(4) είναι $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(f^{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$ άρα η ευθεία $y = \alpha$ είναι οριζόντια

ασύμπτωτη της στο $+\infty$.

44. Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 1$, είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow -\infty} \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x (f(x) + f'(x))}{e^x} = 1 + \lambda \Leftrightarrow 1 = 1 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0, \text{ άρα η γραφική παράσταση}$$

της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τον άξονα $x'x$.

45. Έστω ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = \beta$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \beta. \text{ Είναι } \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} f(x)}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \underset{\text{DLH}}{=} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x)}{-e^{-x}} \Leftrightarrow \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^{-x}} (-f(x) + f'(x))}{\cancel{e^{-x}}} \Leftrightarrow$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - f'(x)] = \beta - \alpha \quad \alpha = 0 \text{ που είναι άτοπο.}$$

46.α) Έστω ότι $C_f \equiv C_2$ και $C_{f'} \equiv C_1$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

$$\text{Είναι } \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \underset{\text{DLH}}{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = +\infty \text{ πράγμα άτοπο.}$$

β) Αφού $C_f \equiv C_1$ και $C_{f'} \equiv C_2$ τότε είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \alpha. \text{ Είναι } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \underset{\text{DLH}}{\lim_{x \rightarrow +\infty}} f'(x) = \alpha.$$

47. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

α) Η συνάρτηση $f + g$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι ο άξονα $y'y$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + g(x)) = f(0)$ άρα ο άξονα $y'y$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{g(x)}{x} \right) = 1 + (+\infty) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \underset{\text{DLH}}{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \frac{g'(x)}{1} = +\infty, \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \epsilon\phi 45^\circ = 1 \text{ γιατί η ασύμπτωτη}$$

της C_f στο $+\infty$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° άρα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \epsilon\phi 45^\circ = 1$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα είναι η $y = x$. Άρα η $f + g$ δεν έχει ασύμπτωτες.

β) Η συνάρτηση $f \cdot g$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη

είναι ο άξονα $y'y$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x)g(x)) = 0$ άρα ο άξονα $y'y$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} g(x) \right) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$ άρα δεν έχει ούτε

πλάγιες ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty$ οπότε δεν έχει και οριζόντιες ασύμπτωτες.

γ) Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα ρ άρα συνάρτηση $\frac{1}{g}$

ορίζεται στο $(0, \rho) \cup (\rho, +\infty)$. Πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι οι

ευθείες $x = 0$ και $x = \rho$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \rho)$

άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x)} = -\infty$ οπότε ο $y'y$ άξονας είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow \rho} g(x) = 0$, $g(x) < 0$ για $x \in (0, \rho)$ και $g(x) > 0$ για $x > \rho$ άρα

$\lim_{x \rightarrow \rho^-} \frac{1}{g(x)} = -\infty$ ενώ $\lim_{x \rightarrow \rho^+} \frac{1}{g(x)} = +\infty$ άρα η $x = \rho$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$ άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ) Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα ρ άρα συνάρτηση $\frac{f}{g}$

ορίζεται στο $(0, \rho) \cup (\rho, +\infty)$. Πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες είναι οι

ευθείες $x = 0$ και $x = \rho$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ και

$g(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \rho)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) > 0$ άρα ο $y'y$ άξονας είναι

κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι $\lim_{x \rightarrow \rho^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow \rho^-} g(x) = 0$ και

$g(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \rho)$ και $\lim_{x \rightarrow \rho^-} f(x) = f(\rho) > 0$ άρα η $x = \rho$

κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$ αφού

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} f'(x)$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$, άρα ο άξονας

$x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

ε) Η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται στο

$A = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x > 0 / x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$. Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι ο άξονα $y'y$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x)) \stackrel{g(x)=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = f(0) > 0$ άρα ο άξονα $y'y$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(g(x)) \stackrel{g(x)=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$ άρα δεν έχει

οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f \circ g)(x)}{x} \stackrel{+ \infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(g(x))}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(g(x))g'(x)] = +\infty$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(g(x)) \stackrel{g(x)=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$ άρα δεν έχει ούτε πλάγιες ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες.

48.α) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$.

Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lambda$. Τότε $f(x) = xg(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \lambda > 0 \\ +\infty & \lambda < 0 \end{cases}, \text{ οπότε: } \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$$

$$\beta) \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\frac{f(x)}{x} - \lambda \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - \lambda \left(\frac{0}{0} \right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{f(x)}{x} - \lambda \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - xf'(x)).$$

49.α) Επειδή η $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta. \text{ Είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot x = +\infty$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right] = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2, \text{ γιατί αν θέσουμε } f(x) = u,$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = \lambda. \text{ Ακόμη}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - \lambda^2 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - \lambda f(x) + \lambda f(x) - \lambda^2 x] \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - \lambda^2 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(f(f(x)) - \lambda f(x)) + \lambda(f(x) - \lambda x)] \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - \lambda^2 x] = \beta + \lambda\beta, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(f(x)) - \lambda f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(u) - \lambda u) = \beta. \text{ Οπότε η ευθεία } y = \lambda^2 x + \beta + \lambda\beta$$

είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της fof στο $+\infty$.

γ) Για να δέχονται οι γραφικές παραστάσεις των f , fof , δέχονται κοινή ασύμπτωτη στο $+\infty$, πρέπει οι ευθείες $y = \lambda x + \beta$ και $y = \lambda^2 x + \beta + \lambda\beta$, να

$$\text{ταυτίζονται. Αυτό συμβαίνει όταν } \begin{cases} \lambda = \lambda^2 \\ \beta = \beta + \lambda\beta \end{cases} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1 = \lambda \\ \beta = \beta + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}. \text{ Άρα οι}$$

C_f, C_{fof} δέχονται ως κοινή ασύμπτωτη την $y = x$.

Σύνθετες ασκήσεις

$$50.a) \text{ Η } f \text{ ορίζεται όταν } \begin{cases} -x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x \leq 0, \text{ οπότε } A_f = (-\infty, 0].$$

Η g ορίζεται όταν $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ή } x \geq 2$, οπότε

$A_g = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Επειδή $A_f \neq A_g$ είναι και $f \neq g$. Όταν όμως

$$x \in (-\infty, 0], \text{ τότε } f(x) = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{2-x} = \sqrt{-x(2-x)} = \sqrt{-2x+x^2} = g(x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - \eta\mu x}{\sqrt{-x(1-x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{2-x} - \eta\mu x}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{2-x}}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{1-x}} - \frac{\eta\mu x}{\sqrt{-x} \cdot \sqrt{1-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{\eta\mu x \sqrt{-x}}{(\sqrt{-x})^2 \cdot \sqrt{1-x}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{\eta\mu x \sqrt{-x}}{-x \cdot \sqrt{1-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-x}} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{1-x}} \right) = \sqrt{2} + 1 \cdot 0 = \sqrt{2}$$

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{2}\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει τοπικά ελάχιστα τα $g(0) = g(2) = 0$.

δ) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = g'(x) = \frac{x-1}{2\sqrt{x^2 - 2x}} < 0$ και επειδή η g είναι

συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} = y, y \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow -x+1 = \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y^2 + 1}$$

Είναι $x \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{y^2 + 1} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ ισχύει. Άρα $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y^2 + 1}, y \geq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x^2 + 1}, x \geq 0$.

ε) Για να υπάρχει τέτοια εφαπτομένη πρέπει να υπάρχει $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } g'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = 1 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{x^2 - 2x} \quad (1)$$

- Αν $x \in (-\infty, 0)$ τότε η (1) είναι αδύνατη.

- Αν $x \in (2, +\infty)$, τότε η (1) γίνεται:

$$(x-1)^2 = (\sqrt{x^2 - 2x})^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2\cancel{x} + 1 = \cancel{x^2} - 2\cancel{x} \text{ αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει}$$

εφαπτομένη της C_g που να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

στ) Επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{\cancel{x}} = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x} + x)(\sqrt{x^2 - 2x} - x)}{\sqrt{x^2 - 2x} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 2x})^2 - x^2}{-x\sqrt{1 - \frac{2}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2}}{-x\left(\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + 1} = 1, \text{ άρα η}$$

$y = -x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f .

51.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = 2(\ln x - x)(\ln x - x)' = 2(\ln x - x)\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 2(\ln x - x)\frac{1-x}{x}.$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$, όμως $x - 1 < x$, άρα $\ln x \leq x - 1 < x \Rightarrow \ln x - x < 0$.

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\ln x - x)\frac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = (\ln 1 - 1)^2 = 1$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty - 0 = -\infty$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x)^2 \stackrel{\ln x - x = u}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} u^2 = +\infty$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) \right] = +\infty(0 - 1) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)^2 \stackrel{\ln x - x = u}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} u^2 = +\infty$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = [1, +\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = [1, +\infty)$. Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [1, +\infty)$. Θεωρούμε έναν τυχαίο αριθμό στο εσωτερικό του $f(\Delta_1) = [1, +\infty)$, έστω το 5. Τότε υπάρχει x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 5$. Όμως το 5 βρίσκεται και στο εσωτερικό του $f(\Delta_2) = [1, +\infty)$, οπότε υπάρχει x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 5$. Είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Επειδή η f

είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Όμως η f' έχει μοναδική ρίζα το 1, άρα $\xi = 1$.

γ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$, δηλαδή τον άξονα $y'y$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(\ln x - x) \frac{1-x}{x} = 2(-\infty)(-1) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x) = -\infty$, οπότε η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

δ) Έστω $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = \ln x - x$, $x > 0$. Είναι $(g \circ h)(x) = f(x)$ γιατί: $A_{g \circ h} = \{x \in A_h / h(x) \in A_g\} = \{x \in (0, +\infty) / (\ln x - x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty) = A_f$ και $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = h^2(x) = (\ln x - x)^2 = f(x)$

ε) $f(\rho) = \rho^2 - 2 \Leftrightarrow f(\rho) - \rho^2 + 2 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - x^2 + 2$, $x \in [1, e]$. Η φ είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $\varphi(1) = f(1) - 1 + 2 = 2 > 0$, $\varphi(e) = f(e) - e^2 + 2 = 1 - 2e + e^2 - e^2 + 2 = 3 - 2e < 0$, δηλαδή $\varphi(1)\varphi(e) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \rho^2 - 2$.

52.α) Η f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία (ε) οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^2 - x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^{\cancel{2}}}{x^{\cancel{2}}} = 3 \Leftrightarrow \alpha = 3. \quad (\text{Αν } \alpha = 0$$

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta x + \gamma}{x^2 - x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\beta x^{\cancel{1}}}{x^{\cancel{2}}} = 0 \text{ απορρίπτεται, αν } \beta \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\gamma}{x^2} = 0 \text{ απορρίπτεται, αν } \beta = 0 \text{ και } \gamma \in \mathbb{R} \end{cases})$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + \beta x + \gamma}{x - 1} - 3x \right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3x^2} + \beta x + \gamma - \cancel{3x^2} + 3x}{x - 1} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta+3)x + \gamma}{x-1} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\beta + 3 + \frac{\gamma}{x} \right)}{\cancel{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = -1 \Leftrightarrow \beta + 3 = -1 \Leftrightarrow \beta = -4.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2 - 4x + \gamma}{x-1} \right)' = \frac{(6x-4)(x-1) - (3x^2 - 4x + \gamma)}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{6x^2 - 6x - 4x + 4 - 3x^2 + 4x - \gamma}{(x-1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 4 - \gamma}{(x-1)^2}.$$

Επομένως είναι παραγωγίσιμη και στο $2 \in \mathbb{R}$, το οποίο είναι θέση ακροτάτου της φορπότε ισχύει το θεώρημα Fermat δηλαδή $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 4 - \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 4$.

Άρα $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 4}{x-1}$.

γ)

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2} = \frac{3(x^2 - 2x)}{(x-1)^2}.$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
f'	+	ϕ	-	-	ϕ	+
f	$\nearrow$	TM	$\searrow$	$\searrow$	TE	$\nearrow$

Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}}_{>0} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 0) \text{ ή } (x \geq 2).$

Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$, $f'(x) > 0$ στα διαστήματα $(-\infty, 0), (2, +\infty)$, $f'(x) < 0$ στα διαστήματα $(0, 1), (1, 2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0], [2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 1], (1, 2]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0) = -4$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2) = 8$.

δ) Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 4x + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty,$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 4x + 4) \frac{1}{x-1} = 3 \cdot (-\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 4x + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - 4x + 4) \frac{1}{x-1} = 3 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Έστω $A_1 = (-\infty, 0), A_2 = [0, 1], A_3 = (1, 2]$ και $A_4 = (2, +\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (-\infty, f(0)) = (-\infty, -4),$$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), f(0) \right] = (-\infty, -4],$$

$$f(A_3) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = [8, +\infty), \quad f(A_4) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (8, +\infty).$$

$$\text{Τότε : } f(A_f) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = (-\infty, -4] \cup [8, +\infty).$$

53.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με παράγωγο

$$f'(x) = e^x \cdot (\ln x + 2x) + e^x \cdot \left(\frac{1}{x} + 2 \right) \Leftrightarrow f'(x) = e^x \cdot \left(\ln x + 2x + \frac{1}{x} + 2 \right).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $l(x) = \ln x + 2x + \frac{1}{x} + 2, x > 0$. Η l είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $l'(x) = \frac{1}{x} + 2 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow l'(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2}$. Έχουμε

$$l'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x - 1) \left(x + 1 \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} >0 \end{matrix}$$

$$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}. \text{ Η } l \text{ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της,}$$

$$l'(x) > 0 \text{ στο } \left(\frac{1}{2}, +\infty \right), l'(x) < 0 \text{ στο } \left(0, \frac{1}{2} \right) \text{ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

$$\left[\frac{1}{2}, +\infty \right), \text{ γνησίως φθίνουσα στο } \left(0, \frac{1}{2} \right] \text{ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο } \frac{1}{2},$$

$$\text{το } l\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{e^5}{2} > \ln 1 > 0. \text{ Επομένως } l(x) \geq l\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Όμως $f'(x) = e^x \cdot l(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) i) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε έχει σύνολο τιμών το $f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^x (\ln x + 2x) \right] = l(-\infty + 0) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x (\ln x + 2x) \right] = +\infty (+\infty + \infty) = +\infty.$$

ii) Έστω $(\delta): y = a, a \in \mathbb{R}$ τυχαία οριζόντια ευθεία.

Το $a \in f((0, +\infty))$ οπότε υπάρχει μοναδικός, λόγω της μονοτονίας της f , $\eta > 0$ τέτοιος ώστε $f(\eta) = a$. Άρα η ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει

οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία σε ένα ακριβώς σημείο αφού η (δ) είναι τυχαία ευθεία.

γ) Έστω $B(x_0, f(x_0))$, $x_0 > 0$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f . Η (ε) έχει εξίσωση:

$$y - e^{x_0} \cdot (\ln x_0 + 2x_0) = e^{x_0} \cdot \left(\ln x_0 + 2x_0 + \frac{1}{x_0} + 2 \right) (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = e^{x_0} \left(\ln x_0 + 2x_0 + \frac{1}{x_0} + 2 \right) x - x_0 e^{x_0} \left(\ln x_0 + 2x_0 + \frac{1}{x_0} + 2 \right) + e^{x_0} (\ln x_0 + 2x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = e^{x_0} \left(\ln x_0 + 2x_0 + \frac{1}{x_0} + 2 \right) x - e^{x_0} (x_0 \ln x_0 + 2x_0^2 + 1 + \cancel{2x_0} - \ln x_0 - \cancel{2x_0}) \Leftrightarrow$$

$$y = e^{x_0} \left(\ln x_0 + 2x_0 + \frac{1}{x_0} + 2 \right) x - e^{x_0} (x_0 \ln x_0 + 2x_0^2 + 1 - \ln x_0).$$

Το σημείο Α ανήκει στην (ε) οπότε: $-3e = -e^{x_0} (x_0 \ln x_0 + 2x_0^2 + 1 - \ln x_0) \Leftrightarrow$
 $e^{x_0} (x_0 \ln x_0 + 2x_0^2 + 1 - \ln x_0) - 3e = 0$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = e^x (x \ln x + 2x^2 + 1 - \ln x) - 3e$, $x > \frac{1}{2}$

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$k'(x) = e^x (x \ln x + 2x^2 + 1 - \ln x) + e^x \left(\ln x + 1 + 4x - \frac{1}{x} \right)$$

$$k'(x) = e^x \left(x \ln x + 2x^2 + 1 - \cancel{\ln x} + \cancel{\ln x} + 1 + 4x - \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$k'(x) = e^x \left(x \ln x + 2x^2 + 2 + 4x - \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$k'(x) = e^x \left(x (\ln x + 2x + 2) + 1 + 2x - \frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$k'(x) = e^x \left(x \left(\ln x + 2x + \frac{1}{x} + 2 \right) + \frac{2x^2 + x - 1}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$k'(x) = e^x \left(\underbrace{xf'(x) + \frac{l'(x)}{x}}_{>0 \text{ από α)ερ}} \right) > 0 \text{ άρα η } k \text{ είναι γνησίως αύξουσα.}$$

Από την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα : $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow k(x_0) = k(1) \Leftrightarrow x_0 = 1$
 και (ε) : $y = 5e \cdot x - 3e$.

δ) Από το 2^ο ερώτημα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$ και δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot (\ln x + 2x)}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \left[e^x \cdot (\ln x + 2x) + e^x \cdot \left(\frac{1}{x} + 2 \right) \right] =$$

$+\infty \cdot (+\infty + \infty) + +\infty \cdot (0 + 2) = +\infty$ άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

54.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με: $f'(x) = \frac{\ln x (x+2)}{x}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x (x+2)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(1) = 0$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x + x \ln x - x + 1) = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x - 1) = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln^2 x + x(\ln x - 1) + 1] = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x(\ln x - 1) - 1] = +\infty.$$

Για το διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, έχουμε: $f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [0, +\infty)$. Για το

διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, έχουμε: $f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$. Οπότε το

σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, +\infty)$. Για κάθε $x \in (0, 1)$

είναι $f(x) > f(1) = 0$ και για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f(x) > f(1) = 0$, δηλαδή

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Επειδή $f(1) = 0$, η $x = 1$ είναι η

μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, η $x = 0$ δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη

ασύμπτωτη της C_f . Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + x(\ln x - 1) + 1}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \stackrel{DLH}{=}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \ln x}{x} + \ln x - 1 + 1}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln x}{x} + \ln x \right) = +\infty,$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x + x(\ln x - 1) + 1}{(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2 \ln x}{x} + \ln x - 1 + 1}{2(x-1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x(x+2)}{2x(x-1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+2}{x} + \ln x}{2(x-1) + 2x} = \frac{3}{2}.$$

ε) Είναι $f''(x) = \frac{x+2-2\ln x}{x^2}$. Έστω $h(x) = x+2-2\ln x$, $x > 0$. Είναι

$h'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$. Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow (0, 2]$ και για κάθε $x > 2$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow [2, +\infty)$. Η h έχει ελάχιστο το $h(2) = 2(2 - \ln 2) > 0$, άρα $h(x) \geq h(2) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup (0, +\infty)$

$$55. \alpha) f(x) = x(1 + e^{-2x}), f'(x) = \frac{e^{2x} - 2x + 1}{e^{2x}} \text{ και } f''(x) = 4(x-1)e^{-2x}.$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $e^{2x} - 2x + 1$. Έστω $g(x) = e^{2x} - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$g'(x) = 2e^{2x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0. \text{ Για κάθε } x < 0 \text{ είναι } g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0],$$

οπότε $g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο}$$

$x_0 = 0$ είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$. $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4(x-1)e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Για κάθε $x < 1$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, +\infty).$$

β) Επειδή $f \nearrow \mathbb{R}$, δεν έχει ακρότατα. Σημείο καμπής το $(1, f(1)) \equiv \left(1, 1 + \frac{1}{e^2}\right)$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^{-2x}) = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x(e^{2x} + 1)}{e^{2x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0, \text{ άρα η}$$

ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^{-2x}) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0, \text{ η ευθεία } y = x \text{ είναι}$$

ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Είναι $f(x) - x = \frac{x}{e^{2x}}$.

Αν $x > 0$ τότε $f(x) > x$ ενώ αν $x < 0$ τότε $f(x) < x$.

$$\delta) f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(e^{2x} + 1)}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 2x + 1}{e^{2x}} \Leftrightarrow$$

$$xe^{2x} - e^{2x} + 3x - 1 = 0. \text{ Έστω } a(x) = e^{2x}(x - 1) + 3x - 1, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$a'(x) = 2e^{2x}(x - 1) + e^{2x} + 3 = e^{2x}(2x - 1) + 3, \quad a''(x) = 4xe^{2x}.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $a''(x) < 0 \Rightarrow a' \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$a''(x) > 0 \Rightarrow a' \nearrow [0, +\infty)$. Η a' έχει ελάχιστο το $a'(0) = 4 > 0$ άρα

$$a'(x) \geq a'(0) > 0 \Rightarrow a' \nearrow \mathbb{R}. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{2x}(x - 1) + 3x - 1] = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}(x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{e^{-2x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2e^{-2x}} = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = -\infty. \text{ Η } a$$

έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ άρα η εξίσωση $a(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

$$56. \alpha) f'(x) + f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x) + e^x f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1} + e^x \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (e^x \sqrt{x^2 + 1})' \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1} + c \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{c}{e^x}, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f(1) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} + \frac{c}{e} \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Επομένως τελικά } f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) \text{ Η συνάρτηση } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Για } x > 0 \stackrel{\sqrt{x^2 + 1} > 0}{\Rightarrow} f'(x) > 0 \text{ και για}$$

$x < 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+1} > 0}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν τότε $f \searrow (-\infty, 0]$ και $f \nearrow [0, +\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο μηδέν το $f(0) = 1$.

$$\gamma) x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \Leftrightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| < 1 \Leftrightarrow |f'(x)| < 1.$$

Αν $x_1 = x_2$ τότε ισχύει ως ισότητα η σχέση που θέλουμε να δείξουμε.

Αν $x_1 < x_2$ από ΘΜΤ για την f στο $[x_1, x_2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow |f'(\xi)| = \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| < 1 \Leftrightarrow$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| \Leftrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|. \text{ Ομοίως αν } x_1 > x_2.$$

$$\delta) \frac{f^2(x)}{x-2} + \frac{f^4(x) - 2x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x-2} + \frac{x^4+2x^2+1-2x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+1}{x-2} + \frac{x^4+1}{x-1} \stackrel{x \neq 1, 2}{=} 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1) + (x-2)(x^4+1) = 0$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = (x-1)(x^2+1) + (x-2)(x^4+1)$, $x \in [-2, 2]$. Η g είναι συνεχής και $g(1) = -2 < 0$, $g(2) = 5 > 0$ άρα από το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

ε) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1 \text{ και}$$

$$\begin{aligned} \text{επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0. \end{aligned}$$

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0 \end{aligned}$$

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = -x$.

$$57.a) \text{ Είναι } h'(x) = 5x^4 f(x) + x^5 f'(x) = 5x^4 f(x) + x^4 x f'(x) =$$

$$5x^4 f(x) - 5x^4 f(x) = 0 \text{ άρα } h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases}.$$

β) Αφού η f είναι άρτια και $f(1) = 3$ τότε $f(-1) = f(1) = 3$ άρα

$$h(1) = 1^5 \cdot 3 = 3 = c_2, \quad h(-1) = (-1)^5 \cdot 3 = -3 = c_1. \text{ Άρα } h(x) = \begin{cases} -3, & x < 0 \\ 3, & x > 0 \end{cases} \text{ οπότε}$$

$$\text{για } x < 0: x^5 f(x) = -3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-3}{x^5} \text{ ενώ για } x > 0 \text{ είναι}$$

$$x^5 f(x) = 3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{x^5}. \text{ Οπότε } f(x) = \begin{cases} \frac{-3}{x^5}, & x < 0 \\ \frac{3}{x^5}, & x > 0 \end{cases}.$$

γ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια

$$\text{ασύμπτωτη } C_f \text{ στο } +\infty \text{ και στο } -\infty. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^5} = +\infty \Rightarrow x = 0$$

κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

58.a) Επειδή $y = 4x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (4x + 5)] = 0. \text{ Έστω } h(x) = f(x) - (4x + 5) \text{ (1) με } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

τότε αφού $x + 1 \rightarrow +\infty$ θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x + 1) = 0$. Στην (1) όπου x το

$$x + 1 \text{ προκύπτει } h(x + 1) = f(x + 1) - [4(x + 1) + 5] \text{ (2). Αφαιρώντας (2) - (1)}$$

$$\text{έχω } h(x + 1) - h(x) = f(x + 1) - f(x) - [4x + 4 + 5] + 4(x + 5)$$

$$h(x + 1) - h(x) = f(x + 1) - f(x) - 4 \Leftrightarrow f(x + 1) - f(x) = h(x + 1) - h(x) + 4$$

$$\text{συνεπώς και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x + 1) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x + 1) - h(x) + 4] = 4.$$

$$\beta) \text{ ΘΜΤ στο } [x - 1, x]: \exists \xi_1 \in (x - 1, x): f'(\xi_1) = f(x) - f(x - 1)$$

$$\text{Όμοια ΘΜΤ στο } [x, x + 1]: \exists \xi_2 \in (x, x + 1): f'(\xi_2) = f(x + 1) - f(x)$$

$$x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(x) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(-1) < f'(x) < f(x+1) - f(x)$$

γ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 4$, θέτοντας $x = u-1$, προκύπτει

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} [f(u-1) - f(u)] = 4 \text{ οπότε από Κ.Π, είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 4.$$

59.α) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) = 0$. Το κλάσμα

$$\frac{g'(x)}{f'(x) - 2} \text{ ορίζεται σε διάστημα της μορφής } [a, +\infty) \text{ αφού } f'(x) \neq 2 \text{ οπότε από}$$

το θεώρημα DLH προκύπτει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3}{f(x) - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{f'(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x) - 2}{f'(x) - 2} = 1.$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 3) = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -3 \Rightarrow y = -3$ οριζόντια στο $+\infty$.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$ άρα $y = 2x - 1$ πλάγια της C_f στο $+\infty$.

γ) Έστω ότι έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. Εφαρμόζουμε Rolle για τη g στο $[\rho_1, \rho_2]$ οπότε $\exists \xi \in (\rho_1, \rho_2) : g'(\xi) = 0$. Άρα $f'(\xi) - g'(\xi) = 2 \Leftrightarrow f'(\xi) = 2$ άτοπο.

$$\delta) f'(x) - g'(x) = 2 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (2x)' \text{ άρα}$$

$$f(x) - g(x) = 2x + c \Leftrightarrow f(x) - 2x = g(x) + c \Leftrightarrow f(x) - 2x + 1 = g(x) + c + 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x) - 2x + 1 = g(x) + 3 + c - 2 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x + 1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(g(x) + 3) + c - 2] \Leftrightarrow 0 = 0 + c - 2 \Leftrightarrow c = 2. \text{ Άρα } f(x) - g(x) = 2x + 2.$$

$$\mathbf{60.α)} f^2(x) - x = x^v - 2 \Leftrightarrow f^2(x) = x^v + x - 2.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^v + x - 2 = 0.$$

Έστω η συνάρτηση $\kappa(x) = x^v + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολωνυμική με παράγωγο $\kappa'(x) = vx^{v-1} + 1 > 0 \Rightarrow \kappa \nearrow \mathbb{R}$ γιατί v περιττός θετικός ακέραιος αριθμός.

Είναι $\kappa(1) = 0$ άρα το 1 είναι μοναδική ρίζα της κ και της f . Για κάθε

$$x < 1 \Leftrightarrow \kappa(x) < \kappa(1) = 0 \text{ και για κάθε } x > 1 \Leftrightarrow \kappa(x) > \kappa(1) = 0.$$

Είναι $f^2(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq \alpha$ άρα για $x < 1$ δεν ορίζεται η $f^2(x) = x^v + x - 2$.

Άρα πρέπει $\alpha \geq 1$ για να έχει νόημα η $f^2(x) = x^v + x - 2$ ώστε να ορίζεται σε

υποσύνολο του διαστήματος $[1, +\infty)$.

Αν $\alpha = 1$ τότε η f διατηρεί πρόσημο στο $(1, +\infty)$ ως συνεχής αφού δεν έχει ρίζα. Άρα θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ ή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Αν $\alpha > 1$ τότε είναι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$ και η f ως συνεχής διατηρεί πρόσημο άρα θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$.

1^η περίπτωση: Αν $f(x) \geq 0$ ή $f(x) > 0$ στο $[\alpha, +\infty)$:

$$|f(x)| = \sqrt{x^\nu + x - 2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^\nu + x - 2}, x \geq \alpha \text{ με } \alpha \geq 1.$$

2^η περίπτωση: Αν $f(x) \leq 0$ ή $f(x) < 0$ στο $[\alpha, +\infty)$:

$$|f(x)| = \sqrt{x^\nu + x - 2} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{x^\nu + x - 2}, x \geq \alpha \text{ με } \alpha \geq 1.$$

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(\alpha, +\infty)$ ως πράξεις και σύνθεση

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = \frac{\nu x^{\nu-1} + 1}{2\sqrt{x^\nu + x - 2}} > 0$ για κάθε

$x \in (\alpha, +\infty)$ γιατί ο ν είναι περιττός θετικός ακέραιος αριθμός, άρα ο $\nu - 1$

άρτιος. Είναι $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \sqrt{x^\nu + x - 2} = \sqrt{\alpha^\nu + \alpha - 2} = f(\alpha)$ άρα η f είναι

συνεχής στο $[\alpha, +\infty)$ και $f \nearrow [\alpha, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο

$$x = \alpha \text{ το } f(\alpha) = \sqrt{\alpha^\nu + \alpha - 2}.$$

γ) Η ελάχιστη τιμή του ελάχιστου της f είναι το ελάχιστο της υπόρριξης ποσότητας $\alpha^\nu + \alpha - 2$ με $\alpha \geq 1$. Έστω λοιπόν η συνάρτηση

$$\varphi(\alpha) = \alpha^\nu + \alpha - 2, \alpha \geq 1. \text{ Από το α) ερώτημα η } \varphi \nearrow [1, +\infty) \text{ και}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \varphi(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} (\alpha^\nu + \alpha - 2) = 0 = \varphi(1), \text{ δηλαδή η } \varphi \text{ συνεχής στο } 1 \text{ άρα}$$

παρουσιάζει ελάχιστο στο $\alpha = 1$ το $\varphi(1) = 0$. Άρα η ελάχιστη τιμή του

ελάχιστου της f είναι για $\alpha = 1$ το $f(1) = 0$.

δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$ άρα, είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Η f έχει σύνολο τιμών το $[f(\alpha), +\infty)$ αφού η f συνεχής και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα η αντίστροφη f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[f(\alpha), +\infty)$.

Για να ορίζεται η τιμή $f^{-1}(-1)$ πρέπει $-1 \geq f(\alpha)$ όμως από το προηγούμενο ερώτημα η ελάχιστη τιμή του $f(\alpha)$ είναι το μηδέν άρα $f(\alpha) > -1$ και δεν

ορίζεται η τιμή $f^{-1}(-1)$.

ε) Η συνάρτηση g είναι πολωνυμική βαθμού n γιατί

$$g(x) = f^2(x) = x^n + x - 2, \quad x \geq \alpha.$$

Αν $n = 1$ τότε $g(x) = 2x - 2$ και έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x - 2$. Αν $n > 1$ τότε δεν έχει ασύμπτωτες αφού είναι πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$

$$\text{βαθμό και άνω. Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^n + x - 2}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(x^{n-2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{x^{n-2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^{n-2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \begin{cases} +\infty, & n > 1 \\ 0, & n = 1 \end{cases} \text{ Επομένως αν } n > 1 \text{ η } f \text{ δεν έχει}$$

ασύμπτωτες. Αν $n = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^n + x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x - 2} = +\infty$ και δεν έχει πάλι ασύμπτωτες.

61.α) Είναι $f(x) = x^{1-x} = e^{\ln x^{1-x}} = e^{(1-x)\ln x}, \quad x > 0$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο :

$$f'(x) = e^{(1-x)\ln x} \left(-\ln x + \frac{1-x}{x} \right) = f(x) \frac{1-x-x\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

Το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = 1 - x - x \ln x, \quad x > 0$ με $g(1) = 0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = -\ln x - 2$.

$$\text{Είναι } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq -2 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} 0 < x \leq \frac{1}{e^2} < 1$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right)$ είναι $g'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ είναι

$$g'(x) < 0. \text{ Επειδή η } g \text{ είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο } \left(0, \frac{1}{e^2}\right] \text{ και}$$

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$. Η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο

$$\left(0, \frac{1}{e^2}\right] \text{ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το}$$

$$g\left(\left(0, \frac{1}{e^2}\right]\right) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), g\left(\frac{1}{e^2}\right)\right] = \left(0, \frac{1}{e^2} + 1\right] \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 0.$$

Άρα για $0 < x \leq \frac{1}{e^2} \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$.

Για $\frac{1}{e^2} < x < 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ και για

$x > 1 \Rightarrow g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(1-x)\ln x} = 0$ άρα η ευθεία $y = 0$ δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Θα εξετάσουμε αν έχει λύση η εξίσωση $f(x) = 0$.

$f \nearrow (0, 1]$ και συνεχής άρα $f((0, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (0, 1]$

$f \searrow [1, +\infty)$ και συνεχής άρα $f([1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (0, 1]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f((0, 1]) \cup f([1, +\infty)) = (0, 1]$ και το μηδέν δεν περιέχεται σε αυτό άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη, επομένως δεν έχει κοινά σημεία με την ασύμπτωτή της.

$$\delta) 2(\eta\mu^2 x)^{\sin^2 x} + (\sin^2 x)^{\eta\mu^2 x} = 3 \Leftrightarrow 2(\eta\mu^2 x)^{1-\eta\mu^2 x} + (\sin^2 x)^{1-\sin^2 x} = 3 \Leftrightarrow 2f(\eta\mu^2 x) + f(\sin^2 x) = 3f(1).$$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = 1$, άρα $f(x) \leq 1$ για κάθε $x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 1$.

Όπου x το $\eta\mu^2 x$ είναι $f(\eta\mu^2 x) \leq 1 \Leftrightarrow 2f(\eta\mu^2 x) \leq 2$ για κάθε

$\eta\mu^2 x > 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\eta\mu^2 x = 1$.

Όπου x το $\sin^2 x$ είναι $f(\sin^2 x) \leq 1$ για κάθε $\sin^2 x > 0 \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\sin^2 x = 1$.

Άρα η (1) ισχύει μόνον αν $\eta\mu^2 x = 1$ και $\sin^2 x = 1$ που είναι αδύνατο γιατί τότε $\eta\mu^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 2 = 1$.

$$\epsilon) 2(x+1)^{-x} < x^{1-x} + (x+2)^{-(1+x)} \Leftrightarrow 2(x+1)^{1-x-1} < x^{1-x} + (x+2)^{1-x-2} \Leftrightarrow 2f(x+1) < f(x) + f(x+2).$$

Για την f εφαρμόζεται το ΘΜΤ σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$ με $x \geq 1$, οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x, x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1, x+2)$

$$\text{τέτοια ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{x+2-x-1} = f(x+2) - f(x+1)$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ τότε $f' \nearrow [2, +\infty)$.

$$1 \leq x < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) - f(x) < f(x+2) - f(x+1) \Leftrightarrow 2f(x+1) < f(x) + f(x+2)$$

62.α) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε:

Έστω ότι η αντίστροφη f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ δεν είναι

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε επειδή είναι γνησίως μονότονη θα είναι

γνησίως φθίνουσα. Οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$$f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2) \xRightarrow{f'} f(f^{-1}(x_1)) > f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 > x_2 \text{ Άτοπο. Άρα η } f^{-1}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Ομοίως αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\beta) f(x) - \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^2} - f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) + f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x} \text{ για κάθε } x \in D_f \cap D_{f^{-1}} = (0, +\infty).$$

$$\text{Έστω η συνάρτηση } g(x) = f(x) + f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

Η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3} + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι}$$

γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & (1) \\ f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) & (2) \end{cases} \xRightarrow{(1)+(2)}$

$g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty)$ το οποίο είναι άτοπο άρα επειδή είναι γνησίως μονότονες και δεν είναι γνησίως αύξουσες τότε θα είναι γνησίως φθίνουσες.

γ) i) Είναι $x \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ άρα

$$\frac{1}{\pi} < x < \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{1}{x} < \pi \Rightarrow \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \xRightarrow{x>0} \chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

Άρα ορίζεται το $A = f\left(\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) + f^{-1}\left(\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) = g\left(\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

$$\text{ii) Είναι } \frac{1}{x^2 \eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{\sqrt{\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}}{\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)} < 2 \Leftrightarrow g\left(\chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right) < g(1) \xRightarrow{g \nearrow} \chi\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) > 1$$

αδύνατη γιατί: Ισχύει η σχέση $|\eta\mu x| \leq |x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$. Για $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$.

Σύμφωνα με την παραπάνω βασική ανισότητα αν βάλουμε για x το $\frac{1}{x} > 0$

είναι: $-\frac{1}{x} < \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \xRightarrow{x>0} x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) < 1$ για κάθε $x > 0$.

δ) i) Αφού η ευθεία $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$.

Ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$ άρα έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ (3)

Επίσης έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) \stackrel{f(x)=u, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\alpha}{=} \lim_{u \rightarrow \alpha} f^{-1}(u)$ δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f^{-1}(x)$$

Άρα από την (3) έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} f^{-1}(x) = +\infty$ άρα η ευθεία $x = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ και η συγκεκριμένη ευθεία είναι συμμετρική της $y = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ ως προς την ευθεία $y = x$.

ii) Επειδή η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το

$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\right)$ και $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$ άρα

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, επομένως $\alpha = 0$.

63.α) Για $x \neq 0$ είναι

$$\frac{5x^4}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} < \frac{f'(x)}{x^4} < \frac{5x^4}{x^4} + \frac{3x^2}{x^4} \Leftrightarrow 5 - \frac{3}{x^2} < \frac{f'(x)}{x^4} < 5 + \frac{3}{x^2} \Rightarrow$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 - \frac{3}{x^2}\right) = 5$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{3}{x^2}\right) = 5$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{x^4} = 5$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{3}{x^2}\right) = 5$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{3}{x^2}\right) = 5$, οπότε από

το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x^4} = 5$.

β) Έστω $g(x) = xf'(x) + \sin x$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xf'(x) + \sin x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^5 \left(\frac{f'(x)}{x^4} + \frac{\sin x}{x^5} \right) \right] = -\infty(5+0) = -\infty$$

γιατί $\left| \frac{\sin x}{x^5} \right| = \frac{|\sin x|}{|x^5|} \leq \frac{1}{|x^5|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x^5|} \leq \frac{\sin x}{x^5} \leq \frac{1}{|x^5|}$ και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x^5|} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x^5|} \right), \text{ από το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x^5} = 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf'(x) + \sin x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^5 \left(\frac{f'(x)}{x^4} + \frac{\sin x}{x^5} \right) \right] = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\text{όπως και πριν είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^5} = 0$$

Επειδή η g είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της g , η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow xf'(x) + \sin x = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

γ) i. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. Για

$$\text{κάθε } x \neq 0 \text{ είναι } 5x^4 - 3x^2 < f'(x) < 5x^4 + 3x^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (5x^4 - 3x^2) \leq \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} (5x^4 + 3x^2) \Leftrightarrow 0 \leq f'(0) \leq 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$$

$$\text{ii. Για } x < 0 \text{ είναι } \frac{5x^4}{x} - \frac{3x^2}{x} > \frac{f'(x)}{x} > \frac{5x^4}{x} + \frac{3x^2}{x} \Leftrightarrow$$

$$5x^3 - 3x > \frac{f'(x)}{x} > 5x^3 + 3x. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} (5x^3 - 3x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} (5x^3 + 3x) = 0$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 0$ (1).

Για $x > 0$ είναι $\frac{5x^4}{x} - \frac{3x^2}{x} < \frac{f'(x)}{x} < \frac{5x^4}{x} + \frac{3x^2}{x} \Leftrightarrow 5x^3 - 3x < \frac{f'(x)}{x} < 5x^3 + 3x$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (5x^3 - 3x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (5x^3 + 3x) = 0$ οπότε από το κριτήριο

παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x} = 0$ (2). Από (1), (2) προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0 \Leftrightarrow f''(0) = 0$$

iii. Έστω $h(x) = x^5 - x^3 - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$h'(x) = 5x^4 - 3x^2 - f'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) < h(0) = 0 \Leftrightarrow x^5 - x^3 - f(x) < 0 \Leftrightarrow x^5 - x^3 < f(x)$

Έστω $t(x) = f(x) - x^5 - x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$t'(x) = f'(x) - 5x^4 - 3x^2 < 0 \Rightarrow t \searrow \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $t(x) < t(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x^5 - x^3 < 0 \Leftrightarrow f(x) < x^5 + x^3$.

Επομένως $x^5 - x^3 < f(x) < x^5 + x^3$ για κάθε $x > 0$.

iv. Είναι $x^5 - x^3 < f(x) < x^5 + x^3$ για κάθε $x > 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty, \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ οπότε η } f \text{ δεν έχει}$$

οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $x^5 - x^3 < f(x) < x^5 + x^3 \Leftrightarrow \frac{x^5}{x} - \frac{x^3}{x} < \frac{f(x)}{x} < \frac{x^5}{x} + \frac{x^3}{x} \Leftrightarrow$

$$x^4 - x^2 < f(x) < x^4 + x^2. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty, \text{ άρα και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \text{ οπότε η } f \text{ δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

64.α) Είναι $f'(x)(f(x)+1) = e^{-f(x)} > 0$ άρα τα $f'(x)$ και $f(x)+1$ είναι

ομόσημοι. Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ είναι

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)+1 \geq 1 > 0$, οπότε και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

β) $f'(x)f(x) + f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow$

$$(f(x)e^{f(x)})' = (x)' \Leftrightarrow f(x)e^{f(x)} = x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=0 \text{ είναι}$$

$$f(0)e^{f(0)} = c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } f(x)e^{f(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = xe^{-f(x)}, x \geq 0.$$

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y$, $y \in [0, +\infty)$, τότε $ye^y = x$ άρα $f^{-1}(y) = ye^y$, $y \in [0, +\infty)$ και $f^{-1}(x) = xe^x$, $x \geq 0$.

δ) Είναι $f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)+1}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x) = \frac{(e^{-f(x)})' (f(x)+1) - e^{-f(x)} f'(x)}{(f(x)+1)^2} = \frac{-e^{-f(x)} f'(x) (f(x)+1) - e^{-f(x)} f'(x)}{(f(x)+1)^2}$$

Επειδή $e^{-f(x)} > 0$, $f(x)+1 > 0$, $f'(x) > 0$, είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

$$\epsilon) f^{-1}(x) \geq 2\alpha ex - 2\alpha e + e \Leftrightarrow xe^x - 2\alpha ex + 2\alpha e - e \geq 0 \quad (1)$$

Έστω $h(x) = xe^x - 2\alpha ex + 2\alpha e - e$, $x \geq 0$, τότε η (1) γίνεται $h(x) \geq h(1)$, άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $h'(x) = e^x + xe^x - 2\alpha e$ και το $x = 1$ βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της g , σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι:

$$h'(1) = 0 \Leftrightarrow e + e - 2\alpha e = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

στ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = [0, +\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$, όμως η f έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-f(x)}}{f(x)+1} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ f(x)=u}} \frac{e^{-u}}{u+1} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(e^{-u} \frac{1}{u+1} \right) = 0, \text{ οπότε η } C_g \text{ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty \text{ την ευθεία}$$

$y = 0$ δηλαδή τον άξονα $x'x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{1} = f'(0) = 1 \text{ γιατί η αρχική σχέση για } x = 0$$

γίνεται: $f'(0)(f(0)+1) = e^{-f(0)} \Leftrightarrow f'(0) = 1$, άρα η C_g δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Τέλος επειδή η C_g έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ζ) Αρχικά θα εξετάσουμε αν η ευθεία $y = \frac{x+e}{2e} = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$ είναι εφαπτομένη της

$$C_f. \text{ Είναι } f'(x_0) = \frac{1}{2e} \Rightarrow \frac{1}{2e}(f(x_0)+1) = e^{-f(x_0)} \Leftrightarrow 2e^{1-f(x_0)} - f(x_0) - 1 = 0 \quad (3)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = 2e^{1-x} - x - 1, x \geq 0$.

Είναι $\varphi'(x) = -2e^{1-x} - 1 < 0 \Rightarrow \varphi \searrow [0, +\infty)$. Η (3) γίνεται:

$$\varphi(f(x_0)) = \varphi(1) \Leftrightarrow f(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(1) = e$$

Η εφαπτομένη της A_f στο $x_0 = e$ είναι η ευθεία:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2e}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{x - e}{2e} + 1 = \frac{x + e}{2e}$$

Επειδή η f είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του

σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \leq \frac{x + e}{2e}$ για κάθε $x \geq 0$.

$$65. \alpha) e^{f(x)}(e^{f(x)} + 2\eta\mu x) + 1 = e^{2x} + \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})^2 + 2\eta\mu x e^{f(x)} + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})^2 + 2\eta\mu x e^{f(x)} + \eta\mu^2 x = e^{2x} \Leftrightarrow (e^{f(x)} + \eta\mu x)^2 = (e^x)^2 \quad (1).$$

Είναι $(e^x)^2 > 0$ άρα $h(x) = e^{f(x)} + \eta\mu x \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής,

διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $h(\pi) = e^{f(\pi)} + \eta\mu\pi = e^\pi > 0$, είναι $h(x) > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται: $e^{f(x)} + \eta\mu x = e^x \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^x - \eta\mu x$ (2).

Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > x + 1 > x$ και $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$, άρα

$$e^x > x > \eta\mu x \Rightarrow e^x - \eta\mu x > 0 \text{ οπότε η (2) γίνεται } f(x) = \ln(e^x - \eta\mu x).$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x}.$$

Επειδή $e^x > x + 1$ για κάθε $x > 0$, θα δείξουμε ότι $x + 1 > \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x > 0$.

Έστω $g(x) = x + 1 - \sigma\upsilon\nu x, x \geq 0$. Είναι $g'(x) = 1 + \eta\mu x > 0$ για κάθε

$$x \neq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ με } k \geq 0 \text{ και επειδή η } g \text{ είναι συνεχής, είναι γνησίως}$$

αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow x + 1 > \sigma\upsilon\nu x$,

οπότε $e^x > x + 1 > \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x > 0$. Οπότε $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$.

$$\gamma) f''(x) = \frac{(e^x + \eta\mu x)(e^x - \eta\mu x) - (e^x - \sigma\upsilon\nu x)^2}{(e^x - \eta\mu x)^2} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} - \eta\mu^2 x - e^{2x} + 2e^x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{(e^x - \eta\mu x)^2} = \frac{2e^x \sigma\upsilon\nu x - 1}{(e^x - \eta\mu x)^2}$$

Για κάθε $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ είναι $\sigma\upsilon\nu x < 0 \Leftrightarrow 2e^x \sigma\upsilon\nu x < 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 < -1 < 0$ άρα

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

$$\delta) e^x - e^\lambda = \eta\mu x \Leftrightarrow e^x - \eta\mu x = e^\lambda \Leftrightarrow \ln(e^x - \eta\mu x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{\eta\mu x}{e^x} \right) \right] = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{e^x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x} \leq \frac{\eta\mu x}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{e^x} = 0$.

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - \eta\mu x) \stackrel{e^x - \eta\mu x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο

$$\sigma\upsilon\nu\nu\omicron\lambda\omicron\gamma \text{ τιμών το } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty).$$

Αν $\lambda \leq 0$ τότε $\lambda \notin f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη. Αν $\lambda > 0$

τότε $\lambda \in f(A)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \lambda$.

ε) Επειδή f συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, η f δεν έχει κατακόρυφη

ασύμπτωτη. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - \eta\mu x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x} \left(1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} \right)}{\cancel{e^x} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{e^x} \right)} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$$\text{γιατί } \left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \text{ και επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x} = 0$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x - \eta\mu x) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - \eta\mu x}{e^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{\eta\mu x}{e^x} \right) = 0, \text{ άρα η ευθεία } y = x \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f.$$

$$\text{στ)} f(x) > \ln\left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \eta\mu x\right) \Leftrightarrow \ln(e^x - \eta\mu x) > \ln\left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \eta\mu x\right) \Leftrightarrow$$

$$e^x - \cancel{\eta\mu x} > \frac{x^2}{2} + x + 1 - \cancel{\eta\mu x} \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 > 0$$

$$\text{Έστω } a(x) = e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Η a είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $a'(x) = e^x - x - 1$ και $a''(x) = e^x - 1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $a''(x) > 0$, άρα η a' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $a'(x) > a'(0) = 0$, άρα η a είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $a(x) > a(0) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 > 0$.

66.α) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $f(0) = f(1)$, εφαρμόζεται για την f το Θ. Rolle στο $[0, 1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Για κάθε $x < \xi \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, \xi]$ και για κάθε

$x > \xi \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [\xi, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο ξ .

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ οπότε η h είναι συνεχής στο $x = 0$.

$$\text{Για κάθε } x \neq 0 \text{ είναι } h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, x]$, $x > 0$, οπότε υπάρχει

$$x_1 \in (0, x) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(x_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}. \text{ Είναι}$$

$$x_1 < x \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f(x) < xf'(x) \Leftrightarrow$$

$xf'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $x = 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x, 0]$, $x < 0$, οπότε υπάρχει $x_2 \in (x, 0)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{f(x)}{x}. \text{ Είναι}$$

$$x_2 > x \Leftrightarrow f'(x_2) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > f'(x) \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} f(x) < xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow$$

$h'(x) > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $x=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $x=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\gamma) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1) + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+1)}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+1) - f(1)}{x} + \frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = f'(1) + f'(0) = 1 + f'(0) = g(0) \text{ άρα η } g$$

είναι συνεχής στο $x=0$.

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$g'(x) = \frac{(f'(x+1) + f'(x))x - f(x+1) - f(x)}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{(xf'(x+1) - f(x+1)) + (xf'(x) - f(x))}{x^2}$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1, 1+x]$, $x > 0$, οπότε υπάρχει

$$\xi_1 \in (1, 1+x) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{f(1+x)}{x}. \text{ Είναι}$$

$$\xi_1 < 1+x \Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(1+x) \Leftrightarrow \frac{f(1+x)}{x} < f'(1+x) \Leftrightarrow xf'(1+x) - f(1+x) > 0$$

και επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $xf'(x) - f(x) > 0$, είναι

$$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty).$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[1+x, 1]$, $x < 0$, οπότε υπάρχει

$$\xi_2 \in (1+x, 1) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(1+x)}{1 - 1 - x} = \frac{f(1+x)}{x}. \text{ Είναι}$$

$$\xi_2 > 1+x \Leftrightarrow f'(\xi_2) > f'(1+x) \Leftrightarrow \frac{f(1+x)}{x} > f'(1+x) \Leftrightarrow xf'(1+x) - f(1+x) > 0$$

και επειδή για κάθε $x < 0$ είναι $xf'(x) - f(x) > 0$, είναι

$$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (-\infty, 0].$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $x=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x_0 = 0$$

έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = f'(0)x$.

Είναι $0 < \xi \Leftrightarrow f'(0) < f'(\xi) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(0)x = +\infty$. Επειδή $f(x) \geq f'(0)x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

στ) Επειδή η $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -3.$$

$$\text{Είναι } 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \text{ και}$$

$$-3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{f(x)}{x} - 2 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - 2}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)x - f(x)}{1 - x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)x - f(x)}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - xf'(x))$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) + f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x+1)}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) = 2 + 2 = 4 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x+1)}{1} \stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = 2. \text{ Άρα η } y = 4 \text{ είναι}$$

οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

η) Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι

$$g(x) < g(x+1) \Leftrightarrow \frac{f(x+1) + f(x)}{x} < \frac{f(x+2) + f(x+1)}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$xf(x+1) + f(x+1) + (x+1)f(x) < xf(x+2) + xf(x+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x+1) < xf(x+2) - (x+1)f(x).$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5x}{(x+1)f(x) - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{f(x)}{x} + 5 \right)}{x \left[(f(x) - 2x) + \frac{f(x)}{x} \right]} = \frac{2+5}{5+2} = 1$$

Σωστή απάντηση Β.

2. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - x^2 \eta\mu \frac{3}{x} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{f(x)}{x} - x \eta\mu \frac{3}{x} \right) \right] = 1$. Θέτουμε

$$h(x) = x \left(\frac{f(x)}{x} - x \eta\mu \frac{3}{x} \right), \quad x > 0, \quad \mu\epsilon \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1, \quad \text{οπότε}$$

$$h(x) = x \left(\frac{f(x)}{x} - x \eta\mu \frac{3}{x} \right) \Leftrightarrow \frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - x \eta\mu \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{h(x)}{x} + x \eta\mu \frac{3}{x}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} h(x) + 3 \frac{\eta\mu \frac{3}{x}}{\frac{3}{x}} \right) = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 3 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - x^2 \eta\mu \frac{3}{x} + x^2 \eta\mu \frac{3}{x} - 3x \right] = 1 + 0 = 1 \quad \text{γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \eta\mu \frac{3}{x} - 3x \right) \stackrel{\frac{1}{x}=y}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y^2} \eta\mu 3y - \frac{3}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3y - 3y}{y^2} =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{3\sigma\upsilon\nu 3y - 3}{2y} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3\eta\mu 3y}{2} = 0. \quad \text{Οπότε η ασύμπτωτη είναι } y = 3x + 1.$$

Σωστή απάντηση Α.

3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$..

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{5}{x} \right)}{2x \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}} = \frac{2}{2} = 1. \quad \text{Άρα η ασύμπτωτη της } f' \text{ στο}$$

$+\infty$ είναι η $y = 1$. **Σωστή απάντηση Β.**

4. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x^2 + x} = \alpha = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \beta x}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \beta x - x^2 - x}{x + 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\beta-1)x}{x} = \beta-1=1. \text{ Οπότε } \beta-1=1 \Leftrightarrow \beta=2 \text{ και } \alpha=1.$$

Σωστή απάντηση Α.

5. Πρέπει $\alpha x^2 + \beta x + 1 \geq 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 1$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{\alpha} \text{ άρα}$$

$$\sqrt{\alpha} = 2 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2 + \beta x + 1} - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + \beta x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + \beta x + 1} + 2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\beta + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{4 + \frac{\beta}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right)} = \frac{\beta}{4}, \text{ οπότε } \frac{\beta}{4} = 1 \Leftrightarrow \beta = 4.$$

Για $\alpha = \beta = 4$ είναι $4x^2 + 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Σωστή απάντηση Γ.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Λ	2. Σ	3. Λ	4. Λ	5. Λ	6. Λ	7. Σ	8. Λ	9. Σ
10. Λ	11. Σ	12. Σ	13. Σ	14. Σ	15. Λ	16. Σ	17. Λ	18. Σ
19. Σ	20. Λ	21. Λ						

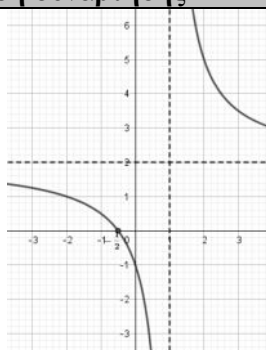
32

Μελέτη-γραφική παράσταση συνάρτησης

4. α) $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$, $f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-		+
f'	-		-
f			

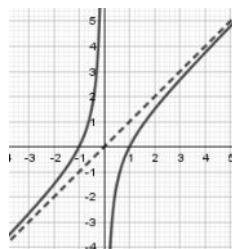
Οριζόντια ασύμπτωτη η $y=2$ και κατακόρυφη η $x=1$



β) $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0)$ και $\nearrow (0, +\infty)$.

$f''(x) = -\frac{2}{x^3}$, f κυρτή στο $(-\infty, 0)$ και κοίλη στο $(0, +\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+		-
f'	+		+
f			



$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow y' \nearrow$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0 \Rightarrow y = x$ πλάγια ασύμπτωτη.

γ) $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$, $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$,

$f''(x) = -\frac{1}{(x^2-4x+3)\sqrt{x^2-4x+3}} < 0 \Rightarrow f$ κοίλη σε καθένα από τα $(-\infty, 1]$ και

$[3, +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}}{\cancel{x}} = -1$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-4x+3} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-4x+3-x^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} =$

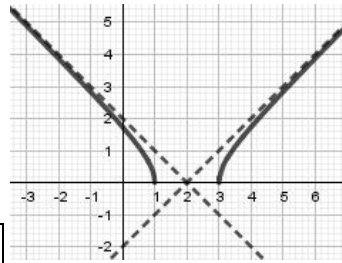
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(-4 + \frac{3}{x} \right)}{-\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1 \right)} = 2 \Rightarrow y = -x + 2$

πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Όμοια η $y = x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ) $f'(x) = x(2 \ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$. Είναι

$f \searrow \left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ και $f \nearrow \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

$f''(x) = 2 \ln x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}}$.



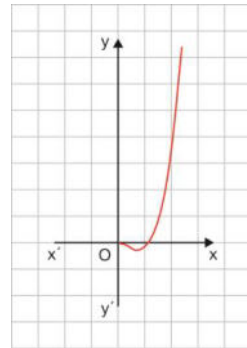
x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f''	-	+	+	+
f'	-	-	+	+
f	$\searrow$ Σ.Κ. $\curvearrowright$ Ο.Ε. $\curvearrowleft$			

Η f είναι κοίλη στο $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$ και κυρτή στο $\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

Σημείο καμπής το $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$$



ε) $f'(x) = e^{-x}(1-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Είναι $f \nearrow (-\infty, 1]$ και $f \searrow [1, +\infty)$.

Μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{e}$. $f''(x) = e^{-x}(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

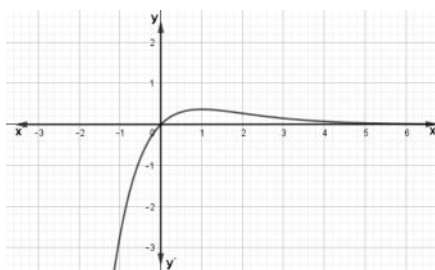
Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$. Σημείο καμπής το $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0, \quad \text{άρα οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f$$

στο $+\infty$ είναι ο άξονας $x'x$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f''	-	-	+	
f'	+	-	-	
f	$\nearrow$ O.M. $\searrow$ Σ.K. $\searrow$			



$$\sigma\tau) f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Είναι $f \searrow (-\infty, 0)$, $(0, 1]$ και $\nearrow [1, +\infty)$.

$$\text{Τοπικό ελάχιστο το } f(1) = e, f''(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} > 0 \Rightarrow x > 0.$$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ και κυρτή στο $(0, +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \frac{1}{x} \right) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty.$$

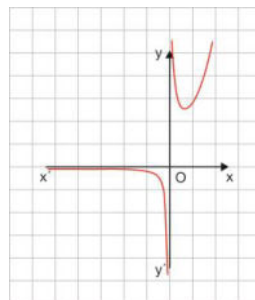
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \text{ άρα η } x=0 \text{ είναι}$$

κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f''	-	+	+	
f'	-	-	+	
f	$\searrow$ T.E. $\nearrow$			



5. α)

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 8 = 0 \stackrel{x^2 = \omega > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\omega^2 - 6\omega + 8 = 0 \Leftrightarrow (\omega = 2) \text{ ή } (\omega = 4).$$

$$\text{Άρα } x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \text{ ή } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

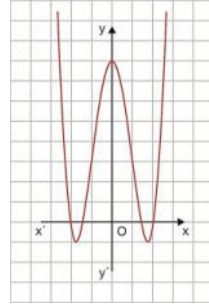
Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(2, 0)$, $(-2, 0)$.

Είναι $f(0) = 8$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 8)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x(x^2 - 3)$.

Είναι $f \searrow (-\infty, -\sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$ και $f \nearrow [-\sqrt{3}, 0]$, $[\sqrt{3}, +\infty)$. Τοπικά ελάχιστα τα $f(-\sqrt{3}) = -1$, $f(\sqrt{3}) = -1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0) = 8$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$				
4x	-	-	0	+	+				
$x^2 - 3$	+	0	-	-	0	+			
f'	-	0	+	0	-	+			
f	$\searrow$		T.E.		$\nearrow$	T.M.	$\searrow$	T.E.	$\nearrow$



Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 12x^2 - 12$.

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 12x^2 \geq 12 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1.$$

Η f είναι κυρτή στα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και κοίλη στο $[-1, 1]$.

Έχει σημεία καμπής τα $(-1, 3)$ και $(1, 3)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f''	+	+	-	-	+	+	+
f'	-	+	+	-	-	+	+
f	$\searrow$ T.E. $\nearrow$ Σ.Κ. $\nearrow$ T.M. $\searrow$ Σ.Κ. $\searrow$ T.E. $\nearrow$						

β) $f'(x) = 3(x+1)(x-5)$. Είναι $f \nearrow (-\infty, -1]$, $[5, +\infty)$ και $f \searrow [-1, 5]$. Τοπικό μέγιστο το $f(-1) = 8$ και

τοπικό ελάχιστο το

$$f(5) = -100 \cdot f''(x) = 6(x-2).$$

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και

κυρτή στο $[2, +\infty)$. Έχει

σημείο καμπής το $(2, -46)$.

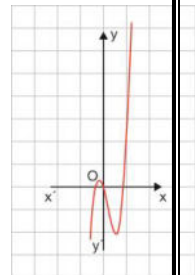
$$\gamma) f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2).$$

Είναι $f \nearrow (-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ και $f \searrow [0, 2]$.

Τοπικό μέγιστο το $f(0) = 5$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2) = 3$.

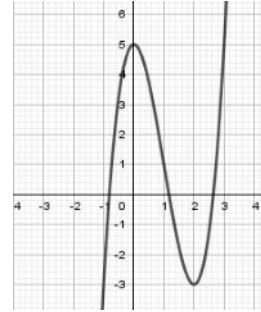
Είναι $f''(x) = 12x - 12$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $(1, 1)$. Η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $(0, 5)$.

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
f''	-	0	-	+	0	+
f'	+	-	0	-	+	+
f	T.M					



x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$

f''	-	-	o	+	+	
f'	+	o	-	-	o	+
f	T.M. Σ.K. T.E.					



$$6. f'(x) = \begin{cases} 2xe^{x^2} - 2, & x < 0 \\ \frac{2}{x}(\ln x - 1), & x > 0 \end{cases} \cdot \text{Είναι}$$

$$f \searrow (-\infty, 0), (0, e] \text{ και } \nearrow [e, +\infty).$$

$$\text{Τοπικό ελάχιστο το } f(e) = -1. f''(x) = \begin{cases} 2e^{x^2}(1 + 2x^2), & x < 0 \\ \frac{2(2 - \ln x)}{x^2}, & x > 0 \end{cases} \cdot \text{Η } f \text{ είναι κυρτή}$$

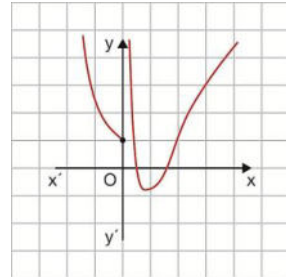
στα $(-\infty, 0)$, $(0, e^2]$ και κοίλη στο $[e^2, +\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $(e^2, 0)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x^2} - 2x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln x - 2)] = +\infty$$

Η $x = 0$ ($y'y$) κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x (\ln x - 2)] = +\infty$$

x	$-\infty$	0	e	e^2	$+\infty$
f''	+	+	0	+	-
f'	-	-	+	0	+
f	$\searrow$ $\searrow$ T.E. $\nearrow$ Σ.Κ. $\nearrow$				



$$7. f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x) \geq 0 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu x \geq -\eta \mu x \Leftrightarrow \sigma \phi x \geq -1 = \sigma \phi \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

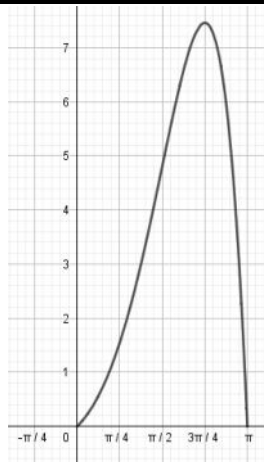
$$0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}. f \nearrow \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ και } \searrow \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]. \text{ Η } f \text{ έχει μέγιστο το}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \eta \mu \frac{3\pi}{4} = \frac{e^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}}{2} \text{ και τοπικά ελάχιστα τα } f(0) = 0 \text{ και } f(\pi) = 0,$$

$$f''(x) = 2e^x \sigma \nu \nu x \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ Η } f \text{ είναι κυρτή στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και κοίλη στο}$$

$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

x	0	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
f''	+	0	-	-
f'	+	+	0	-
f	$\begin{array}{c} \nearrow \text{T.E.} \quad \nearrow \text{Σ.K.} \quad \nearrow \text{T.M.} \quad \searrow \text{T.E.} \end{array}$			



8. α) $f'(x) = 1 + \sin x > 0$,

$$x \in (-2\pi, -\pi) \cup (-\pi, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \Rightarrow f \nearrow [-2\pi, 2\pi]$$

Ελάχιστο το $f(-2\pi) = -2\pi$ και μέγιστο το $f(2\pi) = 2\pi$.

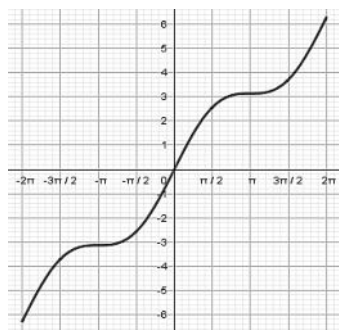
$f''(x) = -\cos x \geq 0 \Rightarrow x \in [-\pi, 0] \cup [\pi, 2\pi]$. Η f είναι κυρτή σε καθένα από τα

$[-\pi, 0]$ και $[\pi, 2\pi]$, κοίλη στα $[-2\pi, -\pi]$ και

$[0, \pi]$. Σημεία καμπής τα

$(-\pi, -\pi)$, $(0, 0)$, (π, π)

x	-2π	$-\pi$	0	π	2π
f''	-	0	+	0	+
f'	+	+	+	+	+
f	$\begin{array}{c} \nearrow \text{Σ.K.} \quad \nearrow \text{Σ.K.} \quad \nearrow \text{Σ.K.} \quad \nearrow \text{O.M.} \end{array}$				



β)

$$f'(x) = 1 - 2\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3},$$

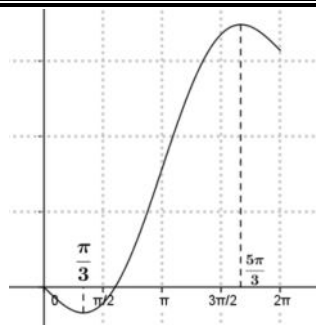
$f \searrow \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$ και $f \nearrow \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$. Τοπικό μέγιστο τα $f(0) = 0$ και ολικό

μέγιστο $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{3}$. Ελάχιστο το $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{3}$ και

τοπικό ελάχιστο το $f(\pi) = 2\pi$, $f''(x) = 2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$. Η f είναι κυρτή στο $[0, \pi]$ και κοίλη στο $[\pi, 2\pi]$. Σημείο καμπής το (π, π) .

x	0	$\pi/3$	π	$5\pi/3$	2π
f''	+	+	0	-	-
f'	-	0	+	+	0
f	T.M.		Σ.Κ.	T.M.	T.E.

$\swarrow$ T.E. $\nearrow$ $\swarrow$ T.M. $\searrow$ T.E.



9. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}. \text{ Είναι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R},$$

οπότε η f δεν έχει ακρότατα. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x + 1)^3}.$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x + 1)^3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} e^x > 0 \\ (e^x + 1)^3 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow 1 - e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $A(0, f(0)) \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$

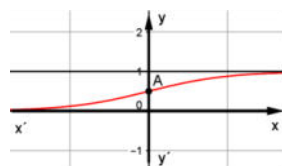
β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ οπότε ο άξονας } x'x \text{ είναι οριζόντια}$$

ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1 + e^{-x})} = 1, \text{ άρα}$$

η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.



10. α) $f'(x) = \frac{(x^2 + 3)^2}{(x^2 - 1)^2} > 0$ για κάθε $x \neq \pm 1 \Rightarrow f \nearrow$ σε καθένα από τα $(-\infty, -1)$,

$$(-1, 1) \text{ και } (1, +\infty). \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3} - 9\cancel{x}}{\cancel{x^2} - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{x^{\cancel{2}}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^3 - 9x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^3 - 9x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3 - 9x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3 - 9x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα

$f(\Delta_1) = \mathbb{R}$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (-1, 1)$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$,

άρα $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = \mathbb{R}$. Στο διάστημα $\Delta_3 = (1, +\infty)$ η f είναι

συνεχής και $\nearrow$, άρα $f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$.

Είναι $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \mathbb{R}$.

$$\beta) x^3 - \alpha x^2 - 9x + \alpha = 0 \Leftrightarrow x^3 - 9x = \alpha(x^2 - 1).$$

Αν $x = -1: 8 = 0$ αδύνατη και αν $x = 1: -7 = 0$ αδύνατη.

$$\text{Για } x \neq \pm 1: \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha.$$

Επειδή το α ανήκει σε καθένα από τα $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$, $f(\Delta_3)$, και η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα Δ_1, Δ_2 και Δ_3 η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Οπότε η εξίσωση έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

$$\gamma) f''(x) = \frac{-16x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \text{ οπότε η } f \text{ είναι κυρτή στα}$$

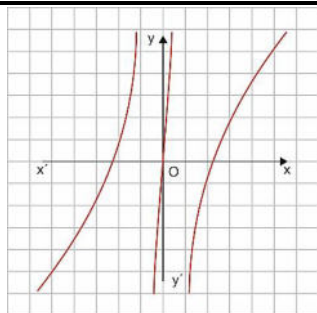
διαστήματα $(-\infty, -1), (-1, 0]$ και κοίλη στα διαστήματα $[0, 1), (1, +\infty)$.

Έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις $x = -1, x = 1$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 9x}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}}}{x^{\cancel{3}}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 9x - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x}{x^2 - 1} = 0$$

οπότε πλάγια ασύμπτωτη την $y = x$ στο $+\infty$
 Όμοια έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y = x$ στο $-\infty$. Τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0,0), (-3,0), (3,0)$



x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f''	+	+	0	-	-
f'	+	+	0	+	+
f	$\nearrow$	$\nearrow$	Σ.Κ	$\searrow$	$\searrow$

Από τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε τρία σημεία.

11.α) $f'(x) = -e^{1+x-e^x} < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}$. Η f δεν έχει ακρότατα.

β) $f''(x) = e^{1+x-e^x} (e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$, έχει σημείο καμπής το $(0,1)$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-e^x} \stackrel{1-e^x=u}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-e^x} \stackrel{1-e^x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} e^u = e \text{ άρα}$$

οι ευθείες $y = 0$ ($x'x$), $y = e$ είναι

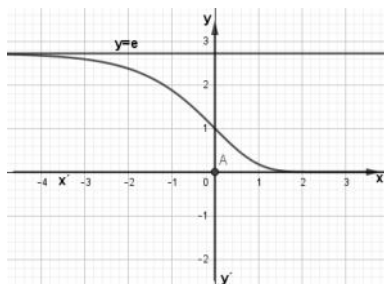
οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$,

$-\infty$ αντίστοιχα.

Άρα η C_f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

δ) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (0, e)$$



12. α) $f'(x) = \frac{1}{x \ln x} > 0 \Rightarrow f \nearrow (1, +\infty)$. Η f δεν έχει ακρότατα. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(\ln x) \stackrel{\ln x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) \stackrel{\ln x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty, \text{ άρα } f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

β) $f''(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(1, +\infty)$.

γ) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ οπότε η } C_f$$

δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη.

δ) Αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

$$\text{τέτοια ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

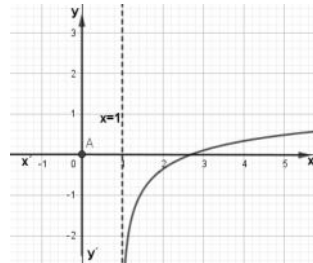
$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow 2\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > \ln(\ln\alpha) + \ln(\ln\beta) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 > \ln(\ln\alpha \cdot \ln\beta) \Leftrightarrow$$

$$\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 > \ln\alpha \cdot \ln\beta. \text{ Όμοια αν } \alpha > \beta.$$

ε)



13.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με

$$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{x^3}$$

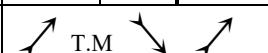
Για κάθε $x < -2$ είναι $f'(x) > 0$ και

επειδή η f είναι συνεχής στο -2 , είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$. Για κάθε

$x \in (-2, 0)$ είναι $f'(x) < 0$ άρα

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ άρα

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2) = -3$.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$x^3 + 8$	-	0	+	+
x^3	-	-	+	+
f'	+	0	-	+
f				

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f''(x) = -\frac{24}{x^4}$. Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι κοίλη στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ δεν έχει σημεία καμπής.

γ) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, οπότε αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη θα είναι στο $x = 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty$ άρα η

$x = 0$ (y') είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Είναι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0$, οπότε η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

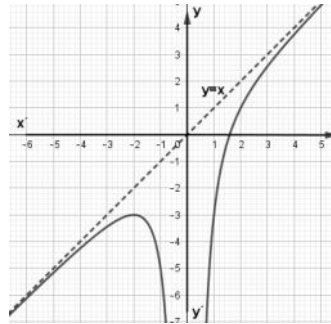
Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0$, η ευθεία

$y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη

της C_f στο $-\infty$.

δ) σχήμα



14.α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή με παράγωγο:

$$f'(x) = -\frac{6x^2}{(x^3-1)^2} \leq 0 \text{ για κάθε } x \neq 1 \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για}$$

$x = 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

β) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ως ρητή με

$$\text{παράγωγο: } f''(x) = \frac{12x(2x^3+1)}{(x^3-1)^3}$$

- $12x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$
- $2x^3 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x \geq -\frac{\sqrt[3]{2}}{2} \Leftrightarrow x \geq -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
- $(x^3 - 1)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	0	1	$+\infty$
12x	-	-	0	+	+
$2x^3+1$	-	0	+	+	+
$(x^3-1)^3$	-	-	-	+	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-
f					

Σ.Κ.

Σ.Κ.

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x < -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$.

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, 0\right)$ άρα η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, 0\right]$.

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0, 1)$.

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα η f είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή για $x = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ και για $x = 0$. Τα σημεία καμπής είναι τα

σημεία: $A\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)\right) \equiv A\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ και $B(0, f(0)) \equiv B(0, -1)$.

γ) Πιθανή κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι η $x = 1$ ως άκρο του πεδίο ορισμού της f.

Πράγματι είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3+1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left((x^3+1) \frac{1}{x^3-1}\right) = 2(-\infty) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3+1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left((x^3+1) \frac{1}{x^3-1}\right) = 2(+\infty) = +\infty$ άρα η $x = 1$ είναι

κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$ άρα η $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$ άρα η $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Η f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ και στο $-\infty$ άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

δ) Είναι $f(0) = -1$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα y'γ στο σημείο καμπής $B(0, -1)$.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	0	
f''	-	0	+	0
f'	-		-	-
f	1 ↘ $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ ↘ -1	-1 ↘	
	Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$ άρα η C_f τέμνει

τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Gamma(-1, 0)$. Επίσης είναι $-1 < -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} < 0$. (

$-1 < -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} \Leftrightarrow 2 > \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 8 > 4$) και $-1 < -\frac{1}{3} < 0$ ($-1 < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 > 1$).

15. Παρατηρούμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x < 1$ άρα η f ως συνεχής είναι $f \searrow (-\infty, 1)$. Επίσης $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ άρα η f ως συνεχής είναι $f \searrow (1, +\infty)$. Είναι $f' \searrow (-\infty, -1]$ άρα η f κοίλη στο $(-\infty, -1]$, $f' \nearrow [-1, 0]$ άρα η f είναι κυρτή στο $[-1, 0]$, $f' \searrow [0, 1)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0, 1)$ και $f' \nearrow (1, +\infty)$ άρα η f κυρτή στο $(1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει καμπή για $x = -1$ και για $x = 0$, άρα έχει σημεία καμπής τα $A(-1, f(-1))$ και $B(0, f(0))$.

Επειδή η f είναι συνεχής και $f \searrow (-\infty, 1)$, $f \searrow (1, +\infty)$ τότε είναι

$$f((-\infty, 1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) \text{ και } f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right).$$

Επειδή η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Για κάθε $\lambda < 1$ έχει δύο ρίζες και αφού $f \searrow (-\infty, 1)$, $f \searrow (1, +\infty)$ τότε ακριβώς μία σε κάθε διάστημα.

Άρα για να έχει 2 ρίζες η εξίσωση για $\lambda < 1$ και 1 ρίζα για $\lambda \geq 1$ πρέπει το ένα σύνολο τιμών να είναι το $(-\infty, 1)$ και το άλλο σύνολο όλο το $\mathbb{R}$. Αφού είναι

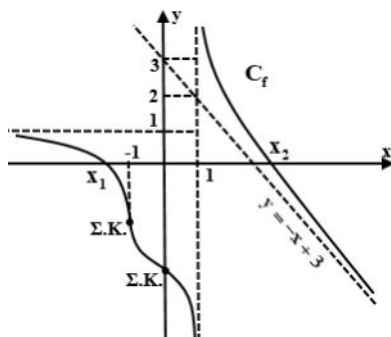
$f(x) < 1$ για κάθε $x < 1$ τότε $f((-\infty, 1)) = (-\infty, 1)$, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ άρα η C_f δέχεται οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 1$ και

κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 1$. Επίσης $f((1, +\infty)) = \mathbb{R}$ άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -1$ άρα η C_f δέχεται στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη της μορφής $y = -x + \beta$ και αφού διέρχεται από το $M(1,2)$ τότε $2 = -1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$ άρα έχει ασύμπτωτη την (ε): $y = -x + 3$. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Κυρτότητα					
Μονοτονία					
f	$1 \searrow$ ΣΚ	ΣΚ $\searrow$ ΣΚ	ΣΚ $\searrow$ $-\infty$	$+\infty \searrow$ $-\infty$	



Σύνθετες ασκήσεις

16.α) $f'(x) = e^x (x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, -1]$ και για κάθε $x > -1$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [-1, +\infty)$. Ελάχιστο το $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ η f είναι συνεχής και $\searrow$, άρα $f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right)$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (-1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα $f(\Delta_2) = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

$$\text{Είναι } f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right).$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow xe^x \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow xe^x \cdot e \geq -1 \Leftrightarrow xe^{x+1} + 1 \geq 0.$$

γ) $f''(x) = e^x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -2]$ και κυρτή στο $[-2, +\infty)$. Σημείο καμπής το $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$.

δ) Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 2e$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - e = 2e(x - 1) \Leftrightarrow y = 2ex - e$. Επειδή η C_f είναι κυρτή στο $[-2, +\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, οπότε βρίσκεται πάνω και από την ε , δηλαδή:

$$f(x) \geq 2ex - e \Leftrightarrow xe^x \geq 2ex - e \text{ για κάθε } x \geq -2.$$

ε) Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ η } C_f \text{ δεν έχει}$$

οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

στ) σχήμα

$$\zeta) x = \lambda e^{-x} \Leftrightarrow xe^x = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

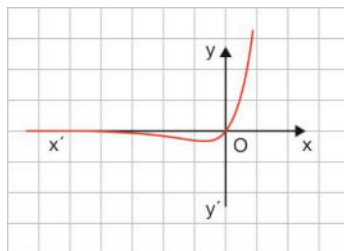
• Αν $\lambda < -\frac{1}{e}$, τότε $\lambda \notin f(A)$, οπότε η

εξίσωση είναι αδύνατη.

• Αν $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση έχει από μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 .

• Αν $\lambda = -\frac{1}{e}$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση έχει μία ρίζα στο Δ_1 , την $x = -1$.

• Αν $\lambda \geq 0$, τότε $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ_2 .



$$17. \alpha) f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq e. \text{ Για κάθε } x \in (0, e) \text{ είναι}$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [e, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

β) $f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{3}{2}}$. Η f είναι κοίλη στο $\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$. Σημείο καμπής το $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) = -\infty$ άρα ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη

ασύμπτωτη της C_f . $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y = 0$ οριζόντια

ασύμπτωτη της C_f οπότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

δ) $x^e \leq e^x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow e \ln x \leq x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{e}$ ισχύει αφού η f έχει μέγιστο το $\frac{1}{e}$.

ε) $e < 10 < 11 \Rightarrow f(10) > f(11) \Leftrightarrow \frac{\ln 10}{10} > \frac{\ln 11}{11} \Leftrightarrow 11 \ln 10 > 10 \ln 11 \Leftrightarrow \ln 10^{11} > \ln 11^{10} \Leftrightarrow 10^{11} > 11^{10}$

στ) Αν $x \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν $x > 0$ τότε

$$x = e^{\lambda x} \Leftrightarrow \ln x = \lambda x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

Η f είναι συνεχής και $\nearrow$ στο $\Delta_1 = (0, e]$, άρα $f(\Delta_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

Η f είναι συνεχής και $\searrow$ στο $\Delta_2 = (e, +\infty)$, άρα $f(\Delta_2) = \left(0, \frac{1}{e}\right)$

• Αν $\lambda \leq 0$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1 : f(x_1) = \lambda$. Επειδή $f \nearrow$ στο Δ_1 , το x_1 είναι μοναδικό. Επειδή $\lambda \notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη στο Δ_2 .

• Αν $\lambda \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει

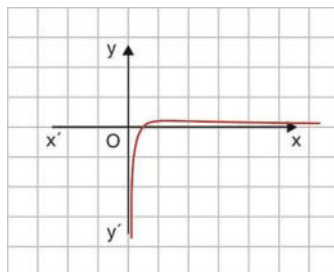
ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 , άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.

• Αν $\lambda = \frac{1}{e}$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \notin f(\Delta_2)$,

οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1 , την $x = e$.

• Τέλος αν $\lambda > \frac{1}{e}$, τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$ και

$\lambda \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.



18.α) Για κάθε $x \in (0, 4)$ είναι:

$$x^2 e^{f(x)} f'(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{f(x)} f'(x) = -4 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{4}{x^2 e^{f(x)}} < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 4).$$

Για κάθε $0 < x < 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = 0$ και για κάθε $2 < x < 4 \Rightarrow f(x) < f(2) = 0$

$$\beta) x^2 e^{f(x)} f'(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = -\frac{4}{x^2} \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = \left(\frac{4}{x}\right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{4}{x} + c,$$

$$c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 2 \text{ είναι } e^{f(2)} = \frac{4}{2} + c \Leftrightarrow 1 = 2 + c \Leftrightarrow c = -1. \text{ Τότε}$$

$$e^{f(x)} = \frac{4}{x} - 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{4-x}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln \frac{4-x}{x} = \ln(4-x) - \ln x, x \in (0, 4)$$

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 4)$, οπότε είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} που είναι το σύνολο τιμών της f .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(4-x) - \ln x) = \ln 4 - (-\infty) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (\ln(4-x) - \ln x) = -\infty - \ln 4 = -\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, 4)$, έχει σύνολο τιμών το $f((0, 4)) = \mathbb{R}$, άρα

$$A_{f^{-1}} = \mathbb{R}. f(x) = y \Leftrightarrow \ln \frac{4-x}{x} = y \Leftrightarrow \frac{4-x}{x} = e^y \Leftrightarrow$$

$$4-x = x e^y \Leftrightarrow 4 = x + x e^y \Leftrightarrow x(e^y + 1) = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{e^y + 1}, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{4}{e^y + 1}, y \in \mathbb{R}, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \frac{4}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\delta) f(x) < \frac{4}{x} \Leftrightarrow f(x) - \frac{4}{x} < 0.$$

Έστω $\varphi(x) = f(x) - \frac{4}{x} = \ln(4-x) - \ln x - \frac{4}{x}, x \in (0, 4)$.

$$\text{Είναι } \varphi'(x) = -\frac{1}{4-x} - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{-x^2 - x(4-x) + 4(4-x)}{x^2(4-x)} \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = \frac{-x^2 - 4x + x^2 + 16 - 4x}{x^2(4-x)} = \frac{16-8x}{x^2(4-x)}.$$

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{16-8x}{x^2(4-x)} \geq 0 \Leftrightarrow 16-8x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(0, 2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (2, 4)$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[2, 4)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει μέγιστο το $\varphi(2) = f(2) - 2 = -2$, οπότε για κάθε

$$x \in (0, 4) \text{ είναι } \varphi(x) \leq \varphi(2) < 0 \Leftrightarrow f(x) - \frac{4}{x} < 0$$

$$\epsilon) e^{f(x)} = 4 - x^3 \Leftrightarrow \frac{4}{x} - 1 = 4 - x^3 \Leftrightarrow 4 - x = 4x - x^4 \Leftrightarrow x^4 - 5x + 4 = 0$$

Έστω $h(x) = x^4 - 5x + 4, x \in [1, 2]$. Παρατηρούμε ότι $h(1) = 0$, οπότε από το σχήμα Horner προκύπτει ότι $h(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 4)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + x^2 + x - 4, x \in [1, 2]$. Είναι

$g(1) = -1, g(2) = 10$, δηλαδή $g(1)g(2) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho) = 0$. Τότε $h(\rho) = (\rho-1)g(\rho) = 0$.

$$\sigma\tau) \text{ Είναι } f'(x) = (\ln(4-x) - \ln x)' = -\frac{1}{4-x} - \frac{1}{x} \text{ και } f''(x) = \frac{16-8x}{x^2(4-x)^2}.$$

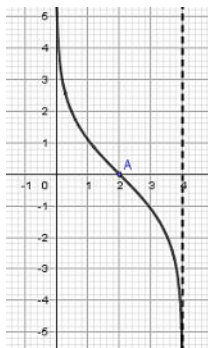
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{16-8x}{x^2(4-x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 16-8x \geq 0 \Leftrightarrow 8x \leq 16 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, 2]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (2, 4)$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2, 4)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Η f έχει σημείο καμπής το $A(2, 0)$.

ζ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ άρα ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Είναι $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$ άρα η ευθεία $x = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Δεν ορίζεται σε περιοχή του $-\infty, +\infty$ οπότε δεν έχει οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.



x	0	2	4
f''	+	0	-
f'	-		-
f	↘ Σ.Κ. ↘		

19.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

$$\text{με } f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^3} = \frac{2}{x^3}.$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x^2 + 1) \frac{1}{x} \right] = +\infty$, οπότε η ευθεία $x = 0$,

δηλαδή ο άξονας y γίνεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

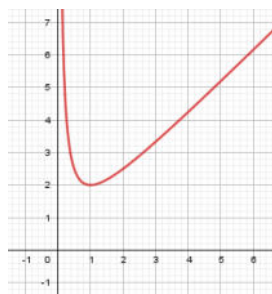
$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε}$$

η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f .

Επειδή η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.



x	0	1	$+\infty$
f''	+		+
f'	-	0	+
f	$\searrow$	O.E.	$\nearrow$

γ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 > 0$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$

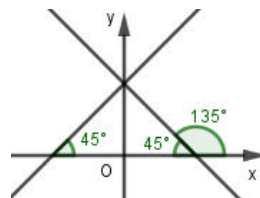
$$y = \frac{x_0^2 - 1}{x_0^2}x - \frac{x_0^2 - 1}{x_0^2} \cdot \cancel{x_0} + \frac{x_0^2 + 1}{x_0} \Leftrightarrow y = \frac{x_0^2 - 1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}. \text{ Για να διέρχεται η } \varepsilon \text{ από}$$

το A πρέπει $-4 = \frac{x_0^2 - 1}{x_0^2} \cdot 0 + \frac{2}{x_0} \Leftrightarrow -4 = \frac{2}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$ αδύνατο. Άρα δεν

υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο A(0, -4).

δ) Για να σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο, τότε επειδή είναι ορθογώνιο οι οξείες γωνίες του θα είναι ίσες με 45° . Άρα η γωνία που θα σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x' θα είναι 45° ή 135° , οπότε η κλίση της θα είναι

$$\lambda = \tan 45^\circ = 1 \text{ ή } \lambda = \tan 135^\circ = -1.$$



Όμως αν $M(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής με την C_f , τότε

$$f'(x_0) = 1 \text{ ή } f'(x_0) = -1.$$

$$- f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 1}{x_0^2} = 1 \Leftrightarrow \cancel{x_0^2} - 1 = \cancel{x_0^2} \text{ αδύνατο}$$

$$- f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 - 1}{x_0^2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = -x_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Επομένως υπάρχει ακριβώς μία εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει με τον άξονα x' ισοσκελές τρίγωνο.

ε) Έστω $K(x(t), y(t))$, $x(t) > 0$, $t \geq 0$ σημείο της C_f με

$$y(t) = f(x(t)) = \frac{x^2(t) + 1}{x(t)}. \text{ Επειδή η τετμημένη του K αυξάνεται με ρυθμό 2}$$

cm/sec, είναι $x'(t) = 2 \text{ cm/sec}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M

$$\text{είναι } y'(t) = f'(x(t))x'(t) = \frac{x^2(t) - 1}{x^2(t)} \cdot x'(t). \text{ Έστω } t_0 \text{ η χρονική στιγμή που το}$$

Κ διέρχεται από το Β, τότε $x(t_0) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Είναι } y'(t_0) = \frac{x^2(t_0) - 1}{x^2(t_0)} \cdot x'(t_0) = -6 \text{ cm/sec}$$

20.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, με παράγωγο $f'(x) = e^x + 2x$ και δύο φορές παραγωγίσιμη, με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = e^x + 2 > 0$. Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο

$$\text{τιμών : } f'(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x) = 0 - \infty = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x) = +\infty.$$

Το $0 \in f'(\mathbb{R})$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = 0$.

$$\text{Για } x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \text{ και για } x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , το οποίο προφανώς είναι μοναδικό.

β) Η f' είναι συνεχής στο $[-1, 0]$, $f'(0) = 1 > 0$, $f'(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0$ άρα

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$. Μοναδική ρίζα της $f'(x) = 0$ είναι το x_0 άρα το ξ ταυτίζεται με το x_0 οπότε $x_0 < 0$.

γ) Από το α) ερώτημα $f''(x) = e^x + 2 > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει σημεία καμπής.

δ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Από το ερώτημα α) δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

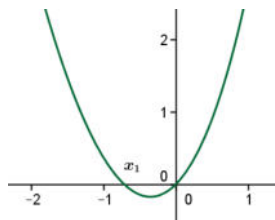
$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^2 - 1}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^2 - 1}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2x) = -\infty$$

άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

ε) Η f είναι συνεχής στο $[-1, x_0]$, $f(-1) = \frac{1}{e} > 0$,

$f(x_0) < 0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του



θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, x_0)$ τέτοιος ώστε $f(x_1) = 0$.

21.α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} + 2$, $x > -1$.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ για κάθε $x > -1$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(e^x - \frac{1}{x+1} + 2 \right) = -\infty$ άρα πολύ κοντά στο -1

υπάρχει αριθμός $\gamma \in \left(-1, -\frac{1}{2} \right)$: $f(\gamma) < 0$. Επίσης ισχύει $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$ άρα

έχουμε $f(\gamma)f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[\gamma, -\frac{1}{2} \right]$, σύμφωνα

με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in \left(\gamma, -\frac{1}{2} \right)$: $f'(x_1) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, το x_1 είναι μοναδικό.

Για $-1 < x < x_1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0$ και για $x > x_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x = x_1$ τότε $f \searrow (-1, x_1]$ και $f \nearrow [x_1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = x_1$ το $f(x_1)$.

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$ τότε η f είναι κυρτή.

β) Είναι $f(0) = 0$, $0 \in [x_1, +\infty)$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_1, +\infty)$ οπότε το μηδέν είναι μοναδική ρίζα στο διάστημα $[x_1, +\infty)$ της

$f(x) = 0$. Είναι $x_1 < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(0) = 0$ άρα το ακρότατο της f είναι αρνητικό.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - \ln(x+1) + 2x - 1] = e^{-1} - (-\infty) - 3 = +\infty$ άρα

πολύ κοντά στο -1 υπάρχει αριθμός $-1 < \beta < x_1$ τέτοιος ώστε $f(\beta) > 0$. Επίσης $f(x_1) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[\beta, x_1] \subseteq (-1, 0)$ και $f(\beta)f(x_1) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_2 \in (\beta, x_1) \subseteq (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.

Επειδή $f \searrow (-1, x_1]$ το x_2 είναι μοναδικό.

δ) Επειδή $f(0) = 0$ η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η εφαπτομένη

της C_f στο $O(0,0)$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = f'(0)x \Leftrightarrow y = 2x$. Για να εφάπτεται η (ε) στη C_h , αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h'(x_1) = 2$.

Είναι $h'(x) = e^{x-1} + 1$. Παρατηρούμε ότι $h'(1) = 2$. Η εφαπτομένη της C_h στο $x = 1$ έχει εξίσωση $y - h(1) = h'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x$, δηλαδή είναι η (ε) .

ε) Αρκεί να υπάρχουν $x_1, x_2 > 0$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = -1$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 2$, άρα $f'(x_1)f'(x_2) > 0$ οπότε δεν υπάρχουν τέτοια σημεία.

στ) Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών για την συνάρτηση f :

Επίσης η f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα $x_2 \in (-1, x_1)$

και $x_3 \in (x_1, 0]$ με το $x_3 = 0$ και τον άξονα $y'y$

στο $(0, 0]$. Δηλαδή τα σημεία τομής με τους

άξονες είναι τα $A(x_2, 0)$ και $O(0, 0)$. Επίσης

έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ άρα η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

της γραφικής παράστασης της f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - \ln(x+1) + 2x - 1}{x} \right) =$$

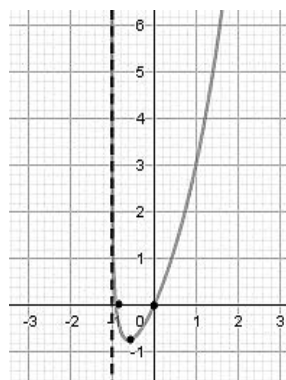
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + 2x - 1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = +\infty \text{ γιατί έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x - 1}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} (e^x + 2) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\infty}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Άρα η f δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.

x	-1	x_1	$+\infty$
f''	+	+	
f'	-	0	+
f	↘	O.E	↗



22.α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $x + 2\pi, x - 2\pi \in \mathbb{R}$ και $f(x + 2\pi) = f(x - 2\pi) = f(x)$

άρα η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$.

β) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$ (1)

1^{ος} τρόπος: Έστω ότι $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την (1) και $\eta\mu x = 0$

Άρα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ άτοπο, επομένως $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\epsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi x = \varepsilon\phi \frac{3\pi}{4} \quad x \in [0, 2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ή } \left(x = \frac{7\pi}{4} \right).$$

2^{ος} τρόπος: Δείχνουμε ομοίως ότι $\eta\mu x \neq 0$ άρα

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = -1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{matrix} x \in [0, 2\pi] & x \in [0, 2\pi] \\ \Leftrightarrow & \Leftrightarrow \end{matrix} \left(x = \frac{3\pi}{4} \right) \text{ ή } \left(x = \frac{7\pi}{4} \right)$$

Επειδή f συνεχής και στα διαστήματα $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ δεν έχει

ρίζες, τότε σε καθένα από αυτά θα διατηρεί πρόσημο.

Θα δώσουμε τιμές σε κάθε διάστημα και θα βρούμε το πρόσημο της f .

Διαστήματα	$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	π	2π
$f(x_0)$	1	- 1	1
Πρόσημο της f	+	-	+

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \quad (2)$$

Ομοίως με την (1) στο προηγούμενο ερώτημα δείχνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$, αντίστοιχα $\eta\mu x \neq 0$, εμφανίζουμε $\varepsilon\phi x = 1$ ή $\sigma\phi x = 1$ επομένως αφού

$$x \in [0, 2\pi] \quad \text{τότε} \quad \left(x = \frac{\pi}{4} \right) \text{ ή } \left(x = \frac{5\pi}{4} \right).$$

Επειδή f' συνεχής και στα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ δεν έχει

ρίζες, τότε σε καθένα από αυτά θα διατηρεί πρόσημο.

Θα δώσουμε τιμές σε κάθε διάστημα και θα βρούμε το πρόσημο της f .

Διαστήματα	$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	π	2π
$f'(x_0)$	1	-1	1
Πρόσημο της f'	+	-	+

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και στο $\left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ και γνησίως

φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x = \frac{\pi}{4}$ το

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, τοπικό ελάχιστο στο $x = \frac{5\pi}{4}$ το $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$, τοπικό ελάχιστο
το $f(0) = 1$ και τοπικό μέγιστο το $f(2\pi) = 1$.

δ) $f(0) = 1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ και $f(2\pi) = 1$

Στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα:

$f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x)\right] = [1, \sqrt{2}]$. Στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ η f συνεχής και

γνησίως φθίνουσα άρα: $f\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right) = \left[f\left(\frac{5\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Στο $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα:

$f\left(\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]\right) = \left[\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}^+} f(x), f(2\pi)\right] = [-\sqrt{2}, 1]$

- Αν $\lambda > \sqrt{2}$ ή $\lambda < -\sqrt{2}$ τότε η $f(x) = \lambda$ στο $[0, 2\pi]$ είναι αδύνατη αφού $f([0, 2\pi]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
- Αν $\lambda = \sqrt{2}$ τότε η $f(x) = \lambda$ στο $[0, 2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $x = \frac{\pi}{4}$.
- Αν $\lambda \in (1, \sqrt{2})$ τότε η $f(x) = \lambda$ στο $[0, 2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, άρα έχει 2 ρίζες ακριβώς.
- Αν $\lambda = 1$ τότε η $f(x) = \lambda$ στο $[0, 2\pi]$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $x = 0$ και στο $x = 2\pi$.
- Αν $\lambda \in (-\sqrt{2}, 1)$ τότε η $f(x) = \lambda$ στο $[0, 2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ και ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$, αφού η f είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση σε καθένα από τα διαστήματα αυτά, άρα 2 ρίζες ακριβώς.

- Αν $\lambda = -\sqrt{2}$ τότε η $f(x) = \lambda$ στο $[0, 2\pi]$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $x = \frac{5\pi}{4}$.

Επειδή η f είναι περιοδική και σε μία περίοδο η $f(x) = \lambda$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $\lambda \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ τότε έχει άπειρες ρίζες στο $\mathbb{R}$. Ομοίως είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ αν $\lambda > \sqrt{2}$ ή $\lambda < -\sqrt{2}$.

ε) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ με $f''(x) = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -f(x)$

Από το β) ερώτημα είναι $f''(x) < 0$ σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$

και

$\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$. Επίσης $f''(x) > 0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

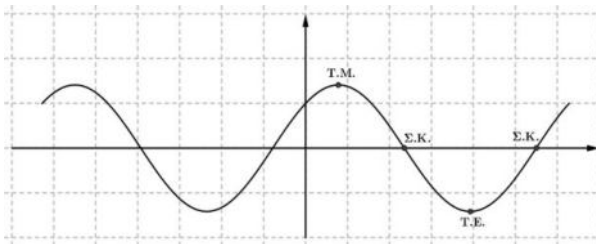
Άρα η f είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ και στο $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x = \frac{3\pi}{4}$ και στο $x = \frac{7\pi}{4}$. Τα σημεία καμπής είναι

$A\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ και $B\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.

στ) Επειδή η f είναι περιοδική αρκεί να την σχεδιάσουμε στο $[0, 2\pi]$ και ομοίως την συνεχίζουμε στο $[-2\pi, 0]$. Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	+	ο	-	-	ο	+
$f''(x)$	-	-	ο	+	+	ο
f	$\nearrow$ T.M. $\searrow$ Σ.Κ. $\swarrow$ T.E. $\nwarrow$ Σ.Κ. $\nearrow$					



23.α) Αρκεί $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 f(x) = e^{x^2} - 1 \Leftrightarrow x^2 f(x) - e^{x^2} + 1 = 0, x \neq 0$.

Έστω $g(x) = x^2 f(x) - e^{x^2} + 1, x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) - 2xe^{x^2} = x(2f(x) + xf'(x) - 2e^{x^2})$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2f(x) + xf'(x) - 2e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$h'(x) = 2f'(x) + f'(x) + xf''(x) - 4xe^{x^2} = 3f'(x) + xf''(x) - 4xe^{x^2} = 4xe^{x^2} - 4xe^{x^2} = 0 \Leftrightarrow h(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$h(1) = 2f(1) + f'(1) - 2e = 2e - 2 + 2 - 2e = 0 \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Τότε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Είναι

$$g(1) = f(1) - e + 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f(x) - e^{x^2} + 1 = 0. \text{ Για } x \neq 0$$

είναι $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ και $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{0}{0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{2x} = 1$, άρα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

β) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{0}{0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{3x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xe^{x^2}}{3} = 0$, οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο το $A(0,1)$.

Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{2e^{x^2}(x^2 - 1) + 2}{x^3}$. Έστω

$$a(x) = 2e^{x^2}(x^2 - 1) + 2, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } a'(x) = 4x^3 e^{x^2}. \text{ Για κάθε } x < 0 \text{ είναι}$$

$$a'(x) < 0 \Rightarrow a \searrow (-\infty, 0], \text{ οπότε } a(x) > a(0) = 0 \text{ και για κάθε } x > 0 \text{ είναι}$$

$$a'(x) > 0 \Rightarrow a \nearrow [0, +\infty), \text{ οπότε } a(x) > a(0) = 0. \text{ Για κάθε } x < 0 \text{ είναι}$$

$$f'(x) < 0 \text{ και για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f'(x) > 0.$$

Άρα η f δεν έχει κρίσιμο σημείο στο $\mathbb{R}^*$.

γ) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty).$$

$$\delta) f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2e^{x^2}(x^2-1)+2}{x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}(x^2-1)+2}{x^4} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xe^{x^2}(x^2-1)+4xe^{x^2}}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xe^{x^2}(x^2-1+1)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4xe^{x^2}x^2}{4x^3} = 1.$$

Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f''(0) \neq 0$, η f' δεν έχει κρίσιμο σημείο το $O(0,0)$.

$$\epsilon) \text{ Για } x \neq 0 \text{ είναι } f''(x) = \frac{2e^{x^2}(2x^4 - 3x^2 + 3) - 6}{x^4}.$$

Έστω $b(x) = 2e^{x^2}(2x^4 - 3x^2 + 3) - 6$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $b'(x) = 4x^3e^{x^2}(2x^2 + 1)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $b'(x) < 0 \Rightarrow b \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $b'(x) > 0 \Rightarrow b \nearrow [0, +\infty)$. Η b έχει ελάχιστο το $b(0) = 0$, οπότε για κάθε $x \neq 0$ είναι $b(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

στ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \stackrel{x^2=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - 1}{u} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty, \text{ οπότε η } f \text{ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \stackrel{x^2=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - 1}{u} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty, \text{ οπότε η } f \text{ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο } +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{x^3} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2xe^{x^2}}{3x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4xe^{x^2}}{3} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{x^3} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{x^2}}{3x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4xe^{x^2}}{3} = 0,$$

οπότε η f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

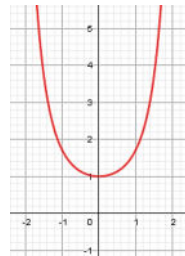
ζ) σχήμα

η) Παρατηρούμε ότι η f είναι άρτια, οπότε

$f(-1) = f(1) = e - 1$ και f συνεχής στο $[-1, 1]$ και

παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, οπότε στο διάστημα $[-1, 1]$

εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle.



24.α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x) = f(x) - e^x + \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

παράγωγο $g'(x) = f'(x) - e^x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη με

δεύτερη παράγωγο $g''(x) = f''(x) - e^x - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$.

Έχουμε $g''(x) - g'(x) = f''(x) - e^x - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - f'(x) + e^x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} =$

$$f''(x) - f'(x) - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = g'(x) \Leftrightarrow g'(x) = c \cdot e^x, c \in \mathbb{R}$$

Όμως $g'(1) = 0$ οπότε $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$.

Για $x=1$: $g(1) = f(1) - e - 1 = e + 1 - e - 1 = 0$ οπότε

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - e^x + \ln x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^x - \ln x + \frac{1}{x}, x > 0$$

β) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ και

δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} > 0$ άρα η

f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επομένως η f' έχει σύνολο τιμών το

$$f'((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1 - \infty - \infty = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty - 0 - 0 = +\infty.$$

Το $0 \in f'((0, +\infty))$ άρα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε $f'(x_0) = 0$.

Για $0 < x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για

$$x > x_0 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$,

γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$.

ii) Η f' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 6 < 0$, $f'(1) = e - 2 > 0$ άρα

$f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'(1) < 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα η

εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, η οποία είναι

μοναδική όπως είδαμε και είναι το x_0 . Έχουμε: $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{x_0} - \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} \text{ και } f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 + \frac{1}{x_0} =$$

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} - \ln x_0 + \frac{1}{x_0} = \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} - \ln x_0. \text{ Όμως } \frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x_0} < 2 \Leftrightarrow$$

$$2 < \frac{2}{x_0} < 4 \quad (1), \quad \frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x_0} < 2 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{x_0^2} < 4 \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} < \ln x_0 < 0 \Leftrightarrow 0 < -\ln x_0 < -\ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < -\ln x_0 < \ln 2 \quad (3).$$

Με πρόσθεση των σχέσεων (1), (2) και (3) έχουμε :

$$3 < -\ln x_0 + \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} < 8 + \ln 2 \Leftrightarrow 3 < f(x_0) < 8 + \ln 2 \text{ οπότε } f(x_0) > 0.$$

Το $f(x_0)$ ελάχιστο οπότε $f(x) \geq f(x_0) > 0$ για κάθε $x > 0$.

γ) i) Από το ερώτημα β) έχουμε $f''(x) > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

ii) Έστω $B(x_1, f(x_1))$, $x_1 > 0$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f .

$$H(\varepsilon) \text{ έχει εξίσωση : } y - e^{x_1} + \ln x_1 - \frac{1}{x_1} = \left(e^{x_1} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1^2} \right) (x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$y = \left(e^{x_1} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1^2} \right) x - e^{x_1} x_1 + 1 + \frac{1}{x_1} + e^{x_1} - \ln x_1 + \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow$$

$$y = \left(e^{x_1} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1^2} \right) x - e^{x_1} x_1 + 1 + \frac{2}{x_1} + e^{x_1} - \ln x_1. \text{ Το σημείο } A \text{ ανήκει στην } (\varepsilon)$$

$$\text{οπότε: } 3 = -e^{x_1} x_1 + 1 + \frac{2}{x_1} + e^{x_1} - \ln x_1 \Leftrightarrow e^{x_1} (x_1 - 1) + \ln x_1 - \frac{2}{x_1} + 2 = 0. \quad (4)$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } k(x) = e^x (x - 1) + \ln x - \frac{2}{x} + 2, \quad x > 0.$$

$$H \, k \text{ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο } k'(x) = e^x \cdot x + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0 \text{ άρα είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και 1-1.

Από τη σχέση (4) έχουμε : $k(x_1) = 0 \Leftrightarrow k(x_1) = k(1) \Leftrightarrow x_1 = 1$ οπότε η (ε) έχει εξίσωση (ε) : $y = (e-2)x - e + 1 + 2 + e \Leftrightarrow y = (e-2)x + 3$.

iii) Η f είναι κυρτή οπότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένης εκτός από το σημείο επαφής άρα :

$$f(x) \geq (e-2)x + 3 \Leftrightarrow f(x) \geq ex - 2x + 3 \Leftrightarrow e^x - \ln x + \frac{1}{x} \geq ex - 2x + 3 \Leftrightarrow$$

$$xe^x - x \ln x + 1 \geq ex^2 - 2x^2 + 3x \Leftrightarrow xe^x - x \ln x \geq ex^2 - 2x^2 + 3x - 1.$$

Αρκεί $(e-2)x^2 + 3x - 1 \geq (e-2)x^2 + 2x \Leftrightarrow x \geq 1$.

δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x - \ln x + \frac{1}{x} \right) = 1 + \infty + \infty = +\infty$ άρα η f έχει κατακόρυφη

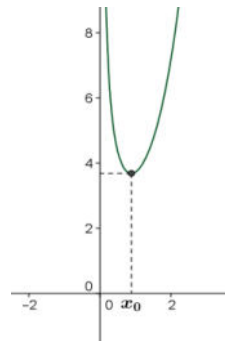
ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \ln x + \frac{1}{x} \right) = +\infty + 0$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες..}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \right) \text{ Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \ln x + \frac{1}{x}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

x	0	x_0	$+\infty$
f''	+		+
f'	-	0	+
f	$\searrow$	O.E $\nearrow$	



33

Συνδυαστικές επαναληπτικές ασκήσεις

Επίπεδο Β1

1. α) $A_h = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x \neq -1 \text{ ισχύει}\} = \mathbb{R}$

$$h(x) = f(g(x)) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow h \text{ } 1-1$, οπότε αντιστρέφεται.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1. \text{ Η } h$$

είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το

$$h(\mathbb{R}) = (0, 1), \text{ άρα } A_{h^{-1}} = (0, 1). \text{ Θέτουμε } h(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow$$

$$e^x = e^x y + y \Leftrightarrow e^x - ye^x = y \Leftrightarrow e^x(1 - y) = y \stackrel{y \in (0,1)}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y}{1 - y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{1 - y}.$$

Άρα $h^{-1}(y) = \ln \frac{y}{1 - y}$, $y \in (0, 1)$, οπότε $h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1 - x}$, $x \in (0, 1)$.

γ) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με

$$\varphi'(x) = \left(\ln \frac{x}{1 - x} \right)' = (\ln x - \ln(1 - x))' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x(1 - x)}.$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $\varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow (0, 1)$, οπότε η φ δεν έχει ακρότατα.

Η φ' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $\varphi''(x) = -\frac{(x - x^2)'}{x^2(1 - x)^2} = -\frac{2x - 1}{x^2(1 - x)^2}.$

$$\varphi''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 1}{x^2(1 - x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ είναι $\varphi''(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{2}\right]$,

είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ είναι $\varphi''(x) > 0$ και επειδή

η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η φ έχει σημείο

καμπής το $\left(\frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right) \equiv \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{1-x} \stackrel{\frac{x}{1-x}=u}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$, άρα η ευθεία $x = 0$,

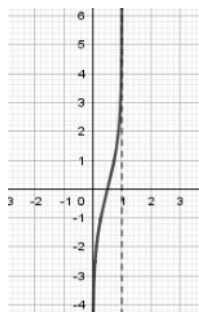
δηλαδή ο άξονας $y'y$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x}{1-x} \stackrel{\frac{x}{1-x}=u}{=} \lim_{x \rightarrow 1^- \Rightarrow u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$, άρα η ευθεία $x = 1$, είναι

κατακόρυφη

ασύμπτωτη της C_f .

x	0	1/2	1
φ''	-		+
φ'	+	0	+
φ			



$$\epsilon) g(x) \geq \alpha(x+1)f(x) + 1 \Leftrightarrow e^x \geq \alpha \frac{x}{x+1} + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x - \alpha x - 1 \geq 0 \quad (1). \text{ Έστω } t(x) = e^x - \alpha x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι $t(0) = 0$, οπότε η (1) γίνεται:

$t(x) \geq t(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η t έχει ελάχιστο για $x = 0$ που είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η t είναι παραγωγίσιμη με $t'(x) = e^x - \alpha$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $t'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

στ) Η εφαπτομένη της C_g στο $x = 0$ είναι $\epsilon: y - g(0) = g'(0)x \Leftrightarrow y = x + 1$.

Αρχικά θα αναζητήσουμε σημείο $(x_1, f(x_1))$, στο οποίο είναι $f'(x_1) = \lambda_{\epsilon} = 1$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}, \text{ οπότε } f'(x_1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1+1)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$(x_1+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_1+1 = \pm 1 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ ή } x_1 = -2$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x$ και δεν είναι η ϵ . Η εφαπτομένη της C_f στο $x = -2$ έχει εξίσωση $y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Leftrightarrow y = x + 4$ και δεν είναι η ϵ . Επομένως η εφαπτομένη της C_g στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$ δεν εφάπτεται και στη C_f .

$$2. \alpha) \text{ Είναι } f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$$

β) Είναι $f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \Rightarrow f \cap \mathbb{R}^{\searrow}$

γ) Έστω $g(x) = xf'(x) - f(x) - \ln 2, x \geq 0$. Είναι $g'(x) = xf''(x) < 0$ για $x > 0$, η g συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε $g \searrow [0, +\infty)$. Για κάθε

$$x > 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) - \ln 2 < 0 \Leftrightarrow xf'(x) < f(x) + \ln 2$$

δ) $f \not\rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f \rightarrow -\infty$, οπότε αντιστρέφεται. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - \ln(e^x + 1)] = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(e^x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\frac{e^x}{e^x + 1} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0), \text{ άρα } A_{f^{-1}} = (-\infty, 0). f(x) = y \Leftrightarrow \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = e^y \Leftrightarrow e^x = e^x e^y + e^y \Leftrightarrow e^x - e^x e^y = e^y \Leftrightarrow e^x (1 - e^y) = e^y \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{e^y}{1 - e^y} \stackrel{y < 0}{\Leftrightarrow} x = \ln \frac{e^y}{1 - e^y}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \ln \frac{e^y}{1 - e^y}, y < 0, \text{ οπότε}$$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{e^x}{1 - e^x}, x < 0.$$

ε) Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια

ασύμπτωτη στο $+\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \ln(e^x + 1) \right) \frac{1}{x} = 1 - 0 \cdot 0 = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) = 0, \text{ άρα η}$$

ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

στ) σχήμα

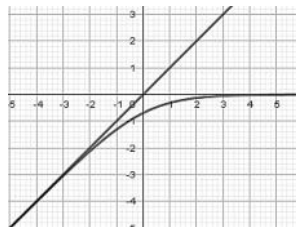
3. α) $\ln(e^{f(x)} x^3) = x^3 \Leftrightarrow \ln e^{f(x)} + \ln x^3 = x^3 \Leftrightarrow$

$$f(x) + 3 \ln x = x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3 \ln x.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3(x^3 - 1)}{x}$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι

$f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι



συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = 6x + \frac{3}{x^2}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup (0, +\infty)$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3 \ln x) = +\infty$, οπότε η $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3 \ln x}{x^3} \right) \right] = +\infty(1 - 0) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0, \text{ άρα η } f \text{ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - 3 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0, \text{ οπότε}$$

η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

$$\delta) x^3 - 2 = 3 \ln x \Leftrightarrow x^3 - 3 \ln x = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2$$

Είναι $f(1) = 1$, $f(e) = e^3 - 3$ και $f(1) < 2 < f(e)$. Επειδή η f είναι συνεχής,

λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε

$f(x_0) = 2$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$ το x_0 είναι μοναδικό.

ε) Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (1, +\infty)$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (1, +\infty)$. Επειδή $1821 \in \Delta_2$, είναι $f(1821) \in f(\Delta_2)$, οπότε και

$f(1821) \in f(\Delta_1)$, επομένως υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$

τέτοιο, ώστε $f(x_1) = f(1821)$

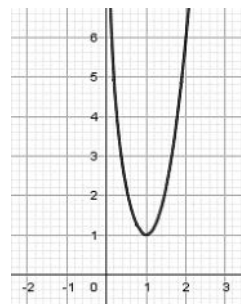
στ)

x	0	1	$+\infty$
f''	+	+	+
f'	-	0	+
f	↘		↗

$$\zeta) f(x) \geq x^3 - ax + a \Leftrightarrow x^3 - 3 \ln x \geq x^3 - ax + a \Leftrightarrow$$

$$ax - a - 3 \ln x \geq 0 \quad (4)$$

Έστω $h(x) = ax - a - 3 \ln x$, $x > 0$. Παρατηρούμε ότι $h(1) = a - a - 3 \ln 1 = 0$,



οπότε η (4) γράφεται $h(x) \geq h(1)$ (5). Λόγω της (5) η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \alpha - \frac{3}{x}$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $h'(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$.

4. α) i. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει να ισχύει: $x \neq 0$ και $\alpha x > 0 \Leftrightarrow$
 $\begin{cases} x > 0, \text{αν } \alpha > 0 \\ x < 0, \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$ οπότε για να έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ πρέπει $\alpha > 0$.

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\alpha x}}{1} = 0$$

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 5x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha x = +\infty \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{\alpha x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 5x + 1}\right) \stackrel{u = \frac{\alpha x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 5x + 1}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow +\infty}} f(u) = 0 \text{ από β) i).}$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη με τύπο $f'(x) = \frac{1 - \ln \alpha x}{x^2}$. Η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη στο σημείο της $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = 4x + \beta \text{ οπότε } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln \frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{4}} = 4 \Leftrightarrow 1 - \ln \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2. \text{ Επομένως η } f \text{ έχει τύπο } f(x) = \frac{\ln 2x}{x}$$

$$\lambda' - \ln \frac{\alpha}{2} = \lambda' \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2. \text{ Επομένως η } f \text{ έχει τύπο } f(x) = \frac{\ln 2x}{x}$$

Το σημείο A ανήκει στην (ε) οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} + \beta \Leftrightarrow 0 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2$.

γ) Η g είναι περιττή οπότε $g(-x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $g(0) = -g(0) \Leftrightarrow 2g(0) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$ οπότε $B(0,0)$.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της (δ) με την γραφική παράσταση της f .

Η (δ) έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{\ln 2x_0}{x_0} = \frac{1 - \ln 2x_0}{x_0^2}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1 - \ln 2x_0}{x_0^2} \cdot x - \frac{1 - \ln 2x_0}{x_0} + \frac{\ln 2x_0}{x_0} \Leftrightarrow y = \frac{1 - \ln 2x_0}{x_0^2} \cdot x + \frac{2 \ln 2x_0 - 1}{x_0}.$$

Η (δ) διέρχεται από το σημείο Β οπότε :

$$0 = \frac{1 - \ln 2x_0}{x_0^2} \cdot 0 + \frac{2 \ln 2x_0 - 1}{x_0} \Leftrightarrow \frac{2 \ln 2x_0 - 1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow 2 \ln 2x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \ln 2x_0 = 1 \Leftrightarrow \ln 2x_0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x_0 = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt{e}}{2}, \text{ άρα η (δ) έχει εξίσωση :}$$

$$y = \frac{1 - \ln \frac{\sqrt{e}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^2} \cdot x + \frac{2 \ln \frac{\sqrt{e}}{2} - 1}{\frac{\sqrt{e}}{2}} \Leftrightarrow y = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{e}{4}} \cdot x + \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{e}}{2}} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{e}{4}} \cdot x \Leftrightarrow y = \frac{2}{e} \cdot x$$

δ) Βρίσκουμε το σημείο τομής των (δ) και

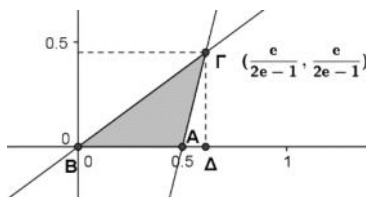
$$(ε) : \frac{2}{e} \cdot x = 4x - 2 \Leftrightarrow 2x = 4ex - 2e \Leftrightarrow$$

$$(4e - 2) \cdot x = 2e \Leftrightarrow x = \frac{2e}{4e - 2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{e}{2e - 1}. \text{ Για } x = \frac{e}{2e - 1} \text{ έχουμε } y = \frac{2}{2e - 1}$$

οπότε το σημείο τομής τους είναι το $\Gamma \left(\frac{e}{2e - 1}, \frac{2}{2e - 1} \right)$ και το ζητούμενο

$$\text{εμβαδόν είναι το : } (BA\Gamma) = \frac{1}{2} (BA) \cdot (\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2e - 1} = \frac{1}{4e - 2}.$$



5. α) Έστω $h(x) = \frac{f(x) - 2}{x - 2}$, $x \neq 2$ με $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 2$. Τότε:

$$h(x)(x - 2) = f(x) - 2 \Leftrightarrow f(x) = h(x)(x - 2) + 2. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} [h(x)(x - 2) + 2] = 2 \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής, είναι και}$$

$$f(2) = 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 2 \Leftrightarrow f'(2) = 2$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και στο $(0, 2)$. Επειδή $f(0) = f(2)$, εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[0, 2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, το ξ είναι η μοναδική ρίζα της f' .

Επομένως υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο

σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

γ) Για κάθε $x < \xi \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \xi]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε

$x > \xi \Leftrightarrow f'(x) > f'(\xi) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[\xi, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο $x = \xi$, οπότε $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) 1^{ος} τρόπος: Έστω $g(x) = f(x) - 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - f'(2)$.

Για κάθε $x < 2 \Leftrightarrow f'(x) < f'(2) \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε

$x > 2 \Leftrightarrow f'(x) > f'(2) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει ελάχιστο στο $x = 2$, οπότε $g(x) \geq g(2) \Leftrightarrow f(x) - 2x + 2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος: Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 2$ έχει εξίσωση

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq 2x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Επειδή $f(x) \geq 2x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2) = +\infty$ είναι και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

στ) Αν $\alpha = \beta$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$ τότε λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει $\rho \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } f'(\rho) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \rho < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\rho) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\beta) \Leftrightarrow$$

$$f'(\alpha)(\beta - \alpha) < f(\beta) - f(\alpha) < f'(\beta)(\beta - \alpha). \text{ Ομοίως αν } \alpha > \beta.$$

6. α) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_g με την γραφική

παράσταση της f . Τότε: $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow ae^{x_0} = 1 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow x_0 = -\ln a$ και

$$f(x_0) = x_0 + \beta \Leftrightarrow ae^{x_0} + 1 = x_0 + \beta \Leftrightarrow 2 = -\ln a + \beta \Leftrightarrow \beta = 2 + \ln a.$$

$$\beta) f(g(x)) = e^{x+2} + 1 \Leftrightarrow \alpha e^{x+\beta} \not\equiv 1 = e^{x+2} \not\equiv 1 \quad \xrightarrow{\alpha) \text{ερώτημα}} \Leftrightarrow$$

$$\alpha e^{x+2+\ln \alpha} = e^{x+2} \Leftrightarrow \alpha e^{\cancel{x+2}} \cdot e^{\ln \alpha} = \cancel{e^{x+2}} \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \xrightarrow{\alpha > 0} \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } \beta = 2 + \ln 1 = 2.$$

Για $\alpha = 1, \beta = 2$ έχουμε $f(x) = e^x + 1$ και $g(x) = x + 2$. Επίσης

$$\varphi(x) = e^{x+2} + 1, x \in \mathbb{R}.$$

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$x_1 + 2 < x_2 + 2 \Leftrightarrow e^{x_1+2} < e^{x_2+2} \Leftrightarrow e^{x_1+2} + 1 < e^{x_2+2} + 1 \Leftrightarrow$$

$\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 άρα αντιστρέφεται.

(ή Η φ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\varphi'(x) = e^{x+2} > 0$ οπότε η φ είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 άρα αντιστρέφεται.) Η φ έχει σύνολο τιμών το

$$\varphi(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (0+1, +\infty+1) = (1, +\infty) = A_{\varphi^{-1}}.$$

$$\Theta \acute{\epsilon}\tau\omega \varphi(x) = y \Leftrightarrow e^{x+2} + 1 = y \Leftrightarrow e^{x+2} = y - 1 \Leftrightarrow x + 2 = \ln(y - 1) \Leftrightarrow$$

$$x = \ln(y - 1) - 2 \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = \ln(y - 1) - 2 \text{ οπότε } \varphi^{-1}(x) = \ln(x - 1) - 2, x > 1.$$

δ) i) Από τη σχέση : $g(x) \leq k(x) \leq f(x)$ για $x = 0$ έχουμε : $2 \leq k(0) \leq 2$

οπότε $k(0) = 2$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ οπότε από το Κριτήριο

Παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 2 = k(0)$ άρα η k είναι συνεχής στο 0.

$$\text{ii) } g(x) \leq k(x) \leq f(x) \Leftrightarrow x + 2 \leq k(x) \leq f(x) \Leftrightarrow x \leq k(x) - 2 \leq f(x) - 2 \Leftrightarrow$$

$$x \leq k(x) - k(0) \leq f(x) - f(0). (*)$$

$$\text{Από τη σχέση } (*) \text{ για } x > 0 \text{ έχουμε : } 1 \leq \frac{k(x) - k(0)}{x} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = e^0 = 1 \text{ οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k(x) - k(0)}{x} = 1 \text{ (1). Από τη σχέση } (*) \text{ για } x < 0 \text{ έχουμε :}$$

$$1 \geq \frac{k(x) - k(0)}{x} \geq \frac{f(x) - f(0)}{x}. \text{ Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = e^0 = 1 \text{ οπότε}$$

$$\text{από Κριτήριο Παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{k(x) - k(0)}{x} = 1 \text{ (2). Από (1),(2) έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k(x) - k(0)}{x} = 1 \text{ άρα η } k \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } 0 \text{ με } k'(0) = 1$$

7. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + \alpha) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\beta \eta \mu x - 1) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 1 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x'(x+1)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x - 1 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \beta \frac{\eta\mu x}{x} = \beta.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, είναι $\beta = 1$.

$$\beta) \text{ Είναι } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f$$

στο $x_0 = 0$ έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y + 1 = x \Leftrightarrow y = x - 1$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0 - 0 = 0 \text{ γιατί για κάθε } x > 0$$

$$\text{είναι } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε}$$

$$\text{από το κριτήριο παρεμβολής είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{f(x)} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} + x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 1} + x)(\sqrt{x^2 + x - 1} - x)}{\sqrt{x^2 + x - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 1 - x^2}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} = -\frac{1}{2}$$

$$\epsilon) \text{ Για κάθε } x < 0 \text{ είναι } f'(x) = (x^2 + x - 1)' = 2x + 1.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}. \text{ Για κάθε } x < -\frac{1}{2} \text{ είναι } f'(x) < 0 \text{ και επειδή}$$

η f είναι συνεχής στο $\left[-\infty, -\frac{1}{2} \right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $-\frac{1}{2} < x < 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, 0 \right]$,

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Τώρα επειδή η $y = \eta\mu x - 1$ είναι

κατακόρυφη μετατόπιση της βασικής συνάρτησης $y = \eta \mu x$ και η μονοτονία της είναι γνωστή, ισχύει ότι $f \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\searrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ και $\nearrow \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στα $-\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2}$ τα $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$ αντίστοιχα και τοπικό μέγιστο στα $\frac{\pi}{2}, 2\pi$ τα $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $f(2\pi) = -1$.

8. α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 6x^2 + 2\alpha x + \beta$. Επειδή η f έχει ελάχιστη κλίση στο σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$, η f' έχει ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{8} + \alpha \cdot \frac{1}{4} + \beta \cdot \frac{1}{2} + 1 = -\frac{11}{2} \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = -27$ (1)

Είναι $f''(x) = 12x + 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{\alpha}{6}$.

1^{ος} τρόπος: Επειδή η f' έχει ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τότε από Θεώρημα Fermat:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3$$

Τότε από την σχέση (1) είναι $-3 + 2\beta = -27 \Leftrightarrow 2\beta = -24 \Leftrightarrow \beta = -12$.

Για $\beta = -12$ και $\alpha = -3$ είναι $f''(x) = 12x - 6$

Για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι

$f''(x) > 0$. Επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$,

γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, οπότε η f' έχει ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$.

2^{ος} τρόπος: Για κάθε $x < -\frac{\alpha}{6}$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο

$\left(-\infty, -\frac{\alpha}{6}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > -\frac{\alpha}{6}$ είναι

$f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\alpha}{6}, +\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα

στο διάστημα αυτό. Η f' έχει ελάχιστο στο $x = -\frac{\alpha}{6}$, άρα $-\frac{\alpha}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = -3$.

Τότε από την σχέση (1) είναι $-3 + 2\beta = -27 \Leftrightarrow 2\beta = -24 \Leftrightarrow \beta = -12$

β) Είναι $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 2$$

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[2, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από αυτά. Για κάθε $x \in (-1, 2)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, 2]$, είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -19$.

γ) Είναι $f(0) = 1$, $f(1) = -12$, δηλαδή $f(0)f(1) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολωνυμική, εφαρμόζεται για αυτήν το θεώρημα Bolzano στο $[0, 1]$, άρα $\kappa = 0$.

δ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία ε με εξίσωση: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων, πρέπει:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0(6x_0^2 - 6x_0 - 12) - 2x_0^3 + 3x_0^2 + 12x_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x_0^3 - 6x_0^2 - 12x_0 - 2x_0^3 + 3x_0^2 + 12x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x_0^3 - 3x_0^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \overset{\text{Horner}}{(x_0 - 1)(4x_0^2 + x_0 + 1) = 0} \Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή}$$

$$4x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \text{ αδύνατη } (\Delta < 0)$$

$$\text{Άρα } \varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 12 = -12(x - 1) \Leftrightarrow y = -12x.$$

9. α) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα και στο 1 οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x + 1) = \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha.$$

$$\text{β) Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1 \text{ άρα η } f$$

δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με

$$f'(x) = 2x + 1, \text{ στο } (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = 3x^2.$$

γ) Για $x < 0$: $f'(x) = -3 \Leftrightarrow 2x + 1 = -3 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$.

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι :

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y - 3 = -3(x + 2) \Leftrightarrow y = -3x - 3.$$

Για $x > 0$: $f'(x) = -3 \Leftrightarrow 3x^2 = -3$ αδύνατη .

δ) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την γραφική παράσταση της f . Αν $x_0 < 0$: Η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^2 - x_0 - 1 = (2x_0 + 1)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = (2x_0 + 1)x - x_0^2 + 1. \text{ Το σημείο } (0,0) \text{ ανήκει στην εφαπτομένη οπότε :}$$

$$0 = -x_0^2 + 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1 \text{ και } (\varepsilon) : y = -x.$$

Αν $x_0 > 0$: Η εφαπτομένη έχει εξίσωση : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$

$$y - x_0^3 - 1 = 3x_0^2(x - x_0) \Leftrightarrow y = 3x_0^2x - 2x_0^3 + 1. \text{ Το σημείο } (0,0) \text{ ανήκει στην}$$

εφαπτομένη οπότε : $0 = -2x_0^3 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ άρα είναι

$$(\varepsilon) : y = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 x - 2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt[3]{2}^2} x$$

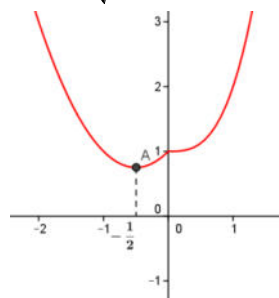
ε) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την

παραβολή $y = x^2 + x + 1, x < 0$ και την γραφική

παράσταση της συνάρτησης $y = x^3 + 1, x > 0$, η

οποία είναι η κατακόρυφη μετατόπιση της

καμπύλης $y = x^3$ κατά 1 προς τα πάνω.



10. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + \gamma$

Τα εσωτερικά σημεία $-1, 1$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, η f είναι

παραγωγίσιμη σ' αυτά οπότε ισχύει το θεώρημα Fermat άρα :

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3a - 2\beta + \gamma = 0(1) \text{ και } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3a + 2\beta + \gamma = 0(2)$$

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από την (2) έχουμε $4\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = 6ax + 2\beta \stackrel{\beta=0}{=} 6ax. \text{ Έχουμε:}$$

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow \delta = 2, f''(1) = 6 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1.$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $3 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -3$ οπότε : $f(x) = x^3 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}$.

γ) Έχουμε $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ ή } x \leq -1$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν πολωνυμική. Όμως $f'(x) > 0$ στα διαστήματα

$(-\infty, -1), (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$ στο $(-1, 1)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στα

διαστήματα $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ άρα παρουσιάζει

τοπικό μέγιστο στο -1 το $f(-1) = 4$ και τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 0$.

δ) Έστω $A_1 = (-\infty, -1)$, $A_2 = [-1, 1]$ και $A_3 = (1, +\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας και της συνέχειας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2), f(-1) \right) =$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3, 4 \right) = (-\infty, 4), f(A_2) = [f(1), f(-1)] = [0, 4] \text{ και}$$

$$f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) \right) = \left(0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \right) = (0, +\infty). \text{ Αν:}$$

- $\alpha < 0$, τότε το α ανήκει μόνο στο $f(A_1)$, οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω της μονοτονίας) $\eta \in (-\infty, -1)$ τέτοιος ώστε $f(\eta) = \alpha$.
- $0 < \alpha < 4$, τότε το α ανήκει και στα $f(A_1), f(A_2), f(A_3)$, οπότε υπάρχουν μοναδικοί (λόγω της μονοτονίας) $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3$ τέτοιοι ώστε $f(x_1) = \alpha, f(x_2) = \alpha, f(x_3) = \alpha$.
- $\alpha > 4$, τότε το α ανήκει μόνο στο $f(A_3)$, οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω της μονοτονίας) $\theta \in (1, +\infty)$ τέτοιος ώστε $f(\theta) = \alpha$.
- $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα την $f(1) = 0$ και μία ακόμη ρίζα < -1 αφού το α ανήκει και στο $f(A_1)$.
- $\alpha = 4$, τότε η εξίσωση έχει μία ρίζα την $f(-1) = 4$ και μία ακόμη ρίζα > 1 αφού το α ανήκει και στο $f(A_3)$.

$$11. \alpha) f(1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x^5+20} \cdot \sin x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}}{x^5} \cdot \frac{3+\frac{1}{x}}{2+\frac{20}{x^5}} \cdot \sin x \Leftrightarrow$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{2+\frac{20}{x^5}} \cdot \frac{\sin x}{x^4} = 0, \text{ άρα } f(1) = f(4) - 1 \Leftrightarrow 0 = f(4) - 1 \Leftrightarrow f(4) = 1.$$

$$\left(\left| \frac{\sin x}{x^4} \right| \leq \left| \frac{1}{x^4} \right| \stackrel{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^4} \leq \frac{\sin x}{x^4} \leq \frac{1}{x^4} \cdot \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^4} \right)$$

οπότε από Κριτήριο Παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^4} = 0$).

$$\beta) f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 3x + 5} + 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 3x + 5}^2 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 3x + 5} - 3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x^2 + 3x + 5 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 3x + 5} - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} \cdot \frac{3 + \frac{5}{x}}{\sqrt{9 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}} + 3} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 3^x \ln 3 - 1$. Έχουμε

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3^x \ln 3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3^x \ln 3 \geq 1 \Leftrightarrow 3^x \geq \frac{1}{\ln 3} \Leftrightarrow x \geq \ln \left(\frac{1}{\ln 3} \right) \Leftrightarrow$$

$x \geq -\ln(\ln 3)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Όμως $g'(x) > 0$ στο $(-\ln(\ln 3), +\infty)$, $g'(x) < 0$ στο $(-\infty, -\ln(\ln 3))$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\ln(\ln 3), +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\ln(\ln 3)]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $-\ln(\ln 3)$. Επομένως

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\ln(\ln 3) < 0.$$

$(-\ln(\ln 3) < 0 \Leftrightarrow \ln(\ln 3) > 0 = \ln 1 \Leftrightarrow \ln 3 > 1 = \ln e \Leftrightarrow 3 > e$ ισχύει.

δ) 1,2,3 διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, η f συνεχής στο $[0, 4]$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $[0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4]$. Όμως $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0, f\left(\frac{3}{2}\right) < 0, f\left(\frac{5}{2}\right) < 0, f(4) > 0$ οπότε $f(x) < 0$ στο $[0, 1), f(x) < 0$ στο $(1, 2), f(x) < 0$ στο $(2, 3)$ και $f(x) > 0$ στο $(3, 4]$.

12. α) Έχουμε: $A_f = (-\infty, 2], A_g = \mathbb{R}$. Για το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ έχουμε:

$$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \sqrt{x-2} \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2 \text{ οπότε } A_{g \circ f} = (-\infty, 2].$$

Η $g \circ f$ έχει τύπο: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{2-x}^2 + 4 = 2 - x + 4 = 6 - x$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2)$ με παράγωγο $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} < 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Επομένως έχει σύνολο τιμών το

$$f((-\infty, 2]) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = [0, +\infty) \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \right). \text{ Άρα η } f^{-1} \text{ έχει}$$

πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = y \Leftrightarrow 2-x = y^2 \Leftrightarrow x = 2-y^2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 2-y^2$ οπότε η f^{-1} έχει τύπο $f^{-1}(x) = 2-x^2, x \geq 0$.

$$\gamma) \text{ i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2-x}}{x^2+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-\cancel{x}}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{4}{x^2}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}}{1 + \frac{4}{x^2}} \right) = 0.$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{g(x)} - 6 - \sqrt{2}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2-2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2-2-2) \cdot \sqrt{2-x}}{(2-x) \cdot (\sqrt{x^2-2} + \sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2-4) \cdot \sqrt{2-x}}{(2-x) \cdot (\sqrt{x^2-2} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(\cancel{x-2})(x+2) \cdot \sqrt{2-x}}{-(\cancel{x-2}) \cdot (\sqrt{x^2-2} + \sqrt{2})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left[-\frac{(x+2) \cdot \sqrt{2-x}}{\sqrt{x^2-2} + \sqrt{2}} \right] = -\frac{4 \cdot 0}{2\sqrt{2}} = 0.$$

$$\text{iii) } \left| f(x) \eta \mu \frac{1}{g(x)} \right| \leq |f(x)| \stackrel{x < 2}{\Leftrightarrow} -|f(x)| \leq f(x) \eta \mu \frac{1}{g(x)} \leq |f(x)|. \text{ Ομως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} |f(x)| = 0 = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-|f(x)|) \text{ οπότε από Κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{g(x)} = 0$$

δ) Έστω (ζ) κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων της g και f⁻¹.

Έστω Δ(x₁, g(x₁)), x₁ ∈ ℝ, Ε(x₂, f⁻¹(x₂)), x₂ ≥ 0, τα σημεία επαφής της (ζ)

με τις γραφικές παραστάσεις των g, f⁻¹ αντίστοιχα. Η (ζ) έχει εξισώσεις

αντίστοιχα ζ: y - g(x₁) = g'(x₁)(x - x₁) ⇔ y - x₁² - 4 = 2x₁(x - x₁) ⇔

$$y = 2x_1 \cdot x - x_1^2 + 4. \text{ και } y - f^{-1}(x_2) = (f^{-1})'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$$

$$y - 2 + x_2^2 = -2x_2(x - x_2) \Leftrightarrow y = -2x_2 \cdot x + x_2^2 + 2. \text{ Εφ' όσον πρόκειται για την}$$

$$\text{ίδια ευθεία πρέπει: } \begin{cases} 2x_1 = -2x_2 \\ -x_1^2 + 4 = x_2^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -x_2^2 + 4 = x_2^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 2x_2^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \text{ απορρίπτεται } \left. \vphantom{\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}} \right\}.$$

Άρα η κοινή εφαπτομένη έχει εξίσωση y = -2x + 3.

13. α) Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 = f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = 1 = f(1)$ άρα

τελικά η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $f(0) \neq f(1)$ επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,1]$.

β) Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ και $(1, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ και $f(0) = 0$, επομένως

η f είναι συνεχής στο $x_1 = 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - x^3) = 2$ και $f(1) = 1$, επομένως η f δεν είναι συνεχής στο

$x_2 = 1$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$.

γ) Για $x < 0$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 2x < 0$

Για $0 < x < 1$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

Για $x > 1$: Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = -3x^2 < 0$

Η f είναι συνεχής στο μηδέν και

$f'(x) = 2x < 0$ για κάθε $x < 0$ άρα

$f \searrow (-\infty, 0]$. Επίσης η f είναι συνεχής στο

μηδέν και μη συνεχής στο 1 και

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ άρα

$f \nearrow [0,1)$. Είναι $f'(x) = -3x^2 < 0$ για κάθε $x > 1$ άρα $f \searrow (1, +\infty)$. Η f

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο μηδέν το $f(0) = 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \leq f(1)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) > f(1)$ δεν ικανοποιείται ο ορισμός του

τοπικού μέγιστου στο 1 και δεν είναι ακρότατο το $f(1)$.

δ) Οι δύο πρώτοι κλάδοι της συνάρτησης είναι γνωστές συναρτήσεις άρα

σχεδιάζονται εύκολα. Ο τρίτος κλάδος είναι η $y = -x^3$, η οποία είναι

συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ με την $y = x^3$,

μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

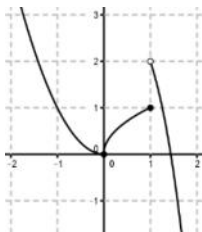
ε) $D_{\sqrt{f}} = \{x \in D_f / f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq \sqrt[3]{3}\} = (-\infty, \sqrt[3]{3}]$

γιατί έχουμε ότι: Είναι $f(x) = x^2 > 0$ για κάθε $x < 0$ και

$f(x) = \sqrt{x} \geq 0$ για κάθε $0 \leq x \leq 1$.

Για $x > 1$: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq 3 \Rightarrow 1 < x \leq \sqrt[3]{3}$

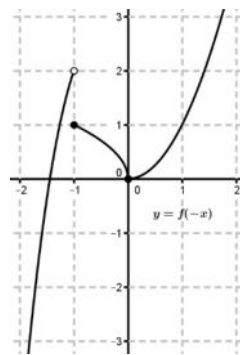
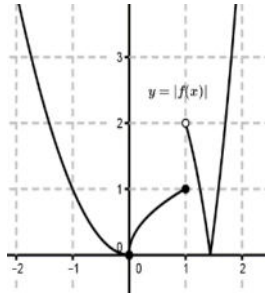
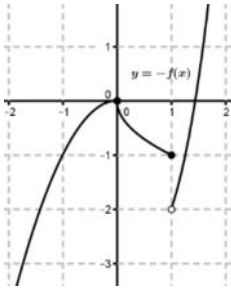
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	o	+	-
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	



$$D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f / f(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ και } x \neq \sqrt[3]{3}\} = \mathbb{R} - \{0, \sqrt[3]{3}\}$$

$$D_{f(-x)} = \{x \in \mathbb{R} / -x \in D_f\} = \mathbb{R}$$

στ) Η συνάρτηση $-f$ είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα $x'x$. Η $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των σημείων που βρίσκονται κάτω από αυτόν. Η $f(-x)$ είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα $y'y$.



Επίπεδο Β2

14. α) $f'(x) = \frac{x-1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = (x - \ln x)' \Leftrightarrow$

$f(x) = x - \ln x + c, c \in \mathbb{R}. \text{Είναι } f(1) = 1 \Leftrightarrow c = 0, \text{άρα } f(x) = x - \ln x.$

β) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \cup (0,+\infty)$$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty$, οπότε η ευθεία $x=0$ ($y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \right] = +\infty(1-0) = +\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0, \text{άρα η } f \text{ δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.}$$

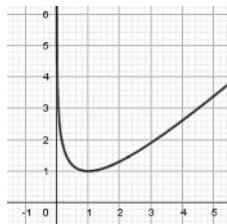
$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - x) = -\infty, \text{ άρα}$$

η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

x	0	1	$+\infty$
f''	+		+
f'	-	0	+
f			

δ)



$$\epsilon) e^{x-\lambda} - x = 0 \Leftrightarrow e^{x-\lambda} = x \Leftrightarrow x - \lambda = \ln x \Leftrightarrow x - \ln x = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (1, +\infty)$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (1, +\infty)$.

- Αν $\lambda < 1$, τότε $\lambda \notin f(A)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.

- Αν $\lambda = 1$, τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$. Επειδή $f(1) = 1$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

- Αν $\lambda > 1$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$ και η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2 .

στ) Επειδή $f(\Delta_1) = f(\Delta_2) = (1, +\infty)$, υπάρχει $\alpha \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = 2$ και υπάρχει $\beta \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) = 2$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Επειδή $f(\alpha) = f(\beta)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle την f στο $[\alpha, \beta]$.

ζ) Έστω $M(x(t), f(x(t)))$. Η απόσταση του M από την αρχή O των αξόνων

είναι $d(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x(t))}$. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης d είναι

$$d'(t) = \frac{(x^2(t) + f^2(x(t)))'}{2\sqrt{x^2(t) + f^2(x(t))}} = \frac{2x(t)x'(t) + 2f(x(t))f'(x(t))x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + f^2(x(t))}}.$$

$$\text{Τη χρονική στιγμή } t = 1 \text{ sec είναι } d'(1) = \frac{2x(1)x'(1) + 2f(1)f'(1)x'(1)}{2\sqrt{x^2(1) + f^2(x(1))}}.$$

Είναι $x(1) = 1^3 + 3 \cdot 1 - 3 = 1$, $x'(t) = 3t^2 + 3$ και $x'(1) = 6$, οπότε

$$d'(1) = \frac{2x(1)x'(1) + 2f(x(1))f'(x(1))x'(1)}{2\sqrt{x^2(1) + f^2(x(1))}} = \frac{12 + 2f(1)\cancel{f'(1)} \cdot 6}{2\sqrt{1 + f^2(1)}} = 3\sqrt{2} \text{ cm/sec}$$

15. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + 1$ και

$f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} + 1 \text{ και } g''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \Rightarrow g \cap (-1, +\infty)$$

Είναι $f(0) = 1 = g(0)$ και $g'(0) = 1 + 1 = 2 = f'(0)$, οπότε στο σημείο M οι

C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $\varepsilon: y - 1 = 2x \Leftrightarrow y = 2x + 1$

β) Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq 2x + 1$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η g είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x) \leq 2x + 1$ (2) για κάθε $x > -1$. Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow e^x + x \geq \ln(x+1) + x + 1 \Leftrightarrow e^x \geq \ln(x+1) + 1$ για κάθε $x > -1$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε η f έχει σύνολο

τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι συνεχής και το 0 περιέχεται στο σύνολο

τιμών της, υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow e^\rho = -\rho$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το ρ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -x$.

Το ρ είναι η τετμημένη του κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y = e^x$ και $y = -x$. Παρατηρούμε ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται σε σημείο του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $(-1, 0)$. Πράγματι,

$$f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0, f(0) = 1 > 0, \text{ δηλαδή } f(-1)f(0) < 0 \text{ και επειδή η } f$$

είναι συνεχής υπάρχει $\rho \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow e^\rho = -\rho$. Το ρ είναι προφανώς η προηγούμενη ρίζα, μιας που η f έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

$$\delta) \frac{\ln \frac{\alpha+1}{\beta+1}}{\beta-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) - \ln(\beta+1) < \beta - \alpha \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) + \alpha - 1 < \ln(\beta+1) +$$

$$\beta - 1 \Leftrightarrow g(\alpha) < g(\beta) \text{ που ισχύει αφού η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα και } -1 < \alpha < \beta.$$

ε) Έστω $\varphi(x) = e^{5x} + x^2 + x^3 - 1, x \in [\rho, 1]$. Είναι

$$\varphi(\rho) = e^{5\rho} + \rho^2 + \rho^3 - 1 = (e^\rho)^5 + \rho^2 + \rho^3 - 1 = (-\rho)^5 + \rho^2 + \rho^3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\varphi(\rho) = -\rho^5 + \rho^2 + \rho^3 - 1 = \rho^2(1 - \rho^3) - (1 - \rho^3) = (\rho^2 - 1)(1 - \rho^3) < 0.$$

Επειδή $-1 < \rho < 0$, είναι $0 < \rho^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < \rho^2 - 1 < 0$ και $1 - \rho^3 > 0$, άρα

$\varphi(\rho) < 0$ και $\varphi(1) = e^5 + 1 > 0$, δηλαδή $\varphi(\rho)\varphi(1) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, λόγω του θ. Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\rho, 1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0$.

16. α) Για $x \neq 0$ είναι $\ln \frac{f(x)}{x} = x - \alpha \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = e^{x-\alpha} \Leftrightarrow f(x) = xe^{x-\alpha}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

Άρα $f(x) = \begin{cases} xe^{x-\alpha}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, οπότε $f(x) = xe^{x-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{x-\alpha} + xe^{x-\alpha} = e^{x-\alpha}(x+1)$.

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην

ευθεία $y = ex + 1$, ισχύει ότι $f'(0) = e \Leftrightarrow e^{-\alpha} = e \Leftrightarrow -\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = -1$.

γ) Είναι $f'(x) = e^{x+1}(x+1)$. Για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > -1$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(-1) = -1$.

δ) $\beta e^{\beta-\alpha} + \gamma e^{\gamma-\alpha} + (\delta-1)^2 \leq -2 \Leftrightarrow f(\beta) + f(\gamma) + (\delta-1)^2 \leq -2 \Leftrightarrow$

$$f(\beta) + 1 + f(\gamma) + 1 + (\delta-1)^2 \leq 0 \quad (1).$$

Επειδή η f έχει ελάχιστο το $f(-1) = -1$, είναι $f(x) \geq -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για

$$x = -1. \text{ Επομένως } f(\alpha) \geq -1, f(\beta) \geq -1, (\delta-1)^2 \geq 0, \text{ οπότε}$$

$$f(\beta) + 1 + f(\gamma) + 1 + (\delta-1)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f(\beta) + 1 + f(\gamma) + 1 + (\delta-1)^2 = 0$ οπότε

$$f(\beta) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = -1 \Leftrightarrow \beta = -1, f(\gamma) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\gamma) = -1 \Leftrightarrow \gamma = -1 \text{ και}$$

$$(\delta-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \delta-1 = 0 \Leftrightarrow \delta = 1$$

ε) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x-1}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x-1}} = 0$ άρα η $y = 0$,

δηλαδή ο άξονας x' είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$$\sigma\tau) \quad xe^x = \ln e^{\frac{\lambda}{e}} \Leftrightarrow xe^x = \frac{\lambda}{e} \Leftrightarrow xe^x \cdot e = \lambda \Leftrightarrow xe^{x+1} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda \quad (3)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x+1} = +\infty$. Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-1, 0)$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (-1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (-1, +\infty)$.

- Αν $\lambda < -1$, τότε το λ δεν βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f , οπότε η (3) είναι αδύνατη.

- Αν $\lambda = -1$, τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$, $\lambda \notin f(\Delta_2)$, οπότε η (3) είναι αδύνατη στα Δ_1, Δ_2 .

Επειδή $f(-1) = -1 = \lambda$, η (3) έχει μοναδική λύση την $x = -1$ στη περίπτωση αυτή.

- Αν $-1 < \lambda < 0$, τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε η (3) έχει μία λύση σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2 . Άρα η (3) έχει δύο ακριβώς λύσεις αφού είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα αυτά.

- Αν $\lambda \geq 0$, τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$, $\lambda \in f(\Delta_2)$, οπότε η (3) έχει μία λύση στο Δ_2 αφού είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.

$$17. \alpha) \text{ i) Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{ax+\beta} + \gamma) \stackrel{u=ax+\beta}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, u \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} (e^u + \gamma) = 0 + \gamma = \gamma$$

οπότε $\gamma = 1$. ($\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + \beta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax = a \cdot (+\infty) = -\infty$ αφού $a < 0$.)

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{e^{ax} + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{ax+\beta} + 1}{e^{ax} + 2} \stackrel{u=e^{ax}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty, u \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{e^\beta \cdot u + 1}{u + 2} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^\beta + \frac{1}{u}}{1 + \frac{2}{u}} = e^\beta \quad \text{οπότε}$$

$$e^\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 0. \quad (\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax) = a \cdot (-\infty) = +\infty \text{ αφού } a < 0.)$$

$$\beta) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = a \cdot e^{a \cdot 0} = a \quad \text{οπότε } a = -1 \text{ και}$$

$$f(x) = e^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma) \quad \text{Έστω } h(x) = f(x) - g(x) = e^{-x} + 1 - \ln x + 1 = e^{-x} - \ln x + 2.$$

Η h είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $h'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x} < 0$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών το

$$h((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty}$$

$$(e^{-x} - \ln x + 2) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - \ln x + 2) = 1 + \infty + 2 = +\infty.$$

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h , άρα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$, μοναδικό αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1. Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη μεγαλύτερη του μηδενός.

δ) Για την f ισχύει το ΘΜΤ στο $[k-1, k+1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (k-1, k+1)$

$$\text{τέτοιος ώστε : } f'(\xi) = \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2} \Leftrightarrow -e^{-\xi} = \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2}.$$

$$\text{Όμως } k-1 < \xi < k+1 \Leftrightarrow -k-1 < -\xi < -k+1 \Leftrightarrow e^{-k-1} < e^{-\xi} < e^{-k+1} \Leftrightarrow$$

$$-e^{-k+1} < -e^{-\xi} < e^{-k-1} \Leftrightarrow -e^{-k+1} < \frac{f(k+1) - f(k-1)}{2} < -e^{-k-1} \Leftrightarrow$$

$$-2e^{-k+1} < f(k+1) - f(k-1) < -2e^{-k-1} \Leftrightarrow 2e^{-k-1} < f(k-1) - f(k+1) < 2e^{-k+1}.$$

$$18. \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x - 2}{|x| + \beta} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x - 2}{x + \beta} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha - \frac{2}{x}}{1 + \frac{\beta}{x}} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1. \text{ Είμαι } f(x) = \frac{x-2}{|x|+\beta} = \begin{cases} -\frac{x-2}{x-\beta}, & x < 0 \\ \frac{x-2}{x+\beta}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{\beta+2}{(x+\beta)^2}$

$$\text{Είμαι } f'(4) = 0,08 \Leftrightarrow \frac{\beta+2}{(4+\beta)^2} = \frac{8}{100} \Leftrightarrow 100\beta + 200 = 128 + 64\beta + 8\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$8\beta^2 - 36\beta - 72 = 0 \Leftrightarrow 2\beta^2 - 9\beta - 18 = 0, \Delta = 225, \beta_{1,2} = \frac{9 \pm 15}{4} = \begin{cases} 6 & \text{Δεκτή} \\ -\frac{3}{2} & \text{Απορ} \end{cases}$$

$$\text{άρα } \beta = 6. \text{ Επομένως } f(x) = \frac{x-2}{|x|+6} = \begin{cases} -\frac{x-2}{x-6}, & x < 0 \\ \frac{x-2}{x+6}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{8}{(x+6)^2} > 0$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{x-2}{x-6} \right) = -\frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x-2}{x+6} \right) = -\frac{1}{3}$ και

$f(0) = -\frac{1}{3}$ άρα η f είναι συνεχής στο 0. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

γ) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f''(x) = -\frac{8}{(x-6)^3} > 0$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = -\frac{16}{(x+6)^3} < 0$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x-2}{x-6} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{x} \right) = -1$

Άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = -1$ και από το α) ερώτημα έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$.

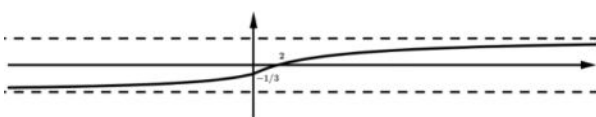
δ) Είναι $f(0) = -\frac{1}{3}$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα

$y'y$ στο σημείο $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

Για $x < 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x-2}{x-6} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

απορρίπτεται και για $x > 0$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+6} = 0 \Leftrightarrow x = 2$ άρα η C_f τέμνει

τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$.



ε) Η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Είναι $f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = \left(-1, -\frac{1}{3} \right)$ αφού f συνεχής και

γνησίως αύξουσα. Είναι $f([0, +\infty)) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left[-\frac{1}{3}, 1 \right)$ αφού η f

συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Για $x < 0$ και $-1 < y < -\frac{1}{3}$: $f(x) = y \Leftrightarrow -\frac{x-2}{x-6} = y \Leftrightarrow -x+2 = yx-6y \Leftrightarrow$

$$yx + x = 6y + 2 \Leftrightarrow x(y+1) = 6y + 2 \stackrel{y+1>0}{\Leftrightarrow} x = \frac{6y+2}{y+1}. \text{ Άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{6y+2}{y+1}, y \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Για } x \geq 0 \text{ και } -\frac{1}{3} \leq y < 1: f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+6} = y \Leftrightarrow x-2 = yx+6y \Leftrightarrow$$

$$yx - x = -6y - 2 \Leftrightarrow x(y-1) = -6y - 2 \stackrel{y-1<0}{\Leftrightarrow} x = -\frac{6y+2}{y-1}. \text{ Άρα}$$

$$f^{-1}(y) = -\frac{6y+2}{y-1}, y \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right). \text{ Επομένως } f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{6x+2}{x+1}, & x \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right) \\ -\frac{6x+2}{x-1}, & x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases}$$

19. α) Για κάθε $x \in [1, +\infty)$ έχουμε:

$$\ln x \leq f(x) + 2\sqrt{\ln x} - 1 \Leftrightarrow f(x) \geq \ln x - 2\sqrt{\ln x} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq (\sqrt{\ln x} - 1)^2 \quad (1)$$

$$f\left(e^{(\sqrt{\ln x+1}+1)^2}\right) - 1 \leq \ln x \quad (2). \text{ Θέτουμε } e^{(\sqrt{\ln x+1}+1)^2} = u \geq 1 \text{ γιατί είναι}$$

$$\sqrt{\ln x+1}+1 \geq 1 \Leftrightarrow (\sqrt{\ln x+1}+1)^2 \geq 1 \text{ και είναι } e^{(\sqrt{\ln x+1}+1)^2} = u \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{\ln x+1}+1)^2 = \ln u \Leftrightarrow |\sqrt{\ln x+1}+1| = \sqrt{\ln u} \stackrel{\sqrt{\ln x+1}+1 \geq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{\ln x+1}+1 = \sqrt{\ln u} \Leftrightarrow \sqrt{\ln x+1} = \sqrt{\ln u} - 1 \Leftrightarrow \ln x+1 = (\sqrt{\ln u} - 1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = (\sqrt{\ln u} - 1)^2 - 1. \text{ Η (2) γίνεται}$$

$$f(u) - 1 \leq (\sqrt{\ln u} - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow f(u) \leq (\sqrt{\ln u} - 1)^2, \text{ άρα } f(x) \leq (\sqrt{\ln x} - 1)^2 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (1) και (3) έχουμε: } f(x) = (\sqrt{\ln x} - 1)^2, x \geq 1$$

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{\sqrt{\ln x} - 1}{x\sqrt{\ln x}}. \text{ Είναι}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x} = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e. \text{ Είναι } x\sqrt{\ln x} > 0$$

$$\text{για κάθε } x > 1 \text{ και } \sqrt{\ln x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\ln x} > 1 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = f(1)$ άρα η f συνεχής στο 1 και επίσης η f συνεχής και στο

ε άρα $f \searrow [1, e]$ και $f \nearrow [e, +\infty)$. Η f παρουσιάζει στο $x = e$ ολικό ελάχιστο το $f(e) = 0$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 1$.

γ) $f(x) = (\sqrt{\ln x} - 1)^2$, $x \geq 1$. Έστω $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ τότε ορίζεται η σύνθεσή τους $g \circ h$ με πεδίο ορισμού και τύπο:

$$D_{g \circ h} = \{x \in D_h / h(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = (x - 1)^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{Έστω τώρα και η συνάρτηση}$$

$v(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ τότε ορίζεται $(g \circ h) \circ v$ με πεδίο ορισμού και τύπο:

$$D_{(g \circ h) \circ v} = \{x \in D_v / v(x) \in D_{g \circ h}\} = \{x \geq 0 / \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty) \quad \text{και}$$

$$((g \circ h) \circ v)(x) = (g \circ h)(v(x)) = (\sqrt{x} - 1)^2, \quad x \geq 0$$

Τέλος έστω και η συνάρτηση $k(x) = \ln x$, $x > 0$ τότε ορίζεται $((g \circ h) \circ v) \circ k$ με πεδίο ορισμού και τύπο:

$$D_{((g \circ h) \circ v) \circ k} = \{x \in D_k / k(x) \in D_{(g \circ h) \circ v}\} = \{x > 0 / \ln x \geq 0\} = \{x > 0 / x \geq 1\} = [1, +\infty)$$

$$(((g \circ h) \circ v) \circ k)(x) = ((g \circ h) \circ v)(k(x)) = (\sqrt{\ln x} - 1)^2, \quad x \geq 1$$

δ) Η $f \searrow [1, e]$ και συνεχής στο διάστημα αυτό άρα:

$f([1, e]) = [f(e), f(1)] = [0, 1]$. Η $f \nearrow [e, +\infty)$ και συνεχής στο διάστημα αυτό

άρα: $f((e, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow e^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$ Παρατηρούμε ότι

$f([1, e]) \cap f([e, +\infty)) \neq \emptyset$, άρα υπάρχουν $x_1 \in [1, e]$ και $x_2 \in (e, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Επίσης η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του Rolle στο διάστημα αυτό.

2ος τρόπος

$f(1) = f(e^4) = 1$. Η f συνεχής στο $[1, e^4]$, παραγωγίσιμη στο $(1, e^4)$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[1, e^4]$.

ε) Είναι $x'(t) = 1 \Leftrightarrow x'(t) = (t)' \Leftrightarrow x(t) = t + c$

Για $t = 1$ είναι $x(1) = 1 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$ άρα τελικά $x(t) = t$, $t \geq 1$.

Ισχύει ότι $y(t) = f(x(t)) = (\sqrt{\ln x(t)} - 1)^2 = (\sqrt{\ln t} - 1)^2$, $t \geq 1$ και προφανώς από το β) ερώτημα η τεταγμένη γίνεται ελάχιστη για $t = e \text{ sec}$.

20. α) Η f ορίζεται όταν $|x| + x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x > 0$. Τότε

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{|x| + x} = \frac{2x^2 - 2}{x + x} = \frac{2x^2 - 2}{2x} = \frac{2x^2}{2x} - \frac{2}{2x} = x - \frac{1}{x}.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$

γ) i. Είναι $f(g(x)) = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow f(g(x)) = e^x - \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow f(g(x)) = f(e^x) \Leftrightarrow$

$$g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

ii. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = e^x + e^{-x} > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow \varphi 1-1$,

οπότε η φ είναι αντιστρέψιμη. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - e^{-x}) = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - e^{-x}) = +\infty - 0 = +\infty.$$

Επειδή η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

iii. Επειδή το πεδίο ορισμού της φ^{-1} είναι το σύνολο τιμών της φ , είναι

$$A_{\varphi^{-1}} = \mathbb{R}. \varphi(x) = y \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = y \Leftrightarrow (e^x)^2 - 1 = ye^x \Leftrightarrow$$

$$(e^x)^2 - ye^x - 1 = 0 \quad (1). \text{Θέτουμε } e^x = \omega > 0 \text{ και η (1) γίνεται } \omega^2 - y\omega - 1 = 0. \text{ Η}$$

εξίσωση αυτή είναι 2^{ου} βαθμού ως προς ω με $\Delta = y^2 + 4 > 0$ και ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}.$$

$$\text{Είναι } \omega > 0 \Leftrightarrow \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} > 0 \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 + 4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4} > -y \quad (2)$$

Αν $y \geq 0$ τότε η (2) είναι αληθής.

$$\text{Αν } y < 0 \text{ τότε η (2) γίνεται } \left(\sqrt{y^2 + 4}\right)^2 > (-y)^2 \Leftrightarrow y^2 + 4 > y^2 \text{ ισχύει.}$$

$$\text{Είναι } \omega > 0 \Leftrightarrow \frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2} > 0 \Leftrightarrow y - \sqrt{y^2 + 4} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 4} < y \quad (3)$$

Αν $y \leq 0$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

$$\text{Αν } y > 0 \text{ τότε η (3) γίνεται } \left(\sqrt{y^2 + 4}\right)^2 < y^2 \Leftrightarrow y^2 + 4 < y^2 \text{ αδύνατη.}$$

$$\text{Άρα } \omega = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}.$$

$$\text{Οπότε } \varphi^{-1}(y) = \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}, y \in \mathbb{R}, \text{ άρα } \varphi^{-1}(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

iv. $e^x - e^{-x} > x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(g(x)) > f(x) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} g(x) > x \Leftrightarrow e^x > x$ που ισχύει γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x + 1 > x$.

21. α) Έστω $\frac{f(x) - \eta\mu x - 1}{x} = \varphi(x)$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lambda$.

Είναι $f(x) - \eta\mu x - 1 = x\varphi(x) \Leftrightarrow f(x) = x\varphi(x) + \eta\mu x + 1$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$, ισχύει ότι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x\varphi(x) + \eta\mu x + 1) = 1$

β) Επειδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\varphi(x) + \eta\mu x + \lambda' - \lambda'}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lambda + 1$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \lambda + 1$.

δ) Γνωρίζουμε ότι αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$, τότε $f'(x_1) = \varepsilon\varphi\omega$. Άρα στο σημείο A είναι

$$f'(0) = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \lambda + 1 \geq 1 \text{ γιατί } \lambda \geq 0, \text{ οπότε } \varepsilon\varphi\omega \geq \varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow \omega \geq 45^\circ.$$

ε) $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \Leftrightarrow xf(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$. Έστω $h(x) = xf(x) - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $h(0) = -1 < 0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, δηλαδή $h(0)h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

22. α) Είναι $A_{g \circ h} = \{x \in A_h / h(x) \in A_g\} = \{x \geq 0 / \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$ και

$$(g \circ h)(x) = 3\sqrt[3]{x} - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = 3\sqrt[3]{x} - x$$

β) Για κάθε $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1$

Στο $x = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt[3]{x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \frac{\sqrt[3]{x}}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2} - 1 \right) = +\infty$, οπότε

η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{9}, +\infty\right)$ είναι

$f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{9}\right]$ και

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\sqrt{3}}{9}, +\infty\right)$. Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

δ) Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3\sqrt[3]{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{3}{(\sqrt[3]{x})^2} - 1 \right) \right] = +\infty \text{ οπότε η } f \text{ δεν έχει}$$

οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{(\sqrt[3]{x})^2} - 1 \right) = -1 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3\sqrt[3]{x} - x + x) = +\infty$, οπότε η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{g(x)} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x - x^3} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(\frac{3}{x} - x \right)} - x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{\frac{3}{x} - x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(\sqrt{\frac{3}{x} - x} + 1 \right) \right) = +\infty (+\infty) = +\infty,$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} - x \right) = +\infty, \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{3}{x} - x} = +\infty.$$

Συνδυαστικά θέματα Γ μέχρι και τις παραγώγους

Επίπεδο Γ1

23.α) Είναι $f(0) = -\sin 0 = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \eta\mu \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0$,

δηλαδή $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα

Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Έστω

$0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$ τότε: $0 < \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$ και $x_1 \eta\mu x_1 < x_2 \eta\mu x_2$ (1). Ακόμη

$\sin x_1 > \sin x_2 \Leftrightarrow -\sin x_1 < -\sin x_2$ (2).

Από (1)+(2) $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f$ 1-1 οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

β) Είναι $g'(x) = 2x + 2\eta\mu x = 2(\eta\mu x + x)$. Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα: Αν $x < 0$ είναι

$|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Rightarrow \eta\mu x + x < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$. Αν $x > 0$ είναι

$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Rightarrow \eta\mu x + x > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(1 - 2 \frac{\sin x}{x^2} \right) \right] = +\infty$ γιατί για κάθε $x \neq 0$ είναι

$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| = \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

οπότε από το Κ.Π. είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Επίσης $g(0) = -2$. Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$g(\Delta_1) = \left[g(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = [-2, +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό

του $g(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε

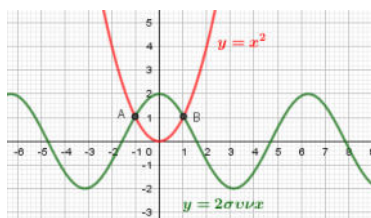
$g(x_1) = 0$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$ άρα έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $g(\Delta_2) = \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = [-2, +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται

στο εσωτερικό του $g(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $g(x_2) = 0$. Τελικά η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.
 $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2\sigma\upsilon\nu x$

Επειδή η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2$ και $y = 2\sigma\upsilon\nu x$ έχουν δύο σημεία τομής.



$$h(x) = g(x) - f(x) =$$

$$\gamma) \text{ Έστω } x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } h'(x) = 2x - x\sigma\upsilon\nu x = x(2 - \sigma\upsilon\nu x)$$

.Επειδή $2 - \sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

έχουμε: Για κάθε $x < 0$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow [0, +\infty). \text{ Είναι } h(0) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) \right] = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) \right] = +\infty \text{ αφού } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής}$$

είναι και $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$. Όμοια $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$. Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ είναι

$$h(\Delta_1) = (-1, +\infty) \text{ και στο } \Delta_2 = (0, +\infty) \text{ είναι } h(\Delta_2) = (-1, +\infty). \text{ Επειδή}$$

$0 \in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικός $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιος, ώστε $h(x_1) = 0$. Επειδή

$0 \in h(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικός $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιος, ώστε $h(x_2) = 0$.

δ) Από το β σκέλος έχουμε ότι: Για $x < 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = -2$ και για

$$x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0) = -2, \text{ άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g(x) \geq -2 \Leftrightarrow g(x) + 2 \geq 0,$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x) + 2} \stackrel{g(x)+2}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x) + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x) + 2} \right) = -1(+\infty) = -\infty$$

24.α) Αν υπήρχε $\rho \in (0, 2)$ με $f(\rho) = 0$ τότε $[f'(\rho)]^2 + f(\rho)f''(\rho) = -1 \Leftrightarrow$

$[f'(p)]^2 = -1$ άτοπο, άρα $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$. Επειδή $f(1) = \sqrt{3} > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

$$\beta) [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = -1 \Leftrightarrow [f'(x)f(x)]' = (-x)' \Leftrightarrow f'(x)f(x) = -x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=1 \text{ είναι } f'(1)f(1) = -1 + c \Leftrightarrow c=0, \text{ άρα } f'(x)f(x) = -x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = -2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (-x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = -x^2 + c'.$$

Για $x=1$ είναι $f^2(1) = -1 + c' \Leftrightarrow c' = 4$, άρα $f^2(x) = 4 - x^2$. Επειδή $f(x) > 0$ είναι $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in (0,2)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, τελικά είναι $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0,2]$.

γ) Είναι $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = y$ με $y \geq 0$ (1), τότε $4-x^2 = y^2 \Leftrightarrow 4-y^2 = x^2$
(2) Πρέπει $4-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 4 \Leftrightarrow |y| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$ και λόγω της (1) είναι $0 \leq y \leq 2$. Η (2) γίνεται: $x = \sqrt{4-y^2}$. Είναι $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{4-y^2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 4-y^2 \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq -y^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y^2 \leq 4 \Leftrightarrow |y| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 2$ το οποίο ισχύει αφού $0 \leq y \leq 2$ άρα $f^{-1}(y) = \sqrt{4-y^2}$, $y \in [0,2]$, άρα $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0,2]$.

ε) Είναι $4-y^2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ με $x \in [0,2]$, $y \in [0,2]$.

Η γραφική παράσταση της f είναι το τεταρτοκύκλιο του διπλανού σχήματος και το AB είναι χορδή του. Η μέγιστη χορδή είναι αυτή του σχήματος και έχει μήκος

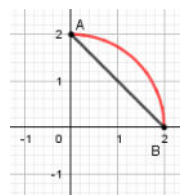
$$(AB) = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \text{ άρα } (AB) \leq 2\sqrt{2}$$

στ) Έστω $M(x(t), y(t))$ όπου t ο χρόνος σε sec με $t \geq 0$.

Είναι $y(t) = \sqrt{4-x^2(t)}$ και $x'(t) = 0,1$ μ.μ./sec.

ι. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το A , τότε:

$$x(t_0) = \sqrt{3}, y(t_0) = 1.$$



Είναι $y'(t) = \left(\sqrt{4-x^2(t)} \right)' = \frac{-2x(t)x'(t)}{2\sqrt{4-x^2(t)}}$ και την χρονική στιγμή t_0 :

$$y'(t_0) = -\frac{x(t_0)x'(t_0)}{\sqrt{4-x^2(t_0)}} = -\frac{0,1 \cdot \sqrt{3}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{10} \text{ μ.μ. / sec}$$

ii. $E(t) = (OK)(OL) = x(t)y(t)$

Είναι $E'(t) = x'(t)y(t) + x(t)y'(t)$ και την χρονική στιγμή t_0 :

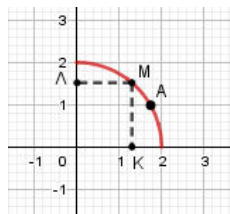
$$E'(t_0) = x'(t_0)y(t_0) + x(t_0)y'(t_0) = -0,2 \text{ μ.μ. / sec}$$

ζ) Έστω $K(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f , Η εφαπτομένη

της C_f στο K είναι η ευθεία ε:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - \sqrt{4-x_0^2} = -\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x - x_0) .$$



Για $y=0$ είναι $x = \frac{4}{x_0}$ και για $x=0$ είναι $y = \frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}$, δηλαδή η ε τέμνει

τους άξονες στα σημεία $B\left(\frac{4}{x_0}, 0\right)$ και $\Gamma\left(0, \frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}}\right)$.

$$(OB\Gamma) = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}(OB)(O\Gamma) = \alpha \Leftrightarrow \frac{4}{x_0} \cdot \frac{4}{\sqrt{4-x_0^2}} = 2\alpha \Leftrightarrow 8 = \alpha x_0 \sqrt{4-x_0^2} \Leftrightarrow$$

$$64 = \alpha^2 x_0^2 (4 - x_0^2) (3) . \text{ Θέτουμε } x_0^2 = \omega \geq 0 \text{ και η (3) γίνεται:}$$

$$64 = \alpha^2 \omega (4 - \omega) \Leftrightarrow 64 = 4\alpha^2 \omega - \alpha^2 \omega^2 \Leftrightarrow \alpha^2 \omega^2 - 4\alpha^2 \omega + 64 = 0 (4)$$

Η (4) είναι 2ου βαθμού ως προς ω με $\Delta = 16\alpha^4 - 256\alpha^2 = 16\alpha^2(\alpha^2 - 16)$.

Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\alpha^2(\alpha^2 - 16) > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 16 \Leftrightarrow \alpha > 4$ η (4) έχει

ρίζες τις $\omega = \frac{4\alpha^2 \pm 4\alpha\sqrt{\alpha^2 - 16}}{2\alpha^2} = 2 \pm \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}$. Επειδή $x_0 \in [0, 2]$, είναι

$$0 \leq x_0^2 \leq 4 , \text{ άρα } 0 \leq \omega \leq 4 .$$

Αν $\omega = 2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}$, τότε $2 + \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 - 16} \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 16 \leq \alpha^2$

που ισχύει. Αν $\omega = 2 - \frac{2}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 16}$, τότε

$$2 - \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16} \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt{\alpha^2 - 16} \Leftrightarrow \alpha^2 \geq \alpha^2 - 16 \text{ ισχύει.}$$

$$\text{Τότε } x_0^2 = 2 + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16} \quad x_0 \in [0,2] \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2 + \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16}} \quad \eta$$

$$x_0^2 = 2 - \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16} \quad x_0 \in [0,2] \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2 - \frac{2}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 16}}. \text{ Οπότε η } C_f \text{ δέχεται δύο}$$

εφαπτόμενες που σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν α . Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4$, τότε η (4) γίνεται

$$16\omega^2 - 64\omega + 64 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 4\omega + 4 = 0 \Leftrightarrow (\omega - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2.$$

Τότε $x_0^2 = 2 \quad x_0 \in [0,2] \Leftrightarrow x_0 = \sqrt{2}$ και η C_f δέχεται μοναδική εφαπτομένη στη περίπτωση αυτή. Τέλος αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 4$ η (4) είναι αδύνατη και δεν υπάρχουν τέτοιες εφαπτόμενες.

25.α) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[1,10]$, έχει ελάχιστη τιμή $m=1$ και μέγιστη τιμή $M=10$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=10$. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στις θέσεις x_1, x_2 που βρίσκονται στο εσωτερικό του $[0,1]$ και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι: $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

β) Έστω $x_1 < x_2$. Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , και $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (x_1, x_2) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = 0$.

γ) $f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f''(x) + e^x f'(x) = 0$ ή $[e^x f'(x)]' = 0$. Έστω $g(x) = e^x f'(x)$, $x \in [x_1, x_2]$. Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Επειδή $g(x_1) = e^{x_1} f'(x_1) = 0$ και $g(x_2) = e^{x_2} f'(x_2) = 0$, λόγω του θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, x_2) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow e^{\xi_2} f''(\xi_2) + e^{\xi_2} f'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi_2) + f'(\xi_2) = 0$.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 15x - 6 \Leftrightarrow f(x) - 15x + 6 = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,1)$. Έστω $h(x) = f(x) - 15x + 6$, $x \in [0,1]$. Είναι $h(0) = f(0) - 15 \cdot 0 + 6 = 2 + 6 = 8 > 0$ και $h(1) = f(1) - 15 \cdot 1 + 6 = 7 - 15 + 6 = -2 < 0$, δηλαδή $h(0)h(1) < 0$ και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα λόγω του θεωρήματος Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$

τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - 15x_0 + 6 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 15x_0 - 6$.

26.α) Επειδή η f είναι κυρτή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[α, α+1]$. Για

κάθε $α < x < α+1 \Leftrightarrow f'(α) < f'(x) < f'(α+1)$ άρα $\frac{1}{2} < f'(x)$, δηλαδή $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[α, α+1]$. Το σύνολο τιμών της f είναι: $f([α, α+1]) = [f(α), f(α+1)] = [α+1, α+2]$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = α$ είναι η ευθεία $ε: y - f(α) = f'(α)(x - α) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x - α) + α + 1 \Leftrightarrow 2y = x + α + 2 \Leftrightarrow x - 2y + α + 2 = 0$

γ) Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα $[α, α+1]$, άρα βρίσκεται πάνω και από την $ε$, δηλαδή

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}α + 1 \text{ για κάθε } x \in [α, α+1].$$

δ) Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f , υπάρχει $\xi_1 \in (α, α+1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(α+1) - f(α)}{α+1 - α} = α+2 - α - 1 = 1$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[α, \xi_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, \xi_1)$, λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (α, \xi_1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f''(\xi) = \frac{f'(\xi_1) - f'(α)}{\xi_1 - α} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\xi_1 - α} = \frac{1}{2(\xi_1 - α)}.$$

$$\text{Είναι } α < \xi_1 < α+1 \Leftrightarrow 0 < \xi_1 - α < 1 \Leftrightarrow 0 < 2(\xi_1 - α) < 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2(\xi_1 - α)} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow f''(\xi) > \frac{1}{2}$$

ε) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = -3x + 4α + 2 \Leftrightarrow f(x) + 3x - 4α - 2 = 0$, να έχει

ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(α, α+1)$. Έστω $g(x) = f(x) + 3x - 4α - 2$,

$x \in [α, α+1]$. Είναι $g'(x) = f'(x) + 3 > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο

$[α, α+1]$. Είναι $g(α) = f(α) + 3α - 4α - 2 = α + 1 - α - 2 = -1 < 0$ και

$g(α+1) = f(α+1) + 3(α+1) - 4α - 2 = α + 2 + 3α + 3 - 4α - 2 = 3 > 0$, δηλαδή

$g(α)g(α+1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[α, α+1]$ ως άθροισμα

συνεχών συναρτήσεων, λόγω του θεωρήματος Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x) = -3x + 4α + 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(α, α+1)$. Επειδή η g είναι

γνησίως αύξουσα στο $[α, α+1]$, η ρίζα της g είναι μοναδική.

27.α) Για $x=0$ είναι: $f^3(0)+f(0)=4 \cdot 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0)+1)=0 \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f^2(0)=-1$ που είναι αδύνατο.

$$\beta) f^3(x)+f(x)=4x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1)=4x \Leftrightarrow f(x)=\frac{4x}{f^2(x)+1} \quad (2).$$

$$\text{Είναι } f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{f^2(x)+1} > 0 \Leftrightarrow 4x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{f^2(x)+1} < 0 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

$$\gamma) \text{ Επειδή η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}, \text{ έχουμε: } (f^3(x)+f(x))' = (4x)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x)+f'(x)=4 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x)+1)=4 \quad (3).$$

Επειδή $3f^2(x)+1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αν $\alpha = \beta$, τότε $f(\alpha)-f(\alpha) \leq 4(\alpha-\alpha)$ και ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) ,

$$\text{λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}. \text{ Όμως}$$

$$\text{από τη σχέση (3) είναι } f'(x) = \frac{4}{3f^2(x)+1} \leq 4, \text{ αφού } 3f^2(x)+1 \geq 1, \text{ άρα και}$$

$$f'(\xi) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq 4 \Leftrightarrow f(\beta)-f(\alpha) \leq 4(\beta-\alpha).$$

$$\epsilon) \text{ Πρέπει } f'(x)=1, \text{ τότε (3) } \Rightarrow 3f^2(x)+1=4 \Leftrightarrow f^2(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=\pm 1$$

$$\text{Αν } f(x)=1, \text{ τότε από την αρχική σχέση έχουμε: } 1^3+1=4x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ και η}$$

$$\text{εφαπτομένη είναι η } \epsilon_1: y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y-1=x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=x+\frac{1}{2}$$

$$\text{Αν } f(x)=-1, \text{ τότε από την αρχική σχέση έχουμε: } (-1)^3-1=4x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

και η εφαπτομένη είναι η

$$\epsilon_2: y-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y+1=x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow y=x-\frac{1}{2}$$

στ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$. Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f^3(x) + f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x) \Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha = -\infty \text{ αδύνατο, άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Όμοια και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ τότε $f(\mathbb{R}) = \left(+\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)$ που είναι αδύνατο.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ τότε $f(\mathbb{R}) = (-\infty, -\infty)$ που είναι αδύνατο, άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

ζ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Rightarrow y^3 + y = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(y^3 + y), \text{ άρα } f^{-1}(y) = \frac{1}{4}(y^3 + y)$$

$$\eta) f^{-1}(1) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ και}$$

$$f^{-1}(4) = \frac{1}{4}(64+4) = \frac{68}{4} = 17 \Leftrightarrow f(17) = 4$$

28.α) Αφού $f'(x) = \frac{e}{e+e^{f(x)}} > 0$ (1) τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση $\frac{e}{e+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη οπότε η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = -\frac{e^{f(x)+1}f'(x)}{(e+e^{f(x)})^2} < 0$

οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(1) = \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \frac{e}{e+e^{f(1)}} = \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow e+e^{f(1)} = e+1 \Leftrightarrow e^{f(1)} = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

οπότε το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και αφού η f ↗ τότε το 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$\delta) (1) \Leftrightarrow (e+e^{f(x)})f'(x) = e \Leftrightarrow ef'(x) + e^{f(x)}f'(x) = e \Leftrightarrow (ef(x) + e^{f(x)})' = (ex)'$$

άρα $ef(x) + e^{f(x)} = ex + c$. Για $x = 1$ έχουμε $e \cdot 0 + e^0 = e + c \Leftrightarrow c = 1 - e$. Άρα $ef(x) + e^{f(x)} = ex + 1 - e$ (2).

$$\epsilon) (2) \Leftrightarrow ex = ef(x) + e^{f(x)} + e - 1 \Leftrightarrow x = f(x) + \frac{e^{f(x)}}{e} + \frac{e-1}{e} \quad (3). \text{ Αφού η } f$$

είναι ↗ θα είναι και 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Θέτω όπου $f(x) = y$ και

$$x = f^{-1}(y) \text{ οπότε } f^{-1}(y) = y + \frac{e^y}{e} + \frac{e-1}{e} \text{ άρα } f^{-1}(x) = x + e^{x-1} + \frac{e-1}{e}.$$

$$\mathbf{29.α)} \quad x(x+2)f'(x) + (x+2)f(x) = 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x+2} \Rightarrow$$

$$(xf(x))' = (\ln(x+2))' \Leftrightarrow xf(x) = \ln(x+2) + c, f(e-2) = \frac{1}{e-2} \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα}$$

$$f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}, x > 0.$$

β) Είναι $f'(x) = \frac{x - (x+2)\ln(x+2)}{x^2(x+2)}$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f'

εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $x - (x+2)\ln(x+2)$. Έστω

$$g(x) = x - (x+2)\ln(x+2), x > 0. \text{ Είναι } g'(x) = -\ln(x+2) < 0 \Rightarrow g \searrow (0, +\infty)$$

$$x > 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) = -2\ln 2 < 0 \text{ άρα } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, +\infty)$$

$$\gamma) (x+2) < (x+3) \xrightarrow{f \searrow} f(x+2) > f(x+3) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+4)}{x+2} > \frac{\ln(x+5)}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$(x+3)\ln(x+4) > (x+2)\ln(x+5) \Leftrightarrow \ln(x+4)^{x+3} > \ln(x+5)^{x+2} \Leftrightarrow$$

$$(x+4)^{x+3} > (x+5)^{x+2}$$

δ) Είναι $f(e^x) \leq \frac{x+\alpha}{e^x} \Rightarrow \frac{\ln(e^x+2)}{e^x} \leq \frac{x+\alpha}{e^x} \Leftrightarrow \ln(e^x+2) - x \leq \alpha.$

Έστω $h(x) = \ln(e^x+2) - x, x \geq 0. h'(x) = \frac{e^x}{e^x+2} - 1 = \frac{e^x - e^x - 2}{e^x+2} < 0$ άρα

$$h \searrow \text{ στο } [0, +\infty). \text{ Για κάθε } x \geq 0 \Rightarrow h(x) \leq h(0) = \ln 3. \text{ Άρα } \alpha_{\min} = \ln 3$$

30.α) Έστω $g(x) = x^2 f(x) - 1, x \in (0, +\infty)$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = x(2f(x) + xf'(x)) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$. Για

$$\text{κάθε } x > 1 \xrightarrow{g \searrow} g(x) < g(1) \Leftrightarrow x^2 f(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{x^2} \text{ και για κάθε}$$

$$0 < x < 1 \xrightarrow{g \searrow} g(x) > g(1) \Leftrightarrow x^2 f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{x^2}.$$

β) Από το θεώρημα μέσης τιμής για την f , υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{\alpha}, \alpha\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} = \frac{f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - 1} \left(f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right) \quad (1)$$

Επειδή $\alpha > 1$ είναι $f(\alpha) < \frac{1}{\alpha^2}$ και επειδή $\frac{1}{\alpha} < 1$, είναι

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) > \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2} = \alpha^2 \Leftrightarrow -f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < -\alpha^2, \text{ άρα } f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < \frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2 = \frac{1-\alpha^4}{\alpha^2}.$$

Επειδή για $\alpha > 1$ είναι $\frac{\alpha}{\alpha^2-1} > 0$, έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-1} \left(f(\alpha) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right) < \frac{\cancel{\alpha}}{\alpha^2-1} \cdot \frac{1-\alpha^4}{\alpha^2} \Leftrightarrow f'(\xi) < \frac{(1-\cancel{\alpha^2})(1+\alpha^2)}{-(1-\cancel{\alpha^2})\alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) < -\frac{1+\alpha^2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) < -1-\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha f'(\xi) + \alpha^2 + 1 < 0$$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Επειδή $f(1) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

δ) Επειδή $f(x) > \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, άρα και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, οπότε η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη

ασύμπτωτη της C_f . Επειδή $0 < f(x) < \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, άρα η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

$$\mathbf{31.α)} \text{ Είναι } f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)} \right)' = \left(e^x \right)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^x + c \text{ και για } x = 0 \text{ είναι } e^{\ln 2} = e^0 + c \Leftrightarrow c = 1, \text{ οπότε}$$

$$e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{\beta)} f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ και } f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ οπότε η } f \text{ είναι}$$

κυρτή στο $\mathbb{R}$.

$$\mathbf{\gamma)} f'(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2} \text{ άρα η εξίσωση εφαπτομένης είναι}$$

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \ln 2.$$

Αφού η f είναι κυρτή σε κάθε σημείο η εφαπτομένη θα είναι κάτω από C_f άρα

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) \geq \frac{1}{2}x + \ln 2.$$

δ) Είναι $g(x) = 3x - e^{f(x)+x} = 3x - e^{\ln(e^x+1)+x} = 3x - (e^x + 1)e^x = 3x - e^{2x} - e^x$
 οπότε $g'(x) = 3 - 2e^{2x} - e^x$, $g''(x) = -4e^{2x} - e^x < 0$ οπότε η g' $\searrow$. Για $x < 0$
 είναι $g'(x) > g'(0) \Rightarrow g'(x) > 0$ ενώ για $x > 0$ είναι $g'(x) < g'(0) \Rightarrow g'(x) < 0$.
 Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq -2$. Άρα η g έχει μέγιστο
 στο σημείο $A(0, -2)$.

στ) Είναι $g(x) \leq -2 < 0$ και αφού $1 + e^x > 1$ τότε $\ln(1 + e^x) > \ln 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$
 άρα $f(x) > g(x)$.

32. Ισχύει $\ln f(x) + f(x) = x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Έστω $h(x) = \ln x + x$, $x > 0$ είναι $h'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ οπότε η h είναι $\nearrow$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε από (1) θα είναι

$\ln f(x_1) + f(x_1) < \ln f(x_2) + f(x_2)$. Δηλαδή $h(f(x_1)) < h(f(x_2))$ και αφού η
 h είναι $\nearrow$ τότε θα έχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $f(x) = x$, τότε (1) $\Rightarrow \ln x + x = x \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

γ) i. Παραγωγίζουμε στη σχέση (1) και έχουμε:

$$f'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x) \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{f(x)}{f(x) + 1} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \quad (2).$$

ii. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε από (2) και η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2} > 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή.}$$

δ) Για $x = 1$: $\ln f(1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow h(f(1)) = h(1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 1$ και

$$f'(1) = \frac{f(1)}{f(1) + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή, ισχύει ότι}$$

$f(x) \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

33.α) $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow |_{\mathbb{R}}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{0+1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{e^x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{u+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{u} = 1$, άρα $f(|_{\mathbb{R}}) = (0,1)$

β) $f \nearrow |_{\mathbb{R}} \Rightarrow 1-1 \Rightarrow f$ αντιστρέφεται. Είναι $D_{f^{-1}} = f(|_{\mathbb{R}}) = (0,1)$.

$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow e^x = e^x y + y \Leftrightarrow e^x(1-y) = y \Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow$

$x = \ln \frac{y}{1-y}$, άρα $f^{-1}(y) = \ln \frac{y}{1-y}$, $y \in (0,1)$.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f''(x) = \frac{e^x(e^x + 1)^2 - e^x 2(e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} \geq 0 \Rightarrow 1 - e^x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής

το $(0, f(0)) \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right)$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ την διαπερνά.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι: $f(4^x) - f'(4^x) < f(5^x) - f'(5^x)$. Θεωρούμε την

$g(x) = f(x) - f'(x)$, $x > 0$.

Είναι $g'(x) = f'(x) - f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} = \frac{2e^{2x}}{(1 + e^x)^3} > 0$ οπότε η

$g \nearrow$ στο $(0, +\infty)$. Για $x > 0$ είναι $4 < 5$ και $4^x < 5^x$ άρα

$g(4^x) < g(5^x) \Leftrightarrow f(4^x) - f'(4^x) < f(5^x) - f'(5^x)$.

ε) Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ έχει μοναδική λύση στο

$(0,1)$. Είναι $h(0) = f(0) = \frac{1}{2} > 0$, $h(1) = f(1) - 1 = \frac{e}{e+1} - 1 = -\frac{1}{e+1} < 0$ οπότε

αφού h συνεχής στο $[0,1]$ και $h(0) \cdot h(1) < 0$ από Θ. Bolzano υπάρχει

$x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$. Επίσης

$h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} - 1 = -\frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2} < 0$ οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

34.α) Είναι $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 2xe^{\frac{1}{x^2}} - x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} = 2e^{\frac{1}{x^2}} \left(x - \frac{1}{x} \right) = 2e^{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2 - 1}{x} \quad \text{οπότε για το πρόσημο}$$

της f' και την μονοτονία της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		+	0	-	+
x		-	-	+	+
f'		-	+	-	+
f		↘	↗	↘	↗

Η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x = 1$ και $x = -1$ το $f(-1) = f(1) = e$.

$$\beta) \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 \beta^2} < 2 \ln \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{\alpha^2 \beta^2} - \frac{\alpha^2}{\alpha^2 \beta^2} < 2 \ln \beta - 2 \ln \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} + \ln \alpha^2 < \frac{1}{\beta^2} + \ln \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln e^{\frac{1}{\alpha^2}} + \ln \alpha^2 < \ln e^{\frac{1}{\beta^2}} + \ln \beta^2 \Leftrightarrow \ln \left(\alpha^2 e^{\frac{1}{\alpha^2}} \right) < \ln \left(\beta^2 e^{\frac{1}{\beta^2}} \right) \Leftrightarrow \alpha^2 e^{\frac{1}{\alpha^2}} < \beta^2 e^{\frac{1}{\beta^2}} \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ ισχύει}$$

$$\gamma) f''(x) = 2e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} \right) \frac{x^2 - 1}{x} + 2e^{\frac{1}{x^2}} \frac{2x^2 - (x^2 - 1)}{x^2} = 2e^{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2 + 1}{x^2} - 4e^{\frac{1}{x^2}} \frac{x^2 - 1}{x^4} =$$

$$= 2e^{\frac{1}{x^2}} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} - \frac{2(x^2 - 1)}{x^4} \right) = 2e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^4} > 0 \text{ αφού } x^4 - x^2 + 2 > 0 \text{ για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}$ (τριώνυμο ως προς x^2 με $x < 0$). Οπότε η f είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

$$\delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} \right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{2}{x^3} \right)}{-\frac{2}{x^3}} = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 e^{\frac{1}{x^2}} \right) = +\infty. \text{ Από τον πίνακα μονοτονίας και τα}$$

προηγούμενα όρια διαπιστώνουμε ότι το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = [e, +\infty)$.

ε) Η εξίσωση $e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{\lambda}{x^2}$ γίνεται $x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$

- Αν $\lambda < e$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = e$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 1$
- Αν $\lambda > e$ η εξίσωση έχει τέσσερις λύσεις μία σε κάθε διάστημα:
 $\rho_1 \in (-\infty, -1)$, $\rho_2 \in (-1, 0)$, $\rho_3 \in (0, 1)$ και $\rho_4 \in (1, +\infty)$.

35.α) Η συνάρτηση $f'(x) = \frac{4e^x + x^2}{e^x + x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{(4e^x + 2x)(e^x + x^2) - (e^x + 2x)(4e^x + x^2)}{(e^x + x^2)^2} =$$

$$= \frac{4e^{2x} + 4x^2 e^x + 2xe^x + 2x^3 - 4e^{2x} - x^2 e^x - 8xe^x - 2x^3}{(e^x + x^2)^2} =$$

$$\frac{3x^2 e^x - 6xe^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{3e^x x(x-2)}{(e^x + x^2)^2} \text{ οπότε για το}$$

πρόσημο της f'' και την κυρτότητα της f έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f''	+	0	-	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

Η f είναι κυρτή στα $(-\infty, 0]$, $[2, +\infty)$ και κοίλη στο $[0, 2]$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{3e^x}{e^x + x^2} > 0$ άρα η h είναι $\nearrow$

στο $\mathbb{R}$.

γ) Αφού $f'(x) > 0$ τότε η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ οπότε το σύνολο τιμών είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right). \text{ Για } x \in (-\infty, 0) \text{ είναι}$$

$$h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + f(0)) = -\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Επίσης για κάθε $x > 0$ θα είναι $h(x) > h(0) \Leftrightarrow f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x + f(0)$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = \mathbb{R}$.

δ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, x+1]$ οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x).$$

Για $x > 2$ η f είναι κυρτή άρα η $f' \nearrow$ οπότε

$$2 < x < \xi < x+1 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + x^2}{e^x + x^2} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + 2x}{e^x + 2x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + 2}{e^x + 2} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x} = 4.$$

Αν $x \rightarrow +\infty$ τότε $x+1 \rightarrow +\infty$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f'(x+1)] = 4$. Οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 4$.

36.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln 2x}{2x^2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$1 - \ln 2x \geq 0 \Rightarrow \ln 2x \leq \ln e \Leftrightarrow x \leq \frac{e}{2}. \text{ Η } f \nearrow \text{ στο } \left(0, \frac{e}{2}\right] \text{ και } \searrow \text{ στο } \left[\frac{e}{2}, +\infty\right),$$

παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{e}{2}$ το $f\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{e}$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2x} \ln 2x \right] = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2x}{2x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = 0.$$

$$f \nearrow \text{ στο } \left(0, \frac{e}{2}\right] \text{ με } f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right] \text{ και } f \searrow \text{ στο } \left[\frac{e}{2}, +\infty\right) \text{ με } f(A_2) = \left(0, \frac{1}{e}\right].$$

Οπότε το σύνολο τιμών $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$.

γ) Η εξίσωση $\sqrt{2x} = e^{\lambda x}$ γίνεται $2x = (e^{\lambda x})^2 \Leftrightarrow 2x = e^{2\lambda x}$ οπότε

$$\ln 2x = \ln e^{2\lambda x} \Leftrightarrow 2\lambda x = \ln 2x \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2x}{2x} \Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

Αν $\lambda \leq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση. Αν $0 < \lambda < \frac{1}{e}$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις

Αν $\lambda = \frac{1}{e}$ η εξίσωση έχει λύση την $x = \frac{e}{2}$. Αν $\lambda > \frac{1}{e}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - \frac{\ln 2x_0}{2x_0} = \frac{1 - \ln 2x_0}{2x_0^2}(x - x_0).$$

Αν αυτή διέρχεται από το σημείο $(0, -1008)$ τότε

$$-1008 - \frac{\ln 2x_0}{2x_0} = \frac{1 - \ln 2x_0}{2x_0^2}(-x_0) \Leftrightarrow -2016x_0 - \ln 2x_0 = -1 + \ln 2x_0 \Leftrightarrow$$

$$2 \ln 2x_0 + 2016x_0 - 1 = 0.$$

Έστω $g(x) = 2 \ln 2x + 2016x - 1$, $x > 0$ με $g'(x) = \frac{2}{x} + 2016 > 0$ άρα η g με

$$\text{σύνολο τιμών } g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty).$$

Επειδή $0 \in g((0, +\infty))$ υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$.

ε) Θεωρούμε την $h(t) = \ln^2 2t$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο

$$[x, x+1] \text{ με } h'(x) = 2 \ln 2x \cdot \frac{1}{2x} = \frac{\ln 2x}{x}, \text{ οπότε από ΘΜΤ υπάρχει}$$

$\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(x+1) - h(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow 4f(\xi) = \ln^2 2(x+1) - \ln^2 2x.$$

Αφού $x \rightarrow +\infty$ τότε $x > \frac{e}{2}$ όπου $f \searrow$ οπότε $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow$

$$4f(x) > 4f(\xi) > 4f(x+1) \text{ ή } 4f(x+1) < \ln^2(2x+1) - \ln^2 2x < 4f(x)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2x}{2x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) \stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 0$ άρα από

κριτήριο παρεμβολής και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln^2 2(x+1) - \ln^2 2x] = 0$.

$$\mathbf{37.a)} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right) + 3x^2 \ln x \right] = 0 + 0 = 0$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} x^2\right) = 0$$

β) i. Έστω $g(x) = x + \ln x + 1$, $x \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$. Η g συνεχής στο $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ ως

$$\text{άθροισμα συνεχών και } g\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} + \ln \frac{1}{e^2} + 1 = \frac{1}{e^2} - 2 + 1 = \frac{1}{e^2} - 1 < 0,$$

$g(1) = 2 > 0$. Άρα σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi + \ln \xi + 1 = 0.$$

Είναι $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, $x \in \left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ οπότε η g είναι $\nearrow$ στο $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.

ii. Είναι $f'(x) = 3x^2 + 6x \ln x + 3x^2 \frac{1}{x} - 3x = 3x^2 + 6x \ln x$,

$$f''(x) = 6x + 6 \ln x + 6x \frac{1}{x} = 6(x + \ln x + 1) = 6g(x). \text{ Είναι } f''(\xi) = 6g(\xi) = 0$$

και αφού $g \nearrow$, έχουμε: Για $x < \xi$ είναι $g(x) < g(\xi) \Leftrightarrow f''(x) < 0$. Για $x > \xi$ είναι $g(x) > g(\xi) \Leftrightarrow f''(x) > 0$, οπότε η f'' αλλάζει πρόσημο στο $x = \xi$ άρα το ξ είναι θέση σημείου καμπής.

iii. Είναι $f'(x) = 3x^2 + 6x \ln x$ με $f'(\xi) = 3\xi^2 + 6\xi \ln \xi$. Όμως

$$\xi + \ln \xi + 1 = 0 \Rightarrow \ln \xi = -1 - \xi \text{ άρα } f'(\xi) = 3\xi^2 + 6\xi(-1 - \xi) = -3\xi^2 - 6\xi < 0$$

αφού

$$\xi > 0. \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 6x \ln x) = 0, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

Το σύνολο τιμών της f' στο διάστημα $\Delta_1 = (0, \xi)$ είναι $f'(\Delta_1) = (-3\xi^2 - 6\xi, 0)$, άρα $f'(x) < 0$ στο Δ_1 και $f \searrow (0, \xi]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 6x \ln x) = +\infty$ και $f' \nearrow$ στο Δ_2 , άρα

$$f'(\Delta_2) = [-3\xi^2 - 6\xi, +\infty). \text{ Επειδή } 0 \in f'(\Delta_2), \text{ υπάρχει } x_0 \in \Delta_2 \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$f'(x_0) = 0. \text{ Για κάθε } \xi < x < x_0 \text{ είναι } f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \searrow [\xi, x_0], \text{ ενώ}$$

για $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_0, +\infty)$. Οπότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x = x_0$.

38.α) Είναι $g'(x) = f'(x)e^{-f(x)}$ (1), όμως από την υπόθεση

$f'(x) = e^{f(x)} - 1$ (2). Άρα από (1) και (2) θα είναι

$$g'(x) = (e^{f(x)} - 1)e^{-f(x)} = e^{f(x)}e^{-f(x)} - e^{-f(x)} = 1 - e^{-f(x)}.$$

Συνεπώς είναι $g'(x) = g(x)$ άρα $g(x) = ce^x$.

Για $x = 0$ $g(0) = c \Rightarrow 1 - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow c = 1 - e^{\ln 2} \Leftrightarrow c = -1$ άρα $g(x) = -e^x$

β) Είναι $g(x) = 1 - e^{-f(x)} \Leftrightarrow -e^x = 1 - e^{-f(x)} \Leftrightarrow e^{-f(x)} = 1 + e^x \Leftrightarrow$

$$f(x) = -\ln(1 + e^x).$$

γ) $f'(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1}$ και $f''(x) = -\frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$. Άρα η f

είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

δ) Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(0, f(0))$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

με $f(0) = \ln \frac{1}{2}$ και $f'(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1} = -\frac{1}{2}$. Άρα $\epsilon: y = -\frac{1}{2}x - \ln 2$. Αφού f

είναι κοίλη τότε $f(x) \leq y$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$\ln \frac{1}{1 + e^x} \leq -\frac{1}{2}x - \ln 2 \Leftrightarrow -\ln(1 + e^x) \leq -\frac{x}{2} - \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(1 + e^x) \geq \frac{x}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow 2\ln(1 + e^x) \geq x + \ln 4.$$

ε) Επειδή η f είναι κοίλη, ισχύει ότι: $f(x) \leq -\frac{1}{2}x - \ln 2$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x - \ln 2 \right) = -\infty \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{e^x}{e^x + 1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{1 + e^x} \right) = 0.$$

39.α) Για $x > 0$ έχουμε $x^2 f'(x) + xf(x) = 1 \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$$(xf(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow xf(x) = \ln x + c$$

Για $x = e$ είναι $ef(e) = \ln e + c \Rightarrow 2e \cdot e^{-1} = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα

$$xf(x) = \ln x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$$

β) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, 1] \text{ και για κάθε } x > 1 \text{ είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty).$$

Η f έχει μέγιστο το $f(1) = 1$.

$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(2 \ln x - 1)}{x^4} = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}. \text{ Η } f \text{ είναι κοίλη στο}$$

$$(0, \sqrt{e}] \text{ και κυρτή στο } [\sqrt{e}, +\infty) \text{ με σημείο καμπής το } \left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right).$$

γ) $\ln x = \alpha x - 1 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{x} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (\ln x + 1) \right] = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Είναι $f \nearrow$ στο $A_1 = (0, 1]$ οπότε $f(A_1) = (-\infty, 1]$ και $f \searrow$ στο $A_2 = [1, +\infty)$ οπότε $f(A_2) = (0, 1]$. Άρα το σύνολο τιμών $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$.

Αν $\alpha < 0$ τότε $\alpha \in f(A_1)$ και η εξίσωση έχει μια ρίζα $\rho \in (0, 1)$.

Αν $\alpha = 0$ τότε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ άρα η εξίσωση έχει ρίζα την $\rho = \frac{1}{e}$.

Αν $0 < \alpha < 1$ το $\alpha \in f(A_1)$, $\alpha \in f(A_2)$ και η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς 2 ρίζες $\rho_1 \in (0, 1)$ και $\rho_2 \in (1, +\infty)$.

Αν $\alpha = 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μόνο μια ρίζα τη $\rho = 1$ αφού $f(1) = 1$ και αν $\alpha > 1$ τότε $\alpha \notin f(A)$ και η εξίσωση είναι αδύνατη.

δ) $\frac{\alpha^\beta}{\beta^\alpha} > e^{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha^\beta}{\beta^\alpha} > \alpha - \beta \Leftrightarrow \ln \alpha^\beta - \ln \beta^\alpha > \alpha - \beta \Leftrightarrow \beta \ln \alpha - \alpha \ln \beta > \alpha - \beta \Leftrightarrow$

$$\beta \ln \alpha + \beta > \alpha \ln \beta + \alpha \Leftrightarrow \beta(\ln \alpha + 1) > \alpha(\ln \beta + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha + 1}{\alpha} > \frac{\ln \beta + 1}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) > f(\beta) \stackrel{f \searrow [1, +\infty)}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta \text{ ισχύει}$$

40.α) Είναι $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 3x + 1$, $D_f = \mathbb{R}$. $f'(x) = e^{x-1} + 2x - 3$ και

$f'(1) = 0$ και $f''(x) = e^{x-1} + 2 > 0$ οπότε η $f' \nearrow$. Για $x < 1$ είναι
 $f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$. Για $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Οπότε η f έχει ελάχιστο για $x = 1$ το $f(1) = 0$.

Επίσης $g(x) = \ln x - x + 1$, $Dg = (0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
g'	+	0	-
g		$\nearrow$	$\searrow$

Η g έχει μέγιστο για $x = 1$ το $g(1) = 0$.

β) Η εξίσωση $e^{x-1} - \ln x + x^2 - 2x = 0$ γίνεται $e^{x-1} + x^2 = \ln x + 2x \Leftrightarrow$
 $e^{x-1} + x^2 - 3x + 1 = \ln x - x + 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ και αφού $f(1) = g(1) = 0$ και
 $g(x) \leq g(1) = 0 = f(1) \leq f(x)$ τότε το $x = 1$ μοναδική ρίζα της παραπάνω
 εξίσωσης.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο $(1, 0)$ είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 0$ και η
 εφαπτομένη της C_g στο $(1, 0)$ είναι επίσης $y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 0$.

Οπότε οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1, 0)$.

δ) Έστω $F(x) = 3e^{x-1} + 3x + x^3 - (3x \ln x + 3x^2 + 4)$, $x > 0$. Είναι

$$F'(x) = 3e^{x-1} + 3 + 3x^2 - (3 \ln x + 3 + 6x) \text{ . Είναι}$$

$$f(x) \geq f(1) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} + x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} + x^2 + 1 \geq 3x \Leftrightarrow$$

$$3e^{x-1} + 3x^2 + 3 \geq 9x \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x = 1 \text{ . Είναι}$$

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \leq x \Leftrightarrow 3 \ln x + 3 \leq 3x \Leftrightarrow$$

$$3 \ln x + 3 + 6x \leq 9x \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x = 1 \text{ . Άρα για κάθε}$$

$$x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \text{ είναι } 3e^{x-1} + 3x^2 + 3 > 9x > 3 \ln x + 3 + 6x \Rightarrow$$

$$F'(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow (0, +\infty) \text{ αφού } F \text{ συνεχής.}$$

Παρατηρούμε ότι $F(1) = 0$ άρα η εξίσωση γίνεται:

$$3e^{x-1} + 3x + x^3 = 3x \ln x + 3x^2 + 4 \Leftrightarrow F(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = F(1) \Leftrightarrow x = 1$$

41.α) Για $x > e$ είναι $2(f'(x) - 1)(f(x) - x) = \frac{1}{x}$ οπότε

$$\left[(f(x) - x)^2 \right]' = (\ln x)' \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = \ln x + c \text{ . Για } x = e^5 \text{ είναι}$$

$$(e^5 + 2 - e^5)^2 = \ln e^5 + c \Rightarrow 4 = 5 + c \Rightarrow c = -1 \text{ άρα } (f(x) - x)^2 = \ln x - 1 \text{ και}$$

αφού $f(e^5) - e^5 = 2 > 0$ τότε $f(x) - x > 0$ αφού και για $x > e$ $\ln x - 1 > 0$ άρα

$$f(x) - x = \sqrt{\ln x - 1} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{\ln x - 1}, x > e.$$

$$\beta) f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}} + 1 > 0 \Rightarrow f \nearrow (e, +\infty) \text{ και}$$

$$f''(x) = -\frac{2(\ln x - 1) + 1}{4x^2(\ln x - 1)\sqrt{\ln x - 1}} < 0 \text{ άρα } f \text{ κοίλη στο } (e, +\infty).$$

$$\gamma) (\alpha - \beta)(\sqrt{\ln \beta - 1} + \sqrt{\ln \alpha - 1}) < \ln \frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta) \frac{(\sqrt{\ln \beta - 1} + \sqrt{\ln \alpha - 1})(\sqrt{\ln \beta - 1} - \sqrt{\ln \alpha - 1})}{(\sqrt{\ln \beta - 1} - \sqrt{\ln \alpha - 1})} < \ln \beta - \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta)(\ln \beta - \cancel{\ln \alpha} + \cancel{\ln \alpha} - \ln \alpha) < (\ln \beta - \ln \alpha)(\sqrt{\ln \beta - 1} - \sqrt{\ln \alpha - 1}) \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta < \sqrt{\ln \beta - 1} - \sqrt{\ln \alpha - 1} \Leftrightarrow \alpha + \sqrt{\ln \alpha - 1} < \beta + \sqrt{\ln \beta - 1} \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta)$$

ισχύει

$$\delta) \text{ Η εφαπτομένη στο } A(e^5, e^5 + 2) \text{ είναι } y = \left(\frac{1}{4e^5} + 1\right)x + \frac{7}{4} \text{ και αφού η}$$

$$f \text{ κοίλη τότε } f(x) \leq \left(\frac{1}{4e^5} + 1\right)x + \frac{7}{4} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (4f(x) - 7)e^5 \leq (4e^5 + 1)x.$$

$$\epsilon) \text{ Είναι } h(x) = \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x}. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}} = 0$$

άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$ οπότε η $y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη C_h στο $+\infty$.

$$42. \alpha) \text{ Είναι } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5, x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f(1) = -1, f(3) = -5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Η } f \nearrow \text{ στο } (-\infty, 1] \text{ με } f(A_1) = (-\infty, -1], f \searrow \text{ στο } [1, 3] \text{ με } f(A_2) = [-5, -1].$$

$$\text{Η } f \nearrow \text{ στο } [3, +\infty) \text{ με } f(A_3) = [-5, +\infty). \text{ Επειδή } 0 \in f(A_3) \text{ και } 0 \notin f(A_1), 0 \notin f(A_2) \text{ τότε υπάρχει μοναδικός } \rho \in (3, +\infty) \text{ τέτοιος ώστε } f(\rho) = 0.$$

$$\beta) \text{ Είναι } g(x) = 3x^4 - 24x^3 + 54x^2 - 60x + 1, x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) = 12x^3 - 72x^2 + 108x - 60 = 12(x^3 - 6x^2 + 9x - 5) = 12f(x)$$

$$\bullet \text{ Αν } x \in (-\infty, 1] \text{ τότε } f(x) \leq -1 \text{ άρα } g'(x) < 0 \text{ οπότε } g \searrow (-\infty, 1]$$

$$\bullet \text{ Αν } x \in [1, 3] \text{ τότε } -5 \leq f(x) \leq -1 \Leftrightarrow f(x) < 0 \text{ άρα } g'(x) < 0 \text{ οπότε η } g \searrow \text{ στο } [1, 3].$$

• Αν $x \in [3, p]$ τότε αφού $f \nearrow$ τότε $f(3) \leq f(x) \leq f(p) - 5 \leq f(x) \leq 0$ άρα $g'(x) < 0$ οπότε η $g \searrow$ στο $[3, p]$. Αφού η g συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η g είναι $\searrow$ στο $(-\infty, p]$. Επίσης $x \geq p$ θα είναι $f(x) \geq f(p) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$. Άρα η $g \nearrow$ στο $[3, +\infty)$ οπότε η g έχει ολικό ελάχιστο για $x = p$.

γ) Η ζητούμενη σχέση γίνεται $f(\beta) - f(\alpha) + 3(\beta - \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \geq -3$.

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο

ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Οπότε αρκεί $f'(\xi) \geq -3$, δηλαδή

$$3\xi^2 - 12\xi + 9 \geq -3 \Leftrightarrow 3\xi^2 - 12\xi + 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3(\xi - 2)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

43.α) Είναι $f(x) = 12x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 30x^2 - 1821$

$$f'(x) = 60x^4 + 60x^3 + 60x^2 + 60x = 60x(x^3 + x^2 + x + 1) = 60x(x+1)(x^2+1)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f(-1) = -1808 < 0, f(0) = -1821 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Από τα επιμέρους σύνολα τιμών διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (0, +\infty)$.

β) Έχουμε $f''(x) = 240x^3 + 180x^2 + 120x + 60 = 60(4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)$

Έστω $g(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ και

$$g'(x) = 12x^2 + 6x + 2 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R} \text{ (αφού } \Delta < 0 \text{)}. \text{ Είναι } g(-1) = -2 \text{ και}$$

$$g(0) = 1, \text{ άρα η εξίσωση } g(x) = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα } x_2 \text{ η οποία } x_2 \in (-1, 0)$$

. Για κάθε $x < x_2 \xrightarrow{g'} g(x) < g(x_2) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap (-\infty, x_2]$ και για κάθε

$$x > x_2 \xrightarrow{g'} g(x) > g(x_2) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup [x_2, +\infty). \text{ Οπότε η } f \text{ έχει}$$

μοναδικό σημείο καμπής στο σημείο $B(x_2, f(x_2))$.

γ) Αφού $x_1 \in (0, +\infty)$ και $x_2 \in (-1, 0)$ τότε $x_1 > x_2$.

44.α) Λόγω ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$.

$$0 < \xi < x \xrightarrow{f' \searrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0$$

$$\beta) F'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x} > 0 \Rightarrow F' \nearrow (0, +\infty)$$

$$\gamma) g(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - x = e^{-x} - x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} - e^{-x} = 0$$

$$\text{Έστω } \varphi(x) = F(x) - e^{-x}, x > 0. \text{ Είναι } \varphi'(x) = F'(x) + e^{-x} > 0 \Rightarrow \varphi' \nearrow (0, +\infty)$$

άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

$$\delta) \text{ Για κάθε } x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 0] \text{ και για κάθε}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [0, +\infty), \text{ άρα η } f \text{ έχει ελάχιστο στο } x = 0.$$

$$45. \alpha) f'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} - 2 = 2 \frac{\ln x - x}{x}. \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι}$$

$$\ln x \leq x - 1 < x \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (0, +\infty)$$

$$\beta) f''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}. f \cup (0, e], \cap [e, +\infty), \text{ έχει σημείο καμπής το } A(e, 1 - 2e).$$

$$\gamma) \text{ Είναι } \ln^2 x + 2 = 2x \Leftrightarrow f(x) = -2 = f(1) \Leftrightarrow x = 1$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ άρα ο άξονας } y'y \text{ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x \left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \right) = -2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x = +\infty \text{ άρα}$$

δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \right) \right] = -\infty \text{ οπότε δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.}$$

$$\epsilon) \text{ Η } f' \text{ έχει μέγιστο το } f'(e) = \frac{2}{e} - 2 \text{ άρα}$$

$$f'(\alpha) \leq \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow \frac{2 \ln \alpha}{\alpha} - 2 \leq \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} \leq \frac{1}{e} \quad (1),$$

$$f'(\beta) \leq \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow \frac{2 \ln \beta}{\beta} - 2 \leq \frac{2}{e} - 2 \Leftrightarrow \frac{\ln \beta}{\beta} \leq \frac{1}{e} \quad (2) \text{ και από}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \frac{\ln \alpha}{\alpha} + \frac{\ln \beta}{\beta} \leq \frac{2}{e}$$

$$\sigma\tau) \alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha \Leftrightarrow \ln \alpha^{\alpha+1} > \ln (\alpha+1)^\alpha \Leftrightarrow (\alpha+1) \ln \alpha > \alpha \ln (\alpha+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1} \Leftrightarrow 2 \frac{\ln \alpha}{\alpha} - 2 > 2 \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha+1} - 2 \Leftrightarrow f'(\alpha) > f'(\alpha+1) \stackrel{f' \searrow (e, +\infty)}{\Leftrightarrow} \alpha < \alpha+1$$

ισχύει

46.α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x} \text{ και δευτέρα παράγωγο } f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ άρα η } f' \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επομένως η f' έχει σύνολο τιμών το

$$f'((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = (1 - \infty, +\infty - 0) = (-\infty, +\infty)$$

Το $0 \in f'((0, +\infty))$ άρα υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Το x_0 μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Η f όπως είπαμε είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της άρα το x_0 είναι μοναδικό κρίσιμο σημείο.

β) Η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε :για κάθε

$$x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0 \text{ και για κάθε}$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού}$$

της σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$, γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο x_0 .

γ) i) Αν $x_0 \geq 1$ τότε $f'(x_0) \geq f'(1) \Leftrightarrow 0 \geq e - 1$ αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άτοπο. Άρα $x_0 < 1$.

ii) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ οπότε

$$x_0 < 1 \Leftrightarrow f(x_0) < f(1) = e < 3.$$

$$\text{Επίσης } f'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow x_0 = -\ln x_0 \quad (1)$$

$$\text{Έχουμε } f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{x_0} + x_0 > 2, \text{ αφού } x_0 < 1 \text{ και}$$

$$\frac{1}{x_0} + x_0 > 2 \Leftrightarrow 1 + x_0^2 > 2x_0 \Leftrightarrow 1 + x_0^2 - 2x_0 > 0 \Leftrightarrow (1 - x_0)^2 > 0 \text{ ισχύει.}$$

$$\text{iii) Έστω } A_1 = (0, x_0), A_2 = [x_0, +\infty).$$

Λόγω της μονοτονίας της f στα διαστήματα A_1, A_2 έχουμε :

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (f(x_0), +\infty),$$

$$f(A_2) = [f(x_0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [f(x_0), +\infty) \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \cdot \left(1 - \frac{\ln x}{e^x} \right) \right] = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{DLH} \frac{1}{xe^x} = 0 \right).$$

Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f((0, +\infty)) = f(A_1) \cup f(A_2) = [f(x_0), +\infty)$.

Από γ) ι) ερώτημα έχουμε $2 < f(x_0) < 3$ οπότε το 2 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

δ) Έστω $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης με την γραφική παράσταση της f . Η εφαπτομένη έχει εξίσωση :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{x_0} + \ln x_0 = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \right) (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0} \right) x - x_0 e^{x_0} + 1 + e^{x_0} - \ln x_0.$$

Το σημείο $(0, 0)$ ανήκει στην εφαπτομένη οπότε :

$$0 = -x_0 e^{x_0} + 1 + e^{x_0} - \ln x_0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)e^{x_0} + \ln x_0 - 1 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = (x - 1)e^x + \ln x - 1, x > 0$.

Η k είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $k'(x) = e^x(x - 1) + e^x + \frac{1}{x} = xe^x + \frac{1}{x} > 0$

άρα είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και $1 - 1$. Η k έχει σύνολο τιμών το $k((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) \right) = (-2 - \infty, +\infty + \infty - 1) = (-\infty, +\infty)$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της k οπότε η εξίσωση

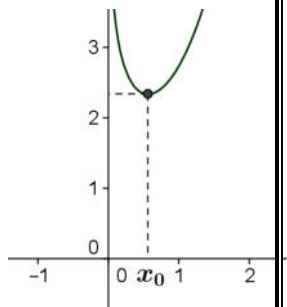
$k(x) = 0$ έχει μοναδική, λόγω της μονοτονίας, ρίζα.

Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ε) Από γ) ερώτημα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y' και δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.



47.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} > 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα}$$

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ άρα δεν έχει ακρότατα.}$$

β) Έστω $A_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $A_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά οπότε:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = (0 - \infty, +\infty - 0) = (-\infty, +\infty),$$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)\right) = (-\infty - 0, 0 + \infty) = (-\infty, +\infty).$$

Το 2021 ανήκει στα $f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 2021, f(x_2) = 2021$. Τα x_1, x_2 μοναδικά, λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα A_1, A_2 , άρα η εξίσωση $f(x) = 2021$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

γ) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ με δεύτερη

$$\text{παραγώγο } f''(x) = \frac{2\eta\mu x}{\sin^3 x} - \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^3 x} = \frac{2(\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x)}{\sin^3 x \cdot \eta\mu^3 x} \Leftrightarrow .$$

$$f''(x) = \frac{2(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\sin^3 x \cdot \eta\mu^3 x} = \frac{2(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\sin^3 x \cdot \eta\mu^3 x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)}{\sin^3 x \cdot \eta\mu^3 x} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{c} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{array} \right) \text{ ή}$$

$$\left(\begin{array}{c} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \end{array} \right) \text{ Έχουμε}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\left(\eta\mu^2 \frac{\pi}{6} - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{6}\right)}{\sin^3 \frac{\pi}{6} \cdot \eta\mu^3 \frac{\pi}{6}} = \frac{2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{8}} = -\frac{64}{3\sqrt{3}} < 0 \text{ οπότε } f''(x) < 0 \text{ στο}$$

$$\left(0, \frac{\pi}{4}\right), f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\left(\eta\mu^2 \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3 \frac{\pi}{3} \cdot \eta\mu^3 \frac{\pi}{3}} = \frac{2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = \frac{64}{3\sqrt{3}} > 0 \text{ οπότε } f''(x) > 0$$

$$\text{στο } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\left(\eta\mu^2 \frac{2\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{2\pi}{3}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3 \frac{2\pi}{3} \cdot \eta\mu^3 \frac{2\pi}{3}} = \frac{2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)}{-\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = -\frac{64}{3\sqrt{3}} < 0 \text{ οπότε}$$

$$f''(x) < 0 \text{ στο } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2\left(\eta\mu^2 \frac{5\pi}{6} - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{5\pi}{6}\right)}{\sigma\upsilon\nu^3 \frac{5\pi}{6} \cdot \eta\mu^3 \frac{5\pi}{6}} = \frac{2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)}{-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{64}{3\sqrt{3}} > 0 \text{ οπότε } f''(x) > 0 \text{ στο}$$

$\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα είναι κοίλη στα

διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right], \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, κυρτή στα διαστήματα $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ και έχει

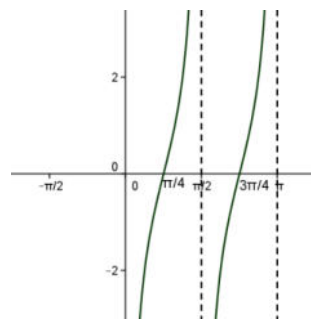
σημεία καμπής τα σημεία $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \left(\frac{3\pi}{4}, f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ δηλαδή τα σημεία

$$\left(\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right).$$

δ) Από β) ερώτημα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες

$x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$. Στο πεδίο ορισμού της δεν

υπάρχουν περιοχές του $\pm\infty$ άρα δεν έχει οριζόντιες και πλάγιες ασύμπτωτες.



48.α) Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow |2x - 6| = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Για κάθε $x \neq 3$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη), είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x < 3$ είναι $f'(x) = -2x + 6$ με $f''(x) = -2 < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 3]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 3$ είναι

$f'(x) = 2x - 6$ με $f''(x) = 2 > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[3, +\infty)$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η f έχει σημείο καμπής το $(3, f(3))$.

β) Είναι $f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & x \geq 3 \\ -2x + 6, & x < 3 \end{cases}$.

Για $x < 3$ είναι $f'(x) = -2x + 6 = (-x^2 + 6x)'$ $\Leftrightarrow f(x) = -x^2 + 6x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$.

Είναι $f(0) = -8 \Leftrightarrow c_1 = -8$, άρα $f(x) = -x^2 + 6x - 8, x < 3$.

Για $x > 3$ είναι $f'(x) = 2x - 6 = (x^2 - 6x)'$ $\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 6x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής σ' αυτό, οπότε είναι συνεχής και στο $x_0 = 3$, άρα

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Leftrightarrow f(3) = 1 = -9 + c_2 \Rightarrow c_2 = 10.$$

Επομένως $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 8, & x < 3 \\ 1, & x = 3 \\ x^2 - 6x + 10, & x > 3 \end{cases}$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για $x < 3$

είναι $f(x) = y \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 = y \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = -y \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 1 - y \Leftrightarrow$

$(x - 3)^2 = 1 - y$ (1). Επειδή $x < 3$, είναι $(x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - y > 0 \Leftrightarrow y < 1$. Τότε

η (1) γίνεται: $|x - 3| = \sqrt{1 - y} \Leftrightarrow -x + 3 = \sqrt{1 - y} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{1 - y} = x$, άρα

$f^{-1}(y) = 3 - \sqrt{1 - y}, y < 1$. Για $x > 3$ είναι

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 = y \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = y - 1 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = y - 1 \quad (2)$$

Επειδή $x > 3$ είναι $(x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$. Τότε η (2) γίνεται:

$$|x - 3| = \sqrt{y - 1} \Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{y - 1} \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{y - 1}, \text{ άρα}$$

$f^{-1}(y) = 3 + \sqrt{y - 1}, y > 1$. Τέλος για $x = 3$ είναι $y = 1$, οπότε $f^{-1}(1) = 3$.

$$\text{Άρα } f^{-1}(y) = \begin{cases} 3 - \sqrt{1 - y}, & y < 1 \\ 3, & y = 1, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \begin{cases} 3 - \sqrt{1 - x}, & x < 1 \\ 3, & x = 1. \\ 3 + \sqrt{x - 1}, & x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

δ) Αρκεί να βρούμε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$f'(x_1) = f'(x_2) \Leftrightarrow |2x_1 - 6| = |2x_2 - 6| \Leftrightarrow 2x_1 - 6 = \pm(2x_2 - 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x_1 - 6 = 2x_2 - 6 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \text{ ή } (2x_1 - 6 = -2x_2 + 6 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 + 6) \quad x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow$$

$x_1 = -x_2 + 6$. Για $x_1 = 2$ είναι $x_2 = 4$ και έχουμε ότι:

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 4$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_1: y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y - 2 = 2(x - 4) \Leftrightarrow y = 2x - 6$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 2$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_2: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 0 = 2(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x - 4. \text{ Επειδή}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{ είναι } \varepsilon_1 // \varepsilon_2.$$

ε) Για να δέχεται η C_f κάθετες εφαπτόμενες πρέπει να υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = -1$. Όμως $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν δέχεται κάθετες εφαπτόμενες.

στ) Αρκεί η εξίσωση $f'(x) = x^3$ να έχει ακριβώς μια ρίζα.

Για $x < 3$ είναι $f'(x) = x^3 \Leftrightarrow -2x + 6 = x^3 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 6 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 + 2x - 6$, $x < 3$. Είναι $\varphi'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow (-\infty, 3)$.

Είναι $\varphi(0) = -6$, $\varphi(1) = -3$, $\varphi(2) = 6$, άρα $\varphi(1)\varphi(2) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^3$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$. Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 3)$, η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Για $x > 3$ είναι $f'(x) = x^3 \Leftrightarrow 2x - 6 = x^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x + 6 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = x^3 - 2x + 6$, $x \geq 3$. Είναι $h'(x) = 3x^2 - 2 > 0$ για κάθε $x > 3$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 3$ είναι $h(x) \geq h(3) = 27 - 6 + 6 = 27 > 0$, οπότε η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^3 \text{ είναι αδύνατη.}$$

Τελικά η γραφική παράσταση της f' τέμνει την γραφική παράσταση της $y = x^3$ ακριβώς σε ένα του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $(1, 2)$.

Άρα το διάστημα $(\alpha, \alpha + 1)$ είναι το $(1, 2)$ με $\alpha = 1$.

49.α) Πρέπει $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $[-2, 2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$, με παράγωγο

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}. \text{ Έχουμε } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, $f'(x) > 0$ στο $(-2, 0)$, $f'(x) < 0$ στο $(0, 2)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ οπότε παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 , το $f(0) = 2$ και ολικά ελάχιστα στα $-2, 2$ τα $f(-2) = f(2) = 0$.

β) Έστω $A_1 = [-2, 0], A_2 = (0, 2]$. Λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα αυτά έχουμε : $f(A_1) = [f(-2), f(0)] = [0, 2]$ και

$$f(A_2) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [0, f(0)) = [0, 2).$$

- Αν $\alpha < 0$ ή $\alpha > 2$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη .
- Αν $0 < \alpha < 2$, $\alpha \in f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ τέτοιοι ώστε $f(x_1) = \alpha, f(x_2) = \alpha$.

Τα x_1, x_2 μοναδικά αφού η f είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα αυτά.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ έχει δύο ρίζες τις $x = -2, 2$.
- Αν $\alpha = 2$, τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

γ) i) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της , με δεύτερη

$$\text{παραγώγο } f''(x) = \frac{-\sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{(\sqrt{4-x^2})^2} = \frac{-(4-x^2) - x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} < 0 \quad \text{άρα η } f \text{ είναι κοίλη στο } [-2, 2].$$

ii) Έστω $B(x_0, f(x_0)), x_0 \in [-2, 2]$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f . Η (ε) έχει εξίσωση:

$$y - \sqrt{4-x_0^2} = -\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}}(x-x_0) \Leftrightarrow y = -\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}} \cdot x + \frac{x_0^2}{\sqrt{4-x_0^2}} + \sqrt{4-x_0^2}.$$

Το σημείο Γ ανήκει στην (ε) οπότε:

$$\sqrt{3} = -\frac{x_0}{\sqrt{4-x_0^2}} + \frac{x_0^2}{\sqrt{4-x_0^2}} + \sqrt{4-x_0^2} \Leftrightarrow \sqrt{12-3x_0^2} = -x_0 + \frac{x_0^2}{\sqrt{4-x_0^2}} + 4 - \sqrt{4-x_0^2} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{12-3x_0^2})^2 = (-x_0+4)^2 \Leftrightarrow 12-3x_0^2 = x_0^2-8x_0+16 \Leftrightarrow 4x_0^2-8x_0+4=0 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2-2x_0+1=0 \Leftrightarrow (x_0-1)^2=0 \Leftrightarrow x_0-1=0 \Leftrightarrow x_0=1 \text{ και}$$

$$(\varepsilon): y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \Leftrightarrow .$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

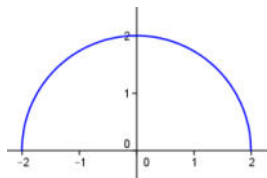
x	-2	0	2
f''	-		-
f'	+	0	-
f	OE ↗	OM ↘	OE

ε) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες .Στο πεδίο ορισμού της δεν υπάρχει περιοχή του $-\infty, +\infty$ άρα δεν έχει ούτε οριζόντιες ούτε πλάγιες ασύμπτωτες.

50.α) Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει προφανή ρίζα την $x_0 = 2$. Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 15^x + 8^x = 17^x \Leftrightarrow \left(\frac{15}{17}\right)^x + \left(\frac{8}{17}\right)^x = 1.$$



Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \left(\frac{15}{17}\right)^x + \left(\frac{8}{17}\right)^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ με παράγωγο

$$h'(x) = \underbrace{\left(\frac{15}{17}\right)^x}_{>0} \ln \frac{15}{17} + \underbrace{\left(\frac{8}{17}\right)^x}_{>0} \cdot \ln \frac{8}{17} < 0 \text{ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο}$$

ορισμού της και 1-1 οπότε $x_0 = 2$ μοναδική ρίζα της.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

$$\beta) \text{ i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{g(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15^x + 8^x - 2}{17^x - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{15^x \ln 15 + 8^x \ln 8}{17^x \ln 17} = \frac{\ln 15 + \ln 8}{\ln 17} = \frac{\ln 120}{\ln 17}.$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15^x + 8^x}{17^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{15^x}{17^x} + \frac{8^x}{17^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{15}{17}\right)^x + \left(\frac{8}{17}\right)^x \right) = 0$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} + 2021 \right) = 2021$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \cdot \eta\mu \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \stackrel{u = \frac{f(x)}{g(x)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty, u \rightarrow 0} \frac{1}{u} \cdot \eta\mu u = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

γ) Έστω $B(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in \mathbb{R}$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f . Η (ε) έχει εξίσωση :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 15^{x_0} - 8^{x_0} = (15^{x_0} \ln 15 + 8^{x_0} \ln 8) \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = (15^{x_0} \ln 15 + 8^{x_0} \ln 8) \cdot x - x_0 \cdot (15^{x_0} \ln 15 + 8^{x_0} \ln 8) + 15^{x_0} + 8^{x_0}.$$

Το σημείο A ανήκει στην (ε) οπότε :

$$2 = (15^{x_0} \ln 15 + 8^{x_0} \ln 8) \cdot 0 - x_0 \cdot (15^{x_0} \ln 15 + 8^{x_0} \ln 8) + 15^{x_0} + 8^{x_0} \Leftrightarrow$$

$$x_0 (15^{x_0} \ln 15 + 8^{x_0} \ln 8) - 15^{x_0} - 8^{x_0} + 2 = 0. (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = x(15^x \ln 15 + 8^x \ln 8) - 15^x - 8^x + 2$.

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $k'(x) = x(15^x \ln^2 15 + 8^x \ln^2 8)$.

Έχουμε $k'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \left(\underbrace{15^x \ln^2 15 + 8^x \ln^2 8}_{>0} \right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Η k είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$.

$k'(x) > 0$ για $x > 0$, $k'(x) < 0$ για $x < 0$ οπότε η k είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $k(0) = 0$. Επομένως $k(x) \geq k(0) = 0$ με ίσον να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Από την εξίσωση (1) έχουμε ισοδύναμα: $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ και

$$(ε): y = (\ln 15 + \ln 8) \cdot x + 2 \Leftrightarrow y = \ln 120 \cdot x + 2.$$

δ) Έχουμε

$$15^x - 2 \geq \ln 120 \cdot x - 8^x \Leftrightarrow 15^x + 8^x \geq \ln 120 \cdot x + 2 \Leftrightarrow f(x) \geq \ln 120 \cdot x + 2.$$

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο

$f''(x) = 15^x \ln^2 15 + 8^x \ln^2 8 > 0$ άρα είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη εκτός από το σημείο επαφής. Επομένως $f(x) \geq \ln 120 \cdot x + 2$.

Επίπεδο Γ2

51.α) Επειδή $f'(x) = e^{g(x)}$ και η $e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τότε και η f' θα είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = (e^{g(x)})' = e^{g(x)} g'(x). \text{ Όμοια και η } g \text{ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο}$$

$$(0, +\infty) \text{ με } g''(x) = (-e^{-f(x)})' = e^{-f(x)} f'(x).$$

Είναι $f''(x) = e^{g(x)} g'(x)$ και $g'(x) = -e^{-f(x)}$, άρα

$$f''(x) = e^{g(x)} (-e^{-f(x)}) = -e^{g(x)-f(x)} \quad (1). \text{ Είναι } g''(x) = e^{-f(x)} f'(x) \text{ και}$$

$$f'(x) = e^{g(x)}, \text{ άρα } g''(x) = e^{-f(x)} e^{g(x)} = e^{-f(x)+g(x)} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $f''(x) = -g''(x)$, οπότε υπάρχει $c_1 \in \mathbb{R}$

τέτοιο ώστε: $f'(x) = -g'(x) + c_1$. Είναι $f'(e) = e^{g(e)} = e^{-1}$ και

$$g'(e) = -e^{-f(e)} = -e^{-1}, \text{ οπότε η σχέση (3) για } x = e \text{ γίνεται:}$$

$$f'(e) = -g'(e) + c_1 \Leftrightarrow e^{-1} = e^{-1} + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ άρα } f'(x) = -g'(x).$$

Είναι: $f'(x) = -g'(x) \Leftrightarrow f(x) = -g(x) + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Για $x = e$ είναι

$$f(e) = -g(e) + c_2 \Leftrightarrow 1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0, \text{ άρα } f(x) = -g(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

β) Επειδή $f'(x) = e^{g(x)}$ και $f(x) = -g(x)$ είναι: $f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + c, c \in \mathbb{R}$. Για $x = e$ είναι $e^{f(e)} = e + c \Leftrightarrow e = e + c \Leftrightarrow c = 0$, άρα $e^{f(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = \ln x, x > 0$.

γ) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με

$f'(x) = \frac{1}{x}$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο

ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e}$. Είναι

$$e < \xi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} < \frac{\ln \pi - 1}{\pi - e} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow (\pi - e) \frac{1}{\pi} < \ln \pi - 1 < (\pi - e) \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi - 1 < \frac{\pi}{e} - 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}.$$

δ) $\varphi(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}, x > 0$. $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα $\varphi \nearrow (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(1) = 0$.

52.α) Έστω υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει

$\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο $f'(\xi_1) = 0$ άτοπο. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ θα είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$ οπότε η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Αφού η f' είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη και αφού $1 < 3$ και $f(1) < f(3)$ τότε η f θα είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, 3]$ οπότε υπάρχει $\rho \in (1, 3)$ τέτοιο

ώστε $f'(\rho) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 2}{2} = 2$. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$M(\rho, f(\rho))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$.

δ) Είναι $f(3) = 6 \Leftrightarrow f^{-1}(6) = 3$ οπότε $f(4 - f^{-1}(x - 2)) < 6$ γίνεται

$$f(4 - f^{-1}(x - 2)) < f(3) \xrightarrow{f^{-1}} 4 - f^{-1}(x - 2) < 3 \Leftrightarrow f^{-1}(x - 2) > 1 \Leftrightarrow$$

$$f(f^{-1}(x - 2)) > f(1) \Leftrightarrow x - 2 > 2 \Leftrightarrow x > 4.$$

ε) Θεωρούμε την $g(x) = 2f(x) - f(e) - f(1,8)$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

$$g(1) = 2f(1) - f(e) - f(1,8) = f(1) - f(e) + f(1) - f(1,8) < 0 \text{ γιατί } f \nearrow \text{ και}$$

$$1 < e \Leftrightarrow f(1) < f(e), 1 < 1,8 \Leftrightarrow f(1) < f(1,8).$$

$$\text{Επίσης } g(3) = 2f(3) - f(e) - f(1,8) = (f(3) - f(e)) + (f(3) - f(1,8)) > 0 \text{ ως}$$

άθροισμα θετικών. Οπότε $0 < f(x) < \frac{x^2}{2}$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει

$$\xi \in (1,3) \text{ τέτοιο ώστε } 0 < f(x) < \frac{x^2}{2} \quad 2f(\xi) = f(e) + f(1,8).$$

Επίσης η g είναι $\nearrow$ στο $[1,3]$ γιατί για

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow 2f(x_1) < 2f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$2f(x_1) - f(e) - f(1,8) < 2f(x_2) - f(3) - f(1,8) \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \text{ οπότε η ρίζα } \xi \text{ που βρήκαμε είναι μοναδική.}$$

στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την $x > 0$ στα διαστήματα $[1,2], [2,3]$ οπότε υπάρχουν $\theta_1 \in (2,3)$ και $\theta_2 \in (2,3)$ τέτοια ώστε

$$f'(\theta_1) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 2}{1} = 2 \text{ και } f'(\theta_2) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{6 - 4}{1} = 2 \text{ οπότε}$$

$f'(\theta_1) = f'(\theta_2)$ και εφαρμόζοντας Θ. Rolle για την f' στο $[\theta_1, \theta_2]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\theta) = 0$.

ζ) Θεωρώ $h(x) = f(x) - 5$, συνεχής στο $[1,3]$ με $h(1) = f(1) - 5 = -3 < 0$,

$$h(3) = f(3) - 5 = 1 > 0 \text{ οπότε } h(1) \cdot h(3) < 0 \text{ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει}$$

$x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $\alpha_{\min} = \ln 3$ και αφού η $f \nearrow$ τότε και η $h \nearrow$ οπότε το x_0 μοναδικό.

η) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[1, x_0]$ και $[x_0, 3]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (1, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, 3)$ τέτοια ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{5 - 2}{x_0 - 1} = \frac{3}{x_0 - 1} \Leftrightarrow \frac{3}{f'(x_1)} = x_0 - 1 \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(3) - f(x_0)}{3 - x_0} = \frac{6 - 5}{3 - x_0} = \frac{1}{3 - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = 3 - x_0 \quad (2)$$

$$\text{Άρα από (1) και (2) προκύπτει } \frac{3}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = x_0 - 1 + 3 - x_0 = 2.$$

53.α) Η $h(x) = \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκο σ.σ. Στο $x = \beta$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow \beta^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} = f'(\beta) = 0 = h(\beta) \text{ άρα } h \text{ συνεχής στο } [\alpha, \beta].$$

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $h'(x) = \frac{f'(x)(x-\beta) - f(x) + f(\beta)}{(x-\beta)^2}$

και $h'(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{(\alpha - \beta)^2} < 0$ γιατί $f'(\alpha) = 0$ και $f(\beta) > f(\alpha)$.

γ) Αφού $h'(\alpha) < 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} < 0$, άρα $\frac{h(x) - h(\alpha)}{x - \alpha} < 0$ κοντά στο α . Όμως $x - \alpha > 0$ κοντά στο α , οπότε $h(x) - h(\alpha) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(\alpha)$.

Είναι $h(\alpha) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} < 0$ οπότε $h(x) < h(\alpha) < 0 = h(\beta)$ και η f δεν έχει ελάχιστη τιμή στα άκρα α ή β . Όμως είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ οπότε έχει ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο του (α, β) . Έστω $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τότε από Fermat είναι $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x_0)(x_0 - \beta) - f(x_0) + f(\beta)}{(x_0 - \beta)^2} = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(\beta)}{x_0 - \beta}$.

54.α) $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 2]$ οπότε για κάθε $x < 2$ είναι

$$f'(x) > f'(2) = 2 \Rightarrow f' \nearrow (-\infty, 2]$$

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 2$ είναι η

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = 2x + 3$$

Επειδή $f''(x) < 0$ η f είναι κοίλη, οπότε βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \leq 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω $g(x) = f(x) - 2x + 1, x \geq 1$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 2 > 0 \Rightarrow g' \nearrow [1, 2]$

Για κάθε $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow g(x) \geq g(1) = 0$ άρα $f(x) - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 2x - 1$

γ) Λόγω του ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi_1 \in (1, x)$ και $\xi_2 \in (x, 2)$, $x \in (1, 2)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2 - x}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{f' \searrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - 1}{x - 1} > \frac{7 - f(x)}{2 - x} \Leftrightarrow$$

$$(2 - x)(f(x) - 1) > (x - 1)(7 - f(x))$$

δ) Λόγω του ΘΜΤ υπάρχει $\xi_3 \in (1, 2): f'(\xi_3) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 6$ και

$$\xi_4 \in (\xi_3, 2): f''(\xi_4) = \frac{f'(2) - f'(\xi_3)}{2 - \xi_3} = \frac{-4}{2 - \xi_3}. \text{ Αρκεί}$$

$$\frac{-4}{2-\xi_3} < -4 \Leftrightarrow -4 < -8 + 4\xi_3 \Leftrightarrow \xi_3 > 1 \text{ ισχύει}$$

ε) Είναι $f(1) < 4 < f(2)$ οπότε από το ΘΕΤ υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 4$.

στ) Λόγω ΘΜΤ για την f υπάρχει $x_1 \in (1, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, 2)$ τέτοια, ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{3}{x_0 - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{x_0 - 1}{3} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{3}{2 - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{2 - x_0}{3} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1) + (2) \Rightarrow \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{1}{3}.$$

55.α) Έστω $h(x) = \ln x + x - 2$, $x > 0$ με $h'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$, άρα $h \nearrow (0, +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$, άρα $h(A) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in h(A)$ και η h

είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $\theta > 0$ για το οποίο ισχύει:

$$h(\theta) = 0 \Leftrightarrow \ln \theta + \theta - 2 = 0$$

$$\text{β) i. } f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 1) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \left((\ln x - 1) + \frac{x-1}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{\ln x + x - 2}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}. \text{ Για κάθε } x > \theta \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty). \text{ Για κάθε } 0 < x < \theta \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(\theta) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$$

$$f \searrow (0, \theta]. \text{ Ελάχιστο το } f(\theta) = \left(1 - \frac{1}{\theta}\right)(\ln \theta - 1) = \frac{\theta - 1}{\theta}(2 - \theta - 1) = -\frac{(\theta - 1)^2}{\theta}.$$

$$\text{Άρα } \forall x > 0 \text{ είναι } f(x) \geq f(\theta) \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{(\theta - 1)^2}{\theta} \Leftrightarrow f(x) + \frac{(\theta - 1)^2}{\theta} \geq 0$$

ii. Είναι $h(1) = -1$, $h(2) = \ln 2$, οπότε $h(1)h(2) < 0$. Σύμφωνα με το θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$. Όμως το θ είναι η

μοναδική ρίζα της h , άρα $\theta \in (1, 2)$. Έστω $a(\theta) = -\frac{(\theta - 1)^2}{\theta}$, $\theta \in [1, 2]$. Είναι

$$a'(\theta) = -\frac{2(\theta - 1)\theta - (\theta - 1)^2}{\theta^2} = -\frac{(\theta - 1)(\theta + 1)}{\theta^2} < 0 \Rightarrow a \searrow [1, 2].$$

Για κάθε $1 < \theta < 2 \Rightarrow a(\theta) > a(2) = -\frac{1}{2}$, οπότε $f(x) \geq -\frac{(\theta-1)^2}{\theta} > -\frac{1}{2}$.

iii. Έστω $g(x) = f(x) + f'(x)$, $x \in [\theta, e]$.

$$g(\theta) = f(\theta) + f'(\theta) = f(\theta) + 0 = -\frac{(\theta-1)^2}{\theta} < 0,$$

$$g(e) = f(e) + f'(e^2) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)(\ln e - 1) + \frac{\ln e + e - 2}{e^2} = \frac{e-1}{e^2} > 0. \text{ Οπότε από}$$

θεώρημα Bolzano...

56.α) i. $h'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x) - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = 0$ άρα

$$h(x) = c$$

ii) Για $x = 2$ $h(2) = 2f'(2) - f(2) + e^{\frac{1}{2}} = 2\frac{\sqrt{e}}{2} - 2\sqrt{e} + \sqrt{e} = 0$

$$\text{Άρα } xf'(x) - f(x) + e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} + c_1 \stackrel{x=2}{\Rightarrow} c_1 = 0 \text{ άρα } f(x) = xe^{\frac{1}{x}}, x > 0.$$

β) $f'(x) = \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}$. Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0,1]$. Για κάθε

$$x > 1 \text{ είναι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty). f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} > 0 \text{ άρα } f \text{ κυρτή στο}$$

$$(0, +\infty).$$

γ) Εφαπτόμενη στο $x_0 = 2$: $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{e}}{2}x + \sqrt{e}$. Επειδή η

f είναι κυρτή ισχύει: $f(x) \geq y$, για κάθε $x > 0$, άρα

$$xe^{\frac{1}{x}} \geq \frac{\sqrt{e}}{2}x + \sqrt{e} \Rightarrow 2xe^{\frac{1}{x}} \geq \sqrt{e}(x+2)$$

δ) Η f έχει ελάχιστο στο $x = 1$ άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq f(1) = e$. Είναι

$$f(\alpha) \geq 1 \Leftrightarrow \alpha e^{\frac{1}{\alpha}} \geq e, f(\beta) \geq 1 \Leftrightarrow \beta e^{\frac{1}{\beta}} \geq e, \text{ οπότε } \alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}} \geq 2e \text{ άρα για να}$$

είναι $\alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}} \leq 2e$ πρέπει $\alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}} = 2e$ και αυτό ισχύει μόνο όταν

$$f(\alpha) = e \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και } f(\beta) = e \Leftrightarrow \beta = 1$$

57.α) i. Για $x = 2$ και $x = -2$ προκύπτει $f(-2) \neq 0$ και $f(2) \neq 0$.

ii. Έστω $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{3x^2 - 12}{f(x)}, x \in [-2, 2]. \text{ Είναι } g(-2) = g(2) = 0, \text{ οπότε από το Θ. Rolle}$$

υπάρχει $\xi \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{6\xi f(\xi) - (3\xi^2 - 12)f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow 6\xi f(\xi) = (3\xi^2 - 12)f'(\xi) \text{ που είναι άτοπο.}$$

β) i. $(3x^2 - 12)f'(x) - 6xf(x) = (3x^2 - 7)(3x^2 - 12)^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{(3x^2 - 12)f'(x) - 6xf(x)}{(3x^2 - 12)^2} = (3x^2 - 7) \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{3x^2 - 12} \right]' = (x^3 - 7x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{3x^2 - 12} = x^3 - 7x + c \Leftrightarrow f(x) = (3x^2 - 12)(x^3 - 7x + c), c \in \mathbb{R}.$$

$$f(0) = -48 \Leftrightarrow -12c = -48 \Leftrightarrow c = 4 \text{ άρα } f(x) = (3x^2 - 12)(x^3 - 7x + 4) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48, x \in (-2, 2).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στα $x = -2, x = 2$ είναι και συνεχής σε αυτά,

$$\text{άρα } f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48) = 0 \text{ και}$$

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48) = 0.$$

$$\text{Τελικά } f(x) = \begin{cases} 3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48, & x \in (-2, 2) \\ 0, & x = -2 \text{ ή } 2 \end{cases} \text{ ή}$$

$$f(x) = 3x^5 - 33x^3 + 12x^2 + 84x - 48, x \in [-2, 2].$$

ii. Από το σχήμα Horner προκύπτει: $f(x) = (x-2)(x+2)(3x^3 - 21x + 12)$

Έστω $g(x) = 3x^3 - 21x + 12, x \in [-2, 2]$. Είναι $g(-2) = 30 > 0, g(2) = -6 < 0$

δηλαδή $g(-2)g(2) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολωνυμική, υπάρχει

$$x_0 \in (-2, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } g(x_0) = 0. \text{ Τότε } f(x_0) = (x_0 - 2)(x_0 + 2)g(x_0) = 0$$

58.α) Έστω $AD = y$ cm. Κατασκευάζουμε τα ύψη AK και DL του τραpezίου.

$$\text{Είναι } \sin 60^\circ = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{BK}{x} \Leftrightarrow BK = \frac{x}{2}. \text{ Όμοια και } GL = \frac{x}{2}. \text{ Επειδή η}$$

περίμετρος του τραpezίου είναι 20cm, ισχύει ότι

$$AD + AB + BG + GL = 20 \Leftrightarrow AD + x + \left(\frac{x}{2} + AD + \frac{x}{2} \right) + x = 20 \Leftrightarrow$$

$$2\Delta\lambda + 3x = 20 \Leftrightarrow 2\Delta\lambda = 20 - 3x \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{20 - 3x}{2} \text{ cm}$$

β) Είναι $\eta\mu 60^\circ = \frac{AK}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AK}{x} \Leftrightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2} x \text{ cm}$. Το εμβαδόν του τραπέζιου είναι:

$$E(x) = \frac{(B\Gamma + \Delta\lambda) AK}{2} = \frac{\left(2\frac{20-3x}{2} + x\right) \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = \frac{(20-2x) \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} \Leftrightarrow$$

$$E(x) = \frac{2(10-x) \frac{\sqrt{3}}{2} x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (10x - x^2)$$

γ) **1ος τρόπος:** Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0,6)$ με

$$E'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} (10 - 2x). \quad E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} (10 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 10 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$$

Για κάθε $x \in (0,5)$ είναι $E'(x) > 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $(0,5]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (5,6)$ είναι

$E'(x) < 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $[5,6)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η E παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5 \text{ cm}$. Επειδή στις 12 το μεσημέρι η $\Delta\lambda$ είχε αρχικό μήκος 1 cm, και μέγιστο εμβαδό έχει το τραπέζιο όταν $x = 5$ μετέβαλε το μήκος της κατά 4 cm. Επειδή κάθε ώρα αυξάνει το μήκος της κατά 0,4 cm, θα χρειαστεί $t = \frac{4}{0,4} = \frac{4}{\frac{1}{10}} = 10$ ώρες για αυτή τη

μεταβολή, οπότε στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας το τραπέζιο θα έχει το μέγιστο εμβαδό.

2ος τρόπος: Επειδή το χανζάνεται με ρυθμό 0,4 cm/h, είναι

$$x'(t) = 0,4 \Leftrightarrow x(t) = 0,4t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Είναι $x(12) = 1 \Leftrightarrow 1 = 4,8 + c \Leftrightarrow c = -3,8$, οπότε $x(t) = 0,4t - 3,8$.

Επειδή $x(t) \in (0,6)$ είναι $0 < 0,4t - 3,8 < 6 \Leftrightarrow 9,5 < t < 24,5$. Όμως η $\Delta\lambda$ αρχίζει να αυξάνει στις 12 το μεσημέρι, οπότε $t \in [12, 24,5)$ Τότε

$$E(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} x(t)(10 - x(t)) = \frac{\sqrt{3}}{2} (0,4t - 3,8)(10 - 0,4t + 3,8) =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (0,4t - 3,8)(13,8 - 0,4t), \quad t \in [12, 24,5) \text{ Είναι}$$

$$E'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} [0,4(13,8 - 0,4t) - 0,4(0,4t - 3,8)] \Leftrightarrow$$

$$E'(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,4(13,8 - 0,4t - 0,4t + 3,8) \Leftrightarrow$$

$$E'(t) = 0,2 \cdot \sqrt{3}(17,6 - 0,8t). \text{ Είναι } E'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 17,6 - 0,8t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 22.$$

Όταν $t \in (12, 22)$ είναι $E'(t) > 0 \Rightarrow E \nearrow [12, 22]$ και για $t \in (22, 24,5)$ είναι $E'(t) < 0 \Rightarrow E \searrow [22, 24,5)$. Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t = 22$, δηλαδή στις 10 το βράδυ της ίδιας ημέρας.

δ) Αρκεί να υπάρξει μοναδικό $t_0 \in [12, 24,5)$ τέτοιο ώστε $E(t_0) = 8$

$$\text{Είναι } E(12) = \frac{9\sqrt{3}}{2}, E(22) = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ και } \lim_{t \rightarrow 24,5} E(t) = 12\sqrt{3}. \text{ Στο διάστημα}$$

$\Delta_1 = [12, 22]$ η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο

$$\text{σύνολο τιμών το } E(\Delta_1) = \left[\frac{9\sqrt{3}}{2}, \frac{25\sqrt{3}}{2} \right]. \text{ Στο διάστημα } \Delta_2 = (22, 24,5) \text{ η } E$$

είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$E(\Delta_2) = \left(12\sqrt{3}, \frac{25\sqrt{3}}{2} \right). \text{ Τώρα θα εξετάσουμε το 8 σε ποιο από τα}$$

$E(\Delta_1), E(\Delta_2)$ ανήκει. Για να ανήκει στο

$$E(\Delta_1) \text{ πρέπει } \frac{9\sqrt{3}}{2} \leq 8 \leq \frac{25\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{81 \cdot 3}{4} \leq 64 \leq \frac{625 \cdot 3}{4} \Leftrightarrow 243 \leq 256 \leq 1875$$

ισχύει. Για να ανήκει στο $E(\Delta_2)$ πρέπει

$$12\sqrt{3} \leq 8 \leq \frac{25\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 144 \cdot 3 \leq 64 \leq \frac{625 \cdot 3}{4} \text{ αδύνατο. Επειδή το 8 περιέχεται}$$

στο $E(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t_0 \in (12, 22)$ τέτοιο ώστε

$$E(t_0) = 8.$$

59.α) Θέτουμε $x-1=u$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι και $u \in \mathbb{R}$. Η σχέση

$$(x-1)f'(x-1) = 2(x-1)|x-1| \text{ γίνεται } uf'(u) = 2u|u|.$$

Αν $u > 0$, τότε $uf'(u) = 2u \cdot u \Leftrightarrow f'(u) = 2u \Leftrightarrow f(u) = u^2 + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$

Αν $u < 0$, τότε $uf'(u) = 2u \cdot (-u) \Leftrightarrow f'(u) = -2u \Leftrightarrow f(u) = -u^2 + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 1. \text{ Τελικά } f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ 1-x^2, & x < 0 \end{cases}$$

β) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = -2x > 0$ και για κάθε

$x > 0$ είναι $f'(x) = 2x > 0$, άρα για κάθε $x \neq 0$ είναι

$f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για $x < 0$ η f αποτελείται από το τμήμα της

παραβολής $y = 1 - x^2$ που βρίσκεται αριστερά του άξονα

$y = y$ και για $x > 0$ από το τμήμα της παραβολής $y = 1 + x^2$

που βρίσκεται δεξιά του άξονα $y = y$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για $x < 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x^2 = y \Leftrightarrow 1 - y = x^2$ (1)

Είναι $x < 0$ άρα $x^2 > 0 \Leftrightarrow 1 - y > 0 \Leftrightarrow y < 1$, τότε η (1) γίνεται:

$$-x = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow x = -\sqrt{1-y}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y}, y < 1$$

Για $x > 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1 + x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1$ (2)

Είναι $x > 0$ άρα $x^2 > 0 \Leftrightarrow y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 1$, τότε η (2) γίνεται:

$$x = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}, y > 1. \text{ Άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{1-y}, & y < 1 \\ 1, & y = 1, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = 1 \\ \sqrt{y-1}, & y > 1 \end{cases} \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x}, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

στ) Για $x > 0$ είναι $f(x) \geq 2 \ln x + 2 \Leftrightarrow 1 + x^2 \geq 2 \ln x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 \ln x - 1 \geq 0$

Έστω $h(x) = x^2 - 2 \ln x - 1, x > 0$. Είναι $h'(x) = 2 \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $h'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $h'(x) > 0$, επειδή

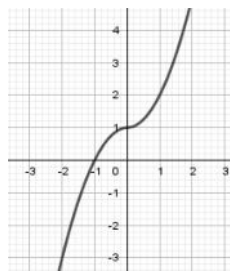
η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο

$[1, +\infty)$. Η h έχει ελάχιστο το $h(1) = 0$, άρα $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \ln x - 1 \geq 0$.

60.α) Έστω $g(x) = f(x) - x - 1, x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = f'(x) - 1 = e^{x^2} - 1.$$

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι



συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \leq 0$ είναι $g(x) \leq g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x + 1$ και για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > x + 1$

β) Είναι $f'(x) = e^{x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, οπότε η f αντιστρέφεται.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$, οπότε επειδή για κάθε $x \leq 0$ είναι $f(x) \leq x+1$, είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$, οπότε επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > x+1$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^{-1}(f(x)) = x$, οπότε

$$[f^{-1}(f(x))]' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$

Αντικαθιστούμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε:

$$(f^{-1})'(f(f^{-1}(x)))f'(f^{-1}(x)) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(f^{-1}(x)))e^{(f^{-1}(x))^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{(f^{-1}(x))^2}} = e^{-(f^{-1}(x))^2}$$

2ος τρόπος: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(f^{-1}(x)) = x$, οπότε

$$[f(f^{-1}(x))]' = (x)' \Leftrightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow e^{(f^{-1}(x))^2} \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{e^{(f^{-1}(x))^2}} = e^{-(f^{-1}(x))^2}.$$

δ) Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \alpha \leq f(\alpha) - f(\alpha) \leq e(\alpha - \alpha)$ ισχύει η ισότητα.

Αν $\alpha < \beta$ τότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[\alpha, \beta]$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{\xi^2} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$\text{Είναι } 0 < \xi < 1 \Leftrightarrow 0 < \xi^2 < 1 \Leftrightarrow 1 < e^{\xi^2} < e \Leftrightarrow 1 < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < e \Leftrightarrow$$

$$\beta - \alpha < f(\beta) - f(\alpha) < e(\beta - \alpha)$$

$$\epsilon) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)f(h) - f(1+h) - ef(h) + e}{h^4} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)(f(h)-1) - e(f(h)-1)}{h^4} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(h)-1)(f(1+h)-e)}{h^4} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h)-1}{h} \cdot \frac{f(1+h)-e}{h} \cdot \frac{1}{h^2} \right] = f'(0)f'(1)(+\infty) = 1 \cdot e(+\infty) = +\infty$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{3x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x e^{x^2}}{6x} \stackrel{x^2=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{3} = +\infty$$

$$f(x) = x^3 - 4x \Leftrightarrow f(x) - x^3 + 4x = 0$$

Έστω $h(x) = f(x) - x^3 + 4x$, $x \in [-1, +\infty)$.

Είναι $h(-1) = f(-1) + 1 - 4 = f(-1) - 3$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < x + 1$,

οπότε $f(-1) > -1 + 1 = 0 \Leftrightarrow f(-1) - 3 < -3 \Rightarrow h(-1) < 0$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^3 + 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(\frac{f(x)}{x^3} - 1 + \frac{4}{x^2} \right) \right] = +\infty, \text{ άρα}$$

υπάρχει $\kappa > 0$, όπου ο κ είναι πολύ μεγάλος αριθμός, τέτοιος ώστε $h(\kappa) > 0$.

Επειδή $h(-1)h(\kappa) < 0$ και η h είναι συνεχής στο $[-1, \kappa]$, σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 4x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

61.α) $f(x) = \sqrt{e^x - x - 1 + ax}$, $x \in \mathbb{R}$ και για να ορίζεται στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x - x - 1 + ax \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^x - x - 1 + ax$, $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι

$g(x) \geq g(0)$ άρα στο μηδέν παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη με

παράγωγο $g'(x) = e^x - 1 + a$, $x \in \mathbb{R}$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0. \text{ Άρα τελικά έχουμε } f(x) = \sqrt{e^x - x - 1}, x \in \mathbb{R}.$$

β) Ισχύει ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις συνεχών

και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $f'(x) = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x - 1}}$, $x \neq 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Απορρίπτεται και έχουμε

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ άρα}$$

προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

προσήμων:

Επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν

τότε έχουμε ότι παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-		+
$2\sqrt{e^x - x - 1}$	+		+
$f'(x)$	-		+
f	$\searrow$		$\nearrow$

γ) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και

$$\text{παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: } f''(x) = \frac{2e^x \sqrt{e^x - x - 1} - \frac{(e^x - 1)^2}{\sqrt{e^x - x - 1}}}{4(e^x - x - 1)} =$$

$$\frac{2e^x(e^x - x - 1) - (e^x - 1)^2}{4(e^x - x - 1)\sqrt{e^x - x - 1}}, x \neq 0 \text{ Ισχύει από β ερώτημα ότι}$$

$$4(e^x - x - 1)\sqrt{e^x - x - 1} > 0 \text{ για } x \neq 0.$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = 2e^x(e^x - x - 1) - (e^x - 1)^2 = e^{2x} - 2xe^x - 1, x \geq 0$

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$h'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2e^x(e^x - x - 1) > 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ άρα έχουμε ότι}$$

$h \nearrow$ στο $[0, +\infty)$, άρα για $x > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(0) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ άρα η $f' \nearrow$ στο $(0, +\infty)$.

$$\delta) f'((1+x)^v) > f'(1+vx) \Leftrightarrow (1+x)^v > 1+vx \Leftrightarrow (1+x)^v - vx - 1 > 0.$$

Έστω η συνάρτηση $k(x) = (1+x)^v - vx - 1, x \geq 0$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $k'(x) = v(1+x)^{v-1} - v = v[(1+x)^{v-1} - 1], x > 0$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow 1+x > 1 \Leftrightarrow (1+x)^{v-1} > 1 \Leftrightarrow (1+x)^{v-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow k'(x) > 0$$

άρα η k είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ άρα έχουμε

$$x > 0 \Leftrightarrow k(x) > k(0) = 0. \text{ Άρα } (1+x)^v - vx - 1 > 0 \text{ για } x > 0.$$

$$\epsilon) r(x) = (1+x)^v - 1 - vx - \frac{v(v-1)}{2}x^2, x \geq 0 \text{ η οποία είναι παραγωγίσιμη με}$$

$$r'(x) = v(1+x)^{v-1} - v - v(v-1)x = v[(1+x)^{v-1} - (v-1)x - 1], x > 0$$

και από γ ερώτημα έχουμε ότι $(1+x)^v - vx - 1 > 0$ για $x > 0, v \geq 2$ άρα για κάθε $v \geq 3 \Leftrightarrow v-1 \geq 2$ άρα βάζοντας στην σχέση όπου v το $v-1$ προκύπτει ότι $r'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα r είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε:

$$x > 0 \Leftrightarrow r(x) > r(0) = 0 \Leftrightarrow (1+x)^v > 1+vx + \frac{v(v-1)}{2}x^2$$

$$62.α) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Σε καθένα από τα διαστήματα $(0, +\infty)$ και $(-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sqrt{-x}) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x}) = 0 \text{ και } f(0) = 0$$

άρα η f είναι συνεχής και στο μηδέν άρα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και έχουμε:

$$\text{Για } x = -\xi \text{ είναι } y = 0 \Leftrightarrow \alpha \xi = \beta$$

$$\text{Για } x = \xi \text{ είναι } y = f(\xi) \Leftrightarrow \alpha \xi + \beta = f(\xi). \text{ Αν } \xi > 0 \text{ τότε: } \alpha \xi + \beta = \sqrt{\xi} \text{ άρα}$$

$$\begin{cases} \alpha \xi = \beta \\ \alpha \xi + \beta = \sqrt{\xi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \xi = \beta \\ 2\beta = \sqrt{\xi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \xi = \frac{\sqrt{\xi}}{2} \\ \beta = \frac{\sqrt{\xi}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{\xi}}{2\xi} \\ \beta = \frac{\sqrt{\xi}}{2} \end{cases}.$$

Δηλαδή τότε έχει εφαπτομένη την ευθεία:

$$y = \frac{\sqrt{\xi}}{2\xi}x + \frac{\sqrt{\xi}}{2} = \frac{\cancel{\xi}}{2\cancel{\xi}\sqrt{\xi}}x + \frac{\sqrt{\xi}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}x + \frac{\sqrt{\xi}}{2}. \text{ Για } x > 0 \text{ η } f \text{ είναι}$$

$$\text{παραγωγίσιμη με } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ και η εφαπτομένη στο } A \text{ είναι η}$$

$$(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - \sqrt{\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x - \xi) \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{\xi}}{2\xi}x - \frac{\xi\sqrt{\xi}}{2\xi} + \sqrt{\xi} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}x + \frac{\sqrt{\xi}}{2}$$

$$\gamma) g(x) = \begin{cases} x^{\frac{f(x)}{\ln(\eta\mu x)}}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \text{ . Για } x > 0 \text{ είναι}$$

$$g(x) = x^{\frac{f(x)}{\ln(\eta\mu x)}} = e^{\ln \left(x^{\frac{f(x)}{\ln(\eta\mu x)}} \right)} = e^{f(x) \frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(\eta\mu x)} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{DLH} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\eta\nu x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x\sigma\eta\nu x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι συνεχής και στο μηδέν και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0. \text{ Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f(x) \frac{\ln x}{\ln(\eta \mu x)} \right) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{f(x) \frac{\ln x}{\ln(\eta \mu x)}} \quad \begin{matrix} f(x) \frac{\ln x}{\ln(\eta \mu x)} = u \\ u \rightarrow 0 \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^u = e^0 = 1 = g(0)$$

Άρα η g είναι συνεχής στο μηδέν.

$$\delta) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases} \text{ Για } x < 0 \text{ η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο}$$

$$f'(x) = -\frac{-1}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-x}} > 0.$$

Για $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$

Επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν τότε $f \nearrow \mathbb{R}$.

ε) $f \nearrow \mathbb{R}$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και στο

$$(0, +\infty) \text{ και } f \nearrow \mathbb{R} \text{ άρα: } f((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (-\infty, 0)$$

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$\text{Για } x < 0 \text{ και } y < 0: y = f(x) \Leftrightarrow y = -\sqrt{-x} \Leftrightarrow -y = \sqrt{-x} \Leftrightarrow y^2 = -x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -y^2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -y^2, y < 0 \text{ άρα } f^{-1}(x) = -x^2, x < 0$$

$$\text{Για } x \geq 0 \text{ και } y \geq 0: y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^2, y \geq 0 \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(x) = x^2, x \geq 0. \text{ Τελικά } f^{-1}(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2 & , x \geq 0 \end{cases}.$$

στ) Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πολ/μική και στο $(0, +\infty)$ ως πολ/μική και είναι παραγωγίσιμη και στο μηδέν γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$\text{Έχουμε ότι: } (f^{-1})'(x) = \begin{cases} -2x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 2x & , x > 0 \end{cases}$$

Για $x < 0$ η εξίσωση εφαπτομένης στο $A(x_1, f^{-1}(x_1))$ είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f^{-1}(x_1) = (f^{-1})'(x_1)(x - x_1). \text{ Το } (0,0) \in \varepsilon_1 \text{ άρα έχουμε:}$$

$$-f^{-1}(x_1) = -(f^{-1})'(x_1)x_1 \Leftrightarrow x_1^2 = 2x_1^2 \Leftrightarrow 2x_1^2 - x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Απορρίπτεται επειδή $x < 0$ άρα σε αυτό το διάστημα δεν υπάρχει τέτοια εφαπτομένη.

Για $x > 0$ η εξίσωση εφαπτομένης στο $B(x_2, f^{-1}(x_2))$ είναι:

$$(\varepsilon_2): y - f^{-1}(x_2) = (f^{-1})'(x_2)(x - x_2)$$

$$\text{Το } (0,0) \in \varepsilon_2 \text{ άρα έχουμε: } -f^{-1}(x_2) = -(f^{-1})'(x_2)x_2 \Leftrightarrow -x_2^2 = 2x_2^2 \Leftrightarrow$$

$$x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0 \text{ Απορρίπτεται επειδή } x > 0 \text{ άρα σε αυτό το διάστημα δεν}$$

υπάρχει τέτοια εφαπτομένη. Για $x = 0$ έχουμε $f^{-1}(0) = 0$ και $(f^{-1})'(0) = 0$

$$\text{άρα έχουμε: } (\varepsilon_3): y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα μοναδική εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι ο άξονας $x'x$.

63.α) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \quad (1) \text{ για } x \in (\alpha, \beta).$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, $x \in [\alpha, \beta]$ άρα η εξίσωση (1) γίνεται:

$$g(x) = 0. \text{ Η συνάρτηση } g \text{ είναι συνεχής στο } [\alpha, \beta] \text{ ως πράξεις συνεχών}$$

συναρτήσεων. Γνωρίζουμε ότι το σημείο $M(\alpha, \beta)$ με $\alpha < \beta$ και $\alpha, \beta \in \Delta$,

ανήκει στην γραφική παράσταση της f , δηλαδή έχουμε ότι

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha. \text{ Επίσης ισχύει } f(x) = f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta \text{ άρα για}$$

$$x = \alpha \text{ έχουμε } f(\alpha) = f^{-1}(\alpha) = \beta \text{ και για } x = \beta \text{ έχουμε } f(\beta) = f^{-1}(\beta) = \alpha$$

Είναι $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = \beta - \alpha > 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \beta = \alpha - \beta < 0$ άρα

$$g(\alpha)g(\beta) < 0. \text{ Από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα}$$

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } g(x_0) = 0.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \subseteq \Delta$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $-x_1 > -x_2$ και $f(x_1) > f(x_2)$

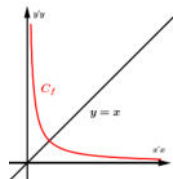
αφού f φθίνουσα στο Δ και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \searrow \Delta. \text{ Άρα το } x_0 \text{ είναι μοναδικό και η}$$

εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ έχει μοναδική ρίζα στο (α, β) .

β) 1^ο παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

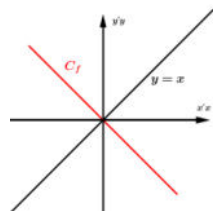
Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και



έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, x > 0$, δηλαδή $f = f^{-1}$. Η f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την $y = x$ το $M(1,1)$ και προφανώς ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις της άσκησης.

2^ο παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -x, x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και έχει αντίστροφη την $f^{-1}(x) = -x, x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f = f^{-1}$. Η f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την $y = x$ το $O(0,0)$ και προφανώς ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις της άσκησης.



$$\gamma) \frac{f(2x-2\gamma+\delta)}{x-\gamma} - \frac{f(\delta-x+\gamma)}{x-\delta} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x \neq \gamma \\ x \neq \delta \end{matrix}$$

$$\frac{f(2x-2\gamma+\delta)(x-\delta) - f(\delta-x+\gamma)(x-\gamma)}{(x-\gamma)(x-\delta)} = 0$$

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα στο (γ, δ) με $\gamma < \delta$ και $\gamma, \delta \in \Delta$ άρα υπάρχει $\kappa \in (\gamma, \delta)$ τέτοιο ώστε $f(\kappa) = 0$. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = f(2x-2\gamma+\delta)(x-\delta) - f(\delta-x+\gamma)(x-\gamma), x \in [\gamma, \delta].$$

Η g είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύει $g(\gamma) = f(\delta)(\gamma-\delta) > 0$ γιατί $\gamma < \delta \Leftrightarrow \gamma - \delta < 0$ και για

$$\gamma < \kappa < \delta \Rightarrow f(\kappa) > f(\delta) \Leftrightarrow f(\delta) < 0$$

Ισχύει $g(\delta) = -f(\gamma)(\delta-\gamma) < 0$ γιατί $\gamma < \delta \Leftrightarrow \delta - \gamma > 0$ και για

$$\gamma < \kappa < \delta \Rightarrow f(\gamma) > f(\kappa) \Leftrightarrow f(\gamma) > 0. \text{ Άρα } g(\delta)g(\gamma) < 0 \text{ και από το Θεώρημα}$$

Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\gamma, \delta)$ τέτοιο ώστε

$$g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(2\xi-2\gamma+\delta)(\xi-\delta) - f(\delta-\xi+\gamma)(\xi-\gamma) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \xi \neq \gamma \\ \xi \neq \delta \end{matrix}$$

$$\frac{f(2\xi-2\gamma+\delta)(\xi-\delta) - f(\delta-\xi+\gamma)(\xi-\gamma)}{(\xi-\gamma)(\xi-\delta)} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(2\xi-2\gamma+\delta)}{\xi-\gamma} - \frac{f(\delta-\xi+\gamma)}{\xi-\delta} = 0$$

δ) Έστω ότι η f' είναι περιττή τότε για κάθε $x \in \Delta$ το $-x \in \Delta$ και

$$f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = -f'(-x) \Leftrightarrow f'(x) = [f(-x)]' \stackrel{x \in \Delta}{\Leftrightarrow} f(x) = f(-x) + c$$

Για $x = 0$: $c = 0$ άρα $f(x) = f(-x)$ για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή η f είναι άρτια και δεν είναι 1-1, άρα δεν αντιστρέφεται άτοπο.

ε) Έστω $x, x_0 \in \Delta$.

$$\text{Av } x < x_0 \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

$$\text{Av } x > x_0 \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

στ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στα $[0, x]$ και $[x, 1]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x)$,

$$\xi_2 \in (x, 1) \text{ τέτοια ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x)}{x} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{-1 - f(x)}{1 - x}.$$

$$\text{Είναι } f'(\xi_1) \leq -1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \leq -1 \Leftrightarrow f(x) \leq x \quad (\alpha)$$

$$\text{Είναι } f'(\xi_2) \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-1 - f(x)}{1 - x} \leq -1 \Leftrightarrow -1 - f(x) \leq -1 + x \Leftrightarrow f(x) \geq -x \quad (\beta)$$

Από $(\alpha), (\beta)$ προκύπτει ότι $f(x) = -x$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Για $x = 0$: $f(0) = 0$ και για $x = 1$: $f(1) = -1$ άρα τελικά $f(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

$$\mathbf{64.a)} \quad e^{2f(x)} = e^{2x^3+2x+4} - 2e^{x^3+x+2} + 2e^{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$e^{2f(x)} - 2e^{f(x)} = e^{2x^3+2x+4} - 2e^{x^3+x+2} \Leftrightarrow$$

$$e^{2f(x)} - 2e^{f(x)} + 1 = e^{2x^3+2x+4} - 2e^{x^3+x+2} + 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} - 1\right)^2 = \left(e^{x^3+x+2} - 1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left|e^{f(x)} - 1\right| = \left|e^{x^3+x+2} - 1\right| \quad (1)$$

Έστω η συνάρτηση $v(x) = e^{f(x)} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$v(x) = 0 \Leftrightarrow |v(x)| = 0 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)} - 1\right| = 0 \Leftrightarrow \left|e^{x^3+x+2} - 1\right| = 0 \Leftrightarrow e^{x^3+x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x^3+x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{x^3+x+2} = e^0 \Leftrightarrow$$

$$x^3 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x+1=0 \Leftrightarrow x=-1) \text{ ή}$$

$(x^2 - x + 2 = 0 \text{ αδύνατη})$ Τώρα θα λύσουμε την ανίσωση:

$$e^{x^3+x+2} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x^3+x+2} > 1 \Leftrightarrow e^{x^3+x+2} > e^0 \Leftrightarrow x^3 + x + 2 > 0.$$

$x^3 + x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > -1$ γιατί το τριώνυμο $x^2 - x + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$ άρα δεν έχει ρίζες και επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι $1 > 0$ τότε $x^2 - x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x < -1$ είναι $v(x) \neq 0$ και επειδή η v είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό

πρόσημο στο $(-\infty, -1)$. Είναι $v(-2) = e^{f(-2)} - 1 = e^{-8} - 1 < 0$, άρα $v(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, οπότε:

$$\left| e^{f(x)} - 1 \right| = \left| e^{x^3+x+2} - 1 \right| \Leftrightarrow -e^{f(x)} + 1 = -e^{x^3+x+2} + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = e^{x^3+x+2} \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x + 2.$$

Για κάθε $x > -1$ είναι $v(x) \neq 0$ και επειδή η v είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό

πρόσημο στο $(-1, +\infty)$. Είναι $v(0) = e^{f(0)} - 1 = e^2 - 1 > 0$, άρα $v(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$, οπότε:

$$\left| e^{f(x)} - 1 \right| = \left| e^{x^3+x+2} - 1 \right| \Leftrightarrow e^{f(x)} + 1 = e^{x^3+x+2} - 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = e^{x^3+x+2} \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x + 2$$

Επειδή για $x = -1$ είναι $f(-1) = 0$ τελικά είναι

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases} = x^3 + x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται τρεις εφαπτόμενες παράλληλες μεταξύ τους στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και

$\Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Τότε θα είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle στην f

στα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ και προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και

$\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = 0$ και $f''(\xi_2) = 0$. Όμως $f''(x) = 6x$,

οπότε $f''(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = 0$ και $f''(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow \xi_2 = 0$, δηλαδή $\xi_1 = \xi_2$ που είναι άτοπο.

γ) Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ πρέπει $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ g(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$

Άρα είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 2, \quad x \neq 0.$

Έστω $h(x) = (f \circ g)(x) - 5 = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} + 2 - 5 = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} - 3$, $x > 0$. Για κάθε

$$x_1, x_2 > 0 \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x_1^3} > \frac{1}{x_2^3} \\ \frac{1}{x_1} - 5 > \frac{1}{x_2} - 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_1} - 5 > \frac{1}{x_2^3} + \frac{1}{x_2} - 5 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2). \text{ Άρα η } h \text{ είναι γνησίως φθίνουσα}$$

στο $(0, +\infty)$. Επίσης η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x} - 3 \right) = +\infty$ άρα υπάρχει $\alpha > 0$ πολύ κοντά στο

0 τέτοιο ώστε $f(\alpha) > 0$. Είναι επίσης $h(1) = 2 - 3 = -1 < 0$ άρα έχουμε ότι

$h(\alpha)h(1) < 0$ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (\alpha, 1) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο

ώστε $h(x_1) = 0$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ τότε το x_1 είναι μοναδικό.

δ) Για $0 < x < x_1 \xrightarrow{h \searrow} h(x) > h(x_1) = 0$ και για $x > x_1 \xrightarrow{h \searrow} h(x) < h(x_1) = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{(f \circ g)(x) - 5} = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{h(x)} = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{1}{(f \circ g)(x) - 5} = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{1}{h(x)} = -\infty. \text{ Άρα δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{1}{(f \circ g)(x) - 5}.$$

ε) Είναι $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = f(x(t)) = x^3(t) + x(t) + 2$ και

$$x'(t) = 1 \text{ cm/sec.}$$

Οι προβολή του M στον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $A(x(t), 0)$ και αντίστοιχα

στον $y'y$ το σημείο $B(0, y(t))$. Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι :

$$E(t) = (OA)(OB) = x(t)y(t) = x^4(t) + x^2(t) + 2x(t)$$

Είναι $E'(t) = 4x^3(t)x'(t) + 2x(t)x'(t) + 2x'(t) = 4x^3(t) + 2x(t) + 2$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο K τότε $x(t_0) = 1$ άρα:

$$E'(t_0) = 4x^3(t_0) + 2x(t_0) + 2 = 4 + 2 + 2 = 8 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

65.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 1 - \sin x$.

Για κάθε $x \neq 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = -\eta\mu x - 1 = -(\eta\mu x + 1) .$$

Για κάθε $x \neq 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0 = g(0)$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$ και $g(x) > g(0) = 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$ και $g(x) < g(0) = 0$ άρα $g(x) < f(x)$.

$$\beta) 2x + 1 = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \Leftrightarrow x - \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x - x - 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0$ γιατί για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < 0 < g(x)$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0 > g(x)$.

γ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f με $x_0 \in (\pi, 2\pi)$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία ε με εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - (x_0 - \eta\mu x_0) = (1 - \sigma\upsilon\nu x_0)(x - x_0)$$

Για να διέρχεται η ε από το σημείο A πρέπει:

$$1 - (x_0 - \eta\mu x_0) = (1 - \sigma\upsilon\nu x_0)(-x_0) \Leftrightarrow 1 - \cancel{x_0} + \eta\mu x_0 = -\cancel{x_0} + x_0 \sigma\upsilon\nu x_0 \Leftrightarrow 1 + \eta\mu x_0 - x_0 \sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

Έστω $h(x) = 1 + \eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [\pi, 2\pi]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(\pi, 2\pi)$

με $h'(x) = \cancel{\sigma\upsilon\nu x} - \cancel{\sigma\upsilon\nu x} + x\eta\mu x = x\eta\mu x$. Για κάθε $x \in (\pi, 2\pi)$ είναι

$\eta\mu x < 0 \Rightarrow h'(x) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\pi, 2\pi]$. Είναι $h(\pi) = 1 + \eta\mu\pi - \pi\sigma\upsilon\nu\pi = 1 + 0 - \pi(-1) = 1 + \pi > 0$,

$$h(2\pi) = 1 + \eta\mu 2\pi - 2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi = 1 + 0 - 2\pi = 1 - 2\pi < 0, \text{ δηλαδή } h(\pi)h(2\pi) < 0$$

και επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του Θ. Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$. Επειδή η h είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[\pi, 2\pi]$, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - x - 1}{x - \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - 1}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} - 1 \right) \frac{1}{1 - \frac{\eta\mu x}{x}} \right] = -1(+\infty) = -\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \text{ και } 1 - \frac{\eta\mu x}{x} = \frac{x - \eta\mu x}{x} = \frac{f(x)}{x} > 0$$

ε) Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$, $x \in (0, \pi-1)$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $f'(x) = 1 - \sin x$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow 1 - \sin \xi = x + 1 - \eta \mu(x+1) - x + \eta \mu x \Leftrightarrow$$

$$\sin \xi = \eta \mu(x+1) - \eta \mu x$$

$$\text{Είναι } x < \xi < x+1 \quad \overset{\sin x \nearrow [0, \pi]}{\Leftrightarrow} \quad \sin x > \sin \xi > \sin(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\sin(x+1) < \eta \mu(x+1) - \eta \mu x < \sin x$$

$$\sigma\tau) f(x) \leq \frac{1}{2}(\epsilon \phi x - x) \Leftrightarrow 2x - 2\eta \mu x \leq \epsilon \phi x - x \Leftrightarrow \epsilon \phi x + 2\eta \mu x - 3x \geq 0$$

Έστω $B(x) = 2\eta \mu x - 3x + \epsilon \phi x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η B είναι παραγωγίσιμη στο

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ με } B'(x) = 2\sin x - 3 + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2\sin^3 x - 3\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} \Leftrightarrow$$

$$B'(x) = \frac{(\sin x - 1)(2\sin^2 x - \sin x - 1)}{\sin^2 x} = \frac{(\sin x - 1)^2 (2\sin x + 1)}{\sin^2 x}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $B'(x) > 0$ και επειδή η B είναι συνεχής στο $x=0$,

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \stackrel{B'}{\Rightarrow} B(x) \geq B(0) \Leftrightarrow 2\eta \mu x - 3x + \epsilon \phi x \geq 0.$$

$$\zeta) k(x) = x - f(x) = x - x + \eta \mu x = \eta \mu x, \quad x \in [0, \pi].$$

i. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη $x_1, x_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε $k'(x_1) + k'(x_2) = 0$.

Είναι $k'(x) = \sin x$. Επειδή για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $k'(x) > 0$, ενώ για

$$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ είναι } k'(x) < 0. \text{ Αν } 0 < x_1 < \frac{\pi}{2} \text{ τότε } \frac{\pi}{2} < x_2 < \pi.$$

$$\text{Είναι } k'(x_2) = -k'(x_1) \Leftrightarrow \sin x_2 = -\sin x_1 = \sin(\pi - x_1) \Leftrightarrow x_2 = \pi - x_1$$

Άρα για κάθε $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οι εφαπτομένες της C_k στο $x = x_1$ και στο $x = \pi - x_1$ έχουν αντίθετες κλίσεις.

ii. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο x_1 με τον άξονα

$x'x$ και φ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο $x_2 = \pi - x_1$ με τον άξονα $x'x$.

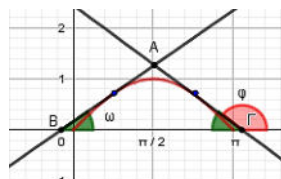
Είναι $k'(x_1) = \varepsilon\varphi$ και $k'(x_2) = \varepsilon\varphi$

Έστω ότι οι εφαπτομένες τέμνονται στο Α. Είναι

$$k'(x_2) = -k'(x_1) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi = -\varepsilon\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi(180^\circ - \varphi) \Leftrightarrow \widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B},$$

οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



η)

$$x-1 = 2x(g(x)+x) + 4f(x) \Leftrightarrow x-1 = 2x(\sin x - x' - 1 + x') + 4(x - \eta \mu x) \Leftrightarrow$$

$$x-1 = 2x\sin x - 2x + 4x - 4\eta \mu x \Leftrightarrow 4\eta \mu x - 2x\sin x - x - 1 = 0$$

Έστω $\varphi(x) = 4\eta \mu x - 2x\sin x - x - 1$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$$\varphi'(x) = 2\sin x + 2x\cos x - 1, \quad \varphi''(x) = 2\cos x.$$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι $\varphi''(x) < 0 \Rightarrow \varphi' \searrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και για κάθε

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi''(x) > 0 \Rightarrow \varphi' \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε η φ' παρουσιάζει ελάχιστο

στο 0. Δηλαδή για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\varphi'(x) \geq 1 > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Είναι } \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -5 + \frac{\pi}{2} < 0, \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 - \frac{\pi}{2} > 0 \text{ δηλαδή } \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

οπότε λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$\varphi(x_0) = 0 \text{ και αφού } \varphi \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ το } x_0 \text{ είναι μοναδικό.}$$

66.α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x) = \frac{1-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}, x > 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow 4x\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 1-4x\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 < \frac{1}{16} \Rightarrow 0 < x < \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} < 0 \Leftrightarrow 1-4x\sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 > \frac{1}{16} \Rightarrow x > \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι $f \nearrow \left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right]$ και $f \searrow \left[\sqrt[3]{\frac{1}{16}}, +\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ το

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right) = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{16}}} - \left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)^2 - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 1 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 1.$$

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} - 2 < 0$ για $x > 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

β) Επειδή η f έχει μέγιστο στο $x = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$, για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 1 < 0 \text{ αφού } \frac{3}{4} < 1 \text{ και } \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < 1.$$

γ) Η εξίσωση που δόθηκε είναι $\sqrt[4]{x} - x = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{x} - x - 1 = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} - 1 \Leftrightarrow$

$$f(\sqrt{x}) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} - 1 \quad (1)$$

Από ερώτημα Β2 ισχύει $f(x) < \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{4}} - 1$ για κάθε $x \neq \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ οπότε η (1) ισχύει

μόνον για $\sqrt{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \Leftrightarrow x = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)^2 = \frac{1}{4\sqrt[3]{4}}.$

δ) Η συνάρτηση f μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο μηδέν αφού είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και το μηδέν είναι άκρο αυτού. Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} - x^2 - 1) = -1 \text{ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.}$$

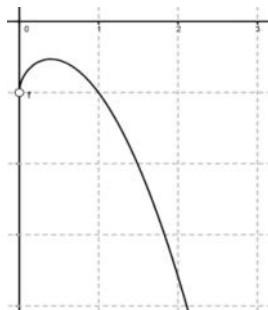
Επίσης έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} \right)}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2} - 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty(0 - 1 - 0) = -\infty$$

Άρα η f δεν έχει ούτε πλάγιες ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες. Επίσης ισχύει $f(1) = -1$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και έχουμε και τον παρακάτω

πίνακα μεταβολών. Επίσης και με βάση ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ μπορούμε να σχεδιάσουμε την f στο περίπου χωρίς ακριβέστατο προσδιορισμό της θέσεως του ακροτάτου αλλά σε σχέση με αυτά που μας ζητάει η εκφώνηση. Οπότε έχουμε:

x	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f''(x)$			-	-
f			↗	↘



ε) i) Έστω $M(x(t), y(t))$, όπου $y(t) = f(x(t))$

Απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με σταθερή ταχύτητα 1 m/sec άρα έχουμε ότι $x'(t) = 1$ για κάθε $t > 0$. Άρα ισχύει: $x'(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = t + c, t > 0, c \in \mathbb{R}$.

Για $t = 1$ διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$ άρα ισχύει $x(1) = 1$ άρα τελικά $c = 0$.

Άρα έχουμε $x(t) = t, t > 0$ και $y(t) = f(x(t)) = f(t)$. Επομένως η τεταγμένη y

παρουσιάζει μέγιστο όπου και η συνάρτηση f δηλαδή για $t = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ sec το M έχει μέγιστη τεταγμένη.

ii) Η απόσταση BM δίνεται από την συνάρτηση:

$$d(t) = \sqrt{(x(t)-1)^2 + (y(t)-1)^2} = \sqrt{(x(t)-1)^2 + (f(x(t))-1)^2}, t > 0$$

Η d είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με παράγωγο: } d'(t) = \frac{(x(t)-1)x'(t) + (f(x(t))-1)f'(x(t))x'(t)}{\sqrt{(x(t)-1)^2 + (f(x(t))-1)^2}}, t > 0$$

Για $t = 1$ sec έχουμε:

$$\begin{aligned} d'(1) &= \frac{(x(1)-1)x'(1) + (f(x(1))-1)f'(x(1))x'(1)}{\sqrt{(x(1)-1)^2 + (f(x(1))-1)^2}} = \frac{(1-1) \cdot 1 + (f(1)-1)f'(1) \cdot 1}{\sqrt{(1-1)^2 + (f(1)-1)^2}} \\ &= \frac{(-1-1)\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{(-1-1)^2}} = \frac{-2\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \text{ m/sec} \end{aligned}$$

Συνδυαστικά θέματα Δ μέχρι και τις παραγώγους

Επίπεδο Δ1

67.α) Έστω $g(x) = f(x) - x^3$, $x \geq 0$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 3x^2$,

$g''(x) = f''(x) - 6x > 0 \Rightarrow g' \nearrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0 \Rightarrow$

$g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow g' \nearrow [0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) > x^3$

Έστω $h(x) = f(x) - x^4$, $x \geq 0$. Είναι $h'(x) = f'(x) - 4x^3$ και

$h''(x) = f''(x) - 12x^2 < 0 \Rightarrow h' \searrow [0, +\infty)$

Για κάθε $x > 0 \Rightarrow h'(x) < h'(0) = 0 \Rightarrow h' \searrow [0, +\infty)$. Για κάθε

$x > 0 \Rightarrow h(x) < h(0) = 0 \Rightarrow f(x) < x^4$.

β) Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 3x^2$ για κάθε $x > 0$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$

είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ οπότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

γ) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$: $f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$. Είναι

$3\xi^2 < f'(\xi)$ και $3\xi^2 > 3x^2$ άρα $f'(\xi) > 3x^2 \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) > 3x^2$ και επειδή

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$, είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$

δ) Έστω $\varphi(x) = f(x) - 2 + e^x$, $x \geq 0$. Είναι $\varphi(0) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ και

$\varphi \nearrow [0, +\infty)$ (αποδεικνύεται εύκολα), άρα $\varphi([0, +\infty)) = [-1, +\infty)$. Επειδή

$0 \in [-1, +\infty)$ η $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

68.α) Είναι $f(x) = e^x - 1$ και $f'(x) = e^x$, $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ οπότε η

εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0 = 0$ είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ άρα $\varepsilon: y = x$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι η $y = x$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της

συνάρτησης $h(x) = -x^2 - x - 1$. Είναι $h'(x) = -2x - 1$. Αν υποθέσουμε ότι

$(x_1, h(x_1))$ είναι το σημείο επαφής πρέπει $h'(x_1) = \lambda_e \Leftrightarrow -2x_1 - 1 = 1 \Leftrightarrow$

$x_1 = -1$ και $h(-1) = -1$, $h'(-1) = 1$ οπότε η εφαπτομένη της C_h στο $x_1 = -1$

είναι $y - h(-1) = h'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y + 1 = x + 1 \Leftrightarrow y = x$.

β) Έστω $g(x) = f(x) - h(x) = e^x - 1 + x^2 + x + 1 = e^x + x^2 + x$.

Είναι $g'(x) = e^x + 2x + 1$ και $g''(x) = e^x + 2 > 0$ οπότε η g' είναι γνησίως

αύξουσα. $g'(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$, $g'(0) = e^0 + 1 = 2 > 0$. Οπότε

$g'(-1)g'(0) < 0$ και αφού η g' είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα θα υπάρχει μοναδικό $p \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $g'(p) = 0 \Leftrightarrow e^p + 2p + 1 = 0$ (1).

γ) Για $x < p$ είναι $g'(x) < g'(p) \Leftrightarrow g'(x) < 0$ οπότε $g \searrow$

ι. Για $x > p$ είναι $g'(x) > g'(p) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ οπότε $g \nearrow$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι $g(x) \geq g(p) \Leftrightarrow g(x) \geq e^p + p^2 + p$.

Όμως από (1) $e^p = -2p - 1$ οπότε $g(x) \geq -2p - 1 + p^2 + p \Leftrightarrow g(x) \geq p^2 - p - 1$.

ii. Για το πρόσημο της g' και την μονοτονία της g έχουμε το διπλανό πίνακα.

Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x + x^2 + x] = +\infty$

γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) = +\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2 + x) = +\infty$.

	$-\infty$	p	$+\infty$
g'	-	0	+
g	$\searrow$		$\nearrow$

Επίσης $p^2 - p - 1 < 1821 \Leftrightarrow p^2 - p < 1822$ γιατί

$p \in (-1, 0)$ και $-2 < p - 1 < -1$ οπότε $p(p - 1) < 2 \Leftrightarrow p^2 - p < 2 < 1822$. Η $g \searrow$

στο $(-\infty, p]$ με σύνολο τιμών $g(A_1) = [g(p), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)] = [p^2 - p - 1, +\infty)$ και

αφού $1821 \in g(A_1)$ τότε υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 1821$ στο $(-\infty, p)$. Επίσης η $g \nearrow$ στο $[p, +\infty)$ με σύνολο τιμών

$g(A_2) = [g(p), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)] = [p^2 - p - 1, +\infty)$ και αφού $1821 \in g(A_2)$ τότε η

εξίσωση $g(x) = 1821$ θα έχει άλλη μια ρίζα στο διάστημα $(p, +\infty)$. Άρα η

εξίσωση $g(x) = 1821$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $\mathbb{R}$.

69.α) Έχουμε $(f'(x))^2 - 2f'(x) + \frac{4}{x^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow$

$$(f'(x))^2 - 2f'(x) + 1 = 1 - \frac{4}{x^2 + 4} \Leftrightarrow (f'(x) - 1)^2 = \frac{x^2}{x^2 + 4}.$$

Έστω $h(x) = f'(x) - 1$ τότε είναι $h^2(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$. Για κάθε $x \neq 0$ είναι

$h^2(x) > 0$ και αφού η h είναι συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Είναι $h(-2) = f'(-2) - 1 < 0$ άρα

$$h(x) = -\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 4}} = -\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 4}} \stackrel{x < 0}{=} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \text{ και } h(2) = f'(2) - 1 > 0, \text{ άρα}$$

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}, x > 0. \text{ Δηλαδή } h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}, x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + 1, x \neq 0.$$

$$\text{Επίσης για } x=0 \quad h(0) = (f'(0) - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1, \text{ άρα } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\beta) \text{ Είναι } f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 4} \right)' \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4} + c. \text{ Για } x=0 \text{ είναι}$$

$$f(0) = 2 + c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Άρα } f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4}. \text{ Επίσης}$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0 \quad (1) \text{ άρα η } f \text{ είναι } \nearrow$$

$$\text{στο } \mathbb{R}. \text{ Επίσης } f''(x) = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \right)' = \frac{4}{(x^2 + 4)\sqrt{x^2 + 4}} > 0 \text{ οπότε η } f \text{ κυρτή}$$

στο $\mathbb{R}$.

δ) i. Είναι $g(x) = \ln f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0.$$

ii. Αφού $g'(x) > 0$ τότε η $g \nearrow$ οπότε για $x > 0$ είναι

$$g(x) > g(0) = \ln 2 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0. \text{ Θεωρούμε } \varphi(x) = xg(x) - f(x) + x + 2,$$

$$x > 0 \text{ είναι } \varphi'(x) = g(x) + xg'(x) - f'(x) + 1 =$$

$$g(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} - 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + 1 = g(x) > 0 \text{ οπότε η } \varphi \nearrow \text{ άρα για } x > 0 \text{ θα}$$

$$\text{είναι } \varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow xg(x) - f(x) + x + 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$xg(x) > f(x) - x - 2 \Leftrightarrow g(x) > \frac{f(x) - x - 2}{x}$$

70.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + 3x^2$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{είναι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ 1-1. } f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

$$\text{Για κάθε } x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) = 0 \Rightarrow xf(x) > 0 \text{ και για κάθε}$$

$$x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow xf(x) > 0. \text{ Άρα } xf(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $g(-1) = -3$, $g(0) = 1$, δηλαδή $g(-1)g(0) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως πολωνομική, σύμφωνα με το Θ.Bolzano, υπάρχει $\rho \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho) = 0$. Είναι $g'(x) = 3x^2 - 2x + 2 > 0$ ($\Delta < 0$) $\Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$ οπότε το ρ είναι η μοναδική ρίζα της $g(x) = 0$ στο διάστημα $(-1, 0)$ άρα $\alpha = -1$.

Είναι $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$, δηλαδή $g\left(-\frac{1}{2}\right)g(0) < 0$ οπότε σύμφωνα με το

Θ.Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Όμως το ρ είναι η μοναδική ρίζα της g στο $(-1, 0)$, άρα $\rho \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ επομένως βρίσκεται πλησιέστερα στο 0.

γ) Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = e^x + x^2 - 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$h'(x) = e^x + 2x - 2$ και $h''(x) = e^x + 2 > 0 \Rightarrow h' \nearrow \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ οπότε η h' έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει $x_1 : h'(x_1) = 0$. Επειδή $h'(0) = -1 < 0$, $h'(1) = e > 0$, λόγω του Θ.Bolzano, $x_1 \in (0, 1)$.

Για κάθε $x < x_1 \stackrel{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x) < h'(x_1) = 0 \Rightarrow h \searrow (-\infty, x_1]$ και για κάθε

$x > x_1 \stackrel{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(x_1) = 0 \Rightarrow h \nearrow [x_1, +\infty)$. Είναι

$h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{x_1} + 2x_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_1} = 2 - 2x_1$ (1).

$h(x_1) = e^{x_1} + x_1^2 - 2x_1 - 2 = 2 - 2x_1 + x_1^2 - 2x_1 - 2 = +x_1^2 - 4x_1 = x_1(x_1 - 4) < 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ γιατί

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ είναι $h(\Delta_1) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό

$\rho_1 \in \Delta_1$ άρα $\rho_1 < 0$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_1) = g(\rho_1)$. Στο $\Delta_2 = [0, x_1]$

είναι $h(\Delta_2) = [h(x_1), -1]$ οπότε η h δεν έχει ρίζα στο Δ_2 . Τέλος στο

$\Delta_3 = [x_1, +\infty)$ είναι $h(\Delta_3) = [h(x_1), +\infty)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό

$\rho_2 \in \Delta_3$ άρα $\rho_2 > 0$ τέτοιο, ώστε $h(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow f(\rho_2) = g(\rho_2)$.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.

δ) Έστω $\varphi(x) = e^x + \frac{x^4}{4} - x - 1, x \in \mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x) = e^x - x^3 - 1 = f(x)$, οπότε:

Για $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi \searrow (-\infty, 0]$ οπότε για $x \leq 0$ είναι $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ και για $x > 0$ είναι $f(x) > 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow [0, +\infty)$ άρα $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0$ και για κάθε $x \geq 0$.

Άρα $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{x^4}{4} - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{x^4}{4} \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος

$e^x + \frac{x^4}{4} \geq e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

ε) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^v x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\eta\mu^v x)}{\eta\mu^v x} \cdot \frac{\eta\mu^v x}{x^v} \right)$ (1). Θέτουμε $\eta\mu^v x = u$ με $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$,

τότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^v x)}{\eta\mu^v x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u + u^3 - 1}{u} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u + 3u^2}{1} = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^v x}{x^v} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^v = 1$, οπότε (1) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu^v x)}{x^v} = 1 \cdot 1 = 1$

στ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta + \beta^3 - \cancel{\alpha} - e^\alpha - \alpha^3 + \cancel{\alpha}}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta - \alpha} =$$

$$\frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \frac{(\cancel{\beta - \alpha})(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)}{\cancel{\beta - \alpha}} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2 \quad (2).$$

Έστω $a(x) = e^x, x \in [\alpha, \beta]$. Λόγω του Θ.Μ.Τ για την a υπάρχει $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο, ώστε $a'(\xi_2) = \frac{a(\beta) - a(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{\xi_2} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha}$ (3). Από τις (2), (3)

$$\Rightarrow f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2$$

71.α) Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[1, 5]$ τότε το ελάχιστο της f είναι το 1 και το μέγιστο της f είναι το 5 και $1 < f(0) < f(2) < 5$ οπότε τα ακρότατα δεν εμφανίζονται στα άκρα 0 και 2, άρα αφού η f είναι συνεχής υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = 1$ και $f(x_2) = 5$, οπότε από Θ. Fermat είναι $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

β) Αφού $f'(x_1) = f'(x_2)$ και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε από Θ.

Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

γ) Θεωρούμε την $g(x) = 2f(x) + f'(x) - x - 2$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $g(x_1) = 2f(x_1) + f'(x_1) - x_1 - 2 = 2 \cdot 1 + 0 - x_1 - 2 = -x_1 < 0$ αφού $x_1 \in (0, 2)$.

$g(x_2) = 2f(x_2) + f'(x_2) - x_2 - 2 = 2 \cdot 5 - x_2 - 2 = 8 - x_2 > 0$ αφού $x_2 \in (0, 2)$.

Οπότε $g(x_1) \cdot g(x_2) < 0$ άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) + f'(x_0) = x_0 + 2$.

δ) Θεωρούμε την $h(x) = xf'(x) + f(x) - 4$, η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και $h(x_1) = x_1 f'(x_1) + f(x_1) - 4 = 0 + 1 - 4 = -3 < 0$,

$h(x_2) = x_2 f'(x_2) + f(x_2) - 4 = 5 - 4 = 1 > 0$. Οπότε $h(x_1) \cdot h(x_2) < 0$ και από

Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_1, x_2) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$h(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho f'(\rho) = 4 - f(\rho).$$

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0, 1]$ και $[1, 2]$ οπότε

υπάρχουν $\xi_1 \in (0, 1)$ και $\xi_2 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - 2$

και $f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 4 - f(1)$ οπότε

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = f(1) - 2 + 4 - f(1) = 2.$$

72.α) Έστω ότι η f'' δεν είναι 1-1 τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, έστω $x_1 < x_2$ με $f''(x_1) = f''(x_2)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$ (άτοπο).

β) Αφού η f είναι 3 φορές παραγωγίσιμη, $f^{(3)}(x)$ είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αφού $f^{(3)}(3) > 0$ τότε $f^{(3)}(x) > 0$ άρα $f'' \nearrow$.

γ) Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) + f(6-x) = 5$ (1) έχουμε

$$f'(x) - f'(6-x) = 0 \text{ και } f''(x) + f''(6-x) = 0 \quad (2).$$

Στην (2) για $x = 3$ προκύπτει $f''(3) = 0$ οπότε για $x < 3$ θα είναι $f''(x) < f''(3) = 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$ οπότε f κοίλη στο $(-\infty, 3]$ ενώ για $x > 3$ είναι $f''(x) > f''(3) \Leftrightarrow f''(x) > 0$

άρα f κυρτή στο $[3, +\infty)$. Η f έχει Σ.Κ. για $x = 3$ το $(3, f(3)) \equiv \left(3, \frac{5}{2}\right)$ γιατί

για $x=3$ στην (1) είναι $2f(3)=5 \Leftrightarrow f(3)=\frac{5}{2}$.

δ) Αφού $f(3)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2f(3)=5$ τότε η εξίσωση $2f(x)=5$ έχει ρίζα τη $x=3$.

Για κάθε $x < 3 \Leftrightarrow f'(x) > f'(3) > 0$ και για κάθε $x > 3 \Leftrightarrow f'(x) > f'(3) > 0$ οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι $\nearrow$ οπότε η ρίζα $x=3$ είναι μοναδική.

ε) Η εξίσωση $2f(x+2)=f(x+1)+f(x+3)$ γίνεται

$$f(x+2)-f(x+1)=f(x+3)-f(x+2) \quad (3).$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα $[x+1, x+2]$ και $[x+2, x+3]$ οπότε

υπάρχουν $\xi_1 \in (x+1, x+2)$ και $\xi_2 \in (x+2, x+3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=f(x+2)-f(x+1), \quad f'(\xi_2)=f(x+3)-f(x+2). \text{ Άρα (3) προκύπτει}$$

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2) \text{ άτοπο αφού } \xi_1 \neq \xi_2 \text{ και } f' \nearrow \text{ στο } [3, +\infty).$$

73.α) i. Στη σχέση $f(x) \geq e^{2x}$ (1) θέτω όπου $x=0$ και προκύπτει

$f(0) \geq e^0 \Leftrightarrow f(0) \geq 1$ (3). Επίσης στη σχέση (2) $f(x) \cdot f(-x) = 1$ θέτουμε όπου $x=0$ και προκύπτει $f(0) \cdot f(0) = 1 \Rightarrow f^2(0) = 1$ (4). Από (3) και (4) προκύπτει $f(0) = 1$.

ii. Στην (1) θέτω όπου x το $-x$ και έχουμε

$$f(-x) \geq e^{-2x} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{e^{2x}} \Leftrightarrow f(x) \leq e^{2x} \quad (5).$$

Οπότε από (1) και (5) προκύπτει $f(x) = e^{2x}$.

β) i. Είναι $h(x) = \frac{e^{2x}}{x}$, $x > 0$ και $h'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}. \text{ Για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ είναι } h'(x) < 0 \text{ και για}$$

κάθε $x > \frac{1}{2}$ είναι $h'(x) > 0$, επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα

στο $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Η h έχει ελάχιστο το

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = 2e, \text{ άρα για κάθε } x > 0 \text{ θα είναι } h(x) \geq h\left(\frac{1}{2}\right) = 2e.$$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} e^{2x} \right) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{1} = +\infty \text{ οπότε και από τον πίνακα μονοτονίας}$$

της h προκύπτει ότι το σύνολο τιμών είναι $h(A) = [2e, +\infty)$.

iii. Είναι $\ln \alpha + \ln \beta + \ln \gamma = -2 \Leftrightarrow \ln(\alpha\beta\gamma) = -2 \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = e^{-2}$.

$$\text{Επίσης } h(\alpha) = \frac{e^{2\alpha}}{\alpha} \geq 2e, \quad h(\beta) = \frac{e^{2\beta}}{\beta} \geq 2e, \quad h(\gamma) = \frac{e^{2\gamma}}{\gamma} \geq 2e.$$

$$\text{Επομένως } h(\alpha)h(\beta) + h(\beta)h(\gamma) + h(\gamma)h(\alpha) \geq 12e^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{e^{2\beta}}{\beta} + \frac{e^{2\beta}}{\beta} \cdot \frac{e^{2\gamma}}{\gamma} + \frac{e^{2\gamma}}{\gamma} \cdot \frac{e^{2\alpha}}{\alpha} \geq 12e^2 \Leftrightarrow \frac{\gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)}}{\alpha\beta\gamma} \geq 12e^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)}}{e^{-2}} \geq 12e^2 \Leftrightarrow \gamma e^{2(\alpha+\beta)} + \alpha e^{2(\beta+\gamma)} + \beta e^{2(\gamma+\alpha)} \geq 12$$

74.α) Η $f(x) = (x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (3x^2 + 6x + 6)e^{-x} - e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) =$$

$$e^{-x}(3x^2 + 6x + 6 - x^3 - 3x^2 - 6x - 6) = -x^3 e^{-x}.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, 0]$ και για $x > 0$ είναι

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty). \text{ Η } f \text{ έχει μέγιστο το } f(0) = 6.$$

β) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = e^{-x}x^2(x-3)$.

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 3]$ και κυρτή

στο $[3, +\infty)$. Η f παρουσιάζει σημείο

καμπής στο σημείο $A\left(3, \frac{84}{e^3}\right)$.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
f''		-	-	+
f		$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{e^x} = -\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 6x + 6) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty. \text{ Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6 \left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 6x + 6 \left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 6 \left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0. \text{ Η } f$$

είναι $\nearrow$ στο $(-\infty, 0]$ οπότε έχει σύνολο τιμών

$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 6]$ και η f είναι $\searrow$ στο $[0, +\infty)$ οπότε έχει σύνολο τιμών $f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (0, 6]$ οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 6]$.

$$\delta) \text{ Είναι } f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow f(x) \leq 6 \Leftrightarrow \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{e^x} \leq 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 6}{6} \leq e^x \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 1.$$

ε) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$e^{h(x)} - h(x) \geq \frac{h^3(x)}{6} + \frac{h^2(x)}{2} + 1 \Leftrightarrow e^{h(x)} - h(x) - \frac{h^3(x)}{6} \geq \frac{h^2(x)}{2} + 1$$

οπότε $e^{h(x)} - h(x) - \frac{h^3(x)}{6} \geq \frac{h^2(x)}{2} + 1 \geq 1$ και σύμφωνα με το κριτήριο

$$\text{παρεμβολής θα είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{h^2(x)}{2} + 1 \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^2(x)}{2} = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} h^2(x) = 0$$

.Επειδή $-|h(x)| \leq h(x) \leq h(x) \Leftrightarrow -\sqrt{h^2(x)} \leq h(x) \leq \sqrt{h^2(x)}$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\sqrt{h^2(x)} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{h^2(x)} \text{ οπότε από κριτήριο παρεμβολής θα είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

75.α) Είναι $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $D_f = \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) =$

$$\ln \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \ln \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = -f(x)$$

οπότε η f είναι περιττή άρα η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

$$\gamma) f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} + x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \text{ άρα } f \nearrow \text{ στο } \mathbb{R}$$

και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

δ) Είναι $f''(x) = -\frac{x}{x^2+1}$. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $(0, f(0)) \equiv (0, 0)$.

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\ln 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2+1})}{\ln 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

$$\sigma\tau) f(5x) + 2x = f(3x) \Leftrightarrow f(5x) + 5x = f(3x) + 3x \quad (1).$$

Αν θεωρήσουμε $g(x) = f(x) + x$ τότε $g'(x) = f'(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 1 > 0$ άρα η g $\nearrow$ οπότε και 1-1. Συνεπώς η (1) γίνεται $g(5x) = g(3x) \Leftrightarrow 5x = 3x \Leftrightarrow x = 0$.

$$76.α) f^2(x) + 4x^2 = 4xf(x) + e^{-4x} \Leftrightarrow f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2 = e^{-4x} \Leftrightarrow$$

$(f(x) - 2x)^2 = e^{-4x}$. Επειδή $e^{-4x} > 0$ είναι $g(x) = f(x) - 2x \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $g(0) = f(0) = 1 > 0$ άρα

$$g(x) > 0 \text{ οπότε } g(x) = f(x) - 2x = \sqrt{e^{-4x}} \Leftrightarrow f(x) = 2x + e^{-2x} = 2x + e^{-2x}.$$

$$\beta) f'(x) = 2 - 2e^{-2x} = 2(1 - e^{-2x}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-2x} \leq e^0 \Leftrightarrow$$

$-2x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)$, άρα $f(x) \geq f(0) = 1$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$, άρα η $y = 2x$ είναι πλάγια

ασύμπτωτη, ενώ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2 + \frac{e^{-2x}}{x} \right] = +\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2e^{-2x}}{1} = -\infty \text{ οπότε δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη}$$

στο $-\infty$.

$$\delta) \text{ Η εξίσωση γίνεται } [f(x) - 1] + [f(x^2) - 1] + [f(x^3) - 1] + [f(x^4) - 1] = 0.$$

Επειδή $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί άθροισμα μη αρνητικών αριθμών το οποίο είναι ίσο με 0. Άρα πρέπει

$f(x)-1=0$, $f(x^2)-1=0$, $f(x^3)-1=0$ και $f(x^4)-1=0$. Όμως η f παίρνει ελάχιστη τιμή μόνο για $x=0$ άρα οι παραπάνω ισότητες ισχύουν αν και μόνο αν $(x=0 \text{ και } x^2=0 \text{ και } x^3=0 \text{ και } x^4=0) \Leftrightarrow x=0$.

ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow 2x + e^{-2x} \geq 1 \Leftrightarrow 2x + \frac{1}{e^{2x}} \geq 1 \Leftrightarrow$

$1 \geq e^{2x} - 2xe^{2x} \Leftrightarrow 1 \geq e^{2x}(1-2x)$ και το $=$ ισχύει μόνο όταν $x=0$. Άρα για

$$x = \frac{1}{10} \text{ έχουμε: } 1 > e^{\frac{1}{5}} \left(1 - \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow 1 > e^{\frac{1}{5}} \frac{4}{5} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{5}} < \frac{5}{4} .$$

στ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x+1$ και αντικαθιστώντας όπου x το x^2

προκύπτει: $e^{x^2} + x^2 \geq 1 \Leftrightarrow -1 \geq x^2 - e^{x^2} \Leftrightarrow 1 \geq x^2 - e^{x^2} + 2$, άρα

$$2x + e^{-2x} \geq 1 \geq x^2 + e^{x^2} + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

77.α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-3)\ln x + 2x - 5] = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x-3) = -3$ άρα η $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-3)\ln x + 2x - 5] = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x-3}{x} \cdot \ln x + \frac{2x-5}{x} \right] = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x} = 1 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-5}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty . \text{ Άρα η } C_f \text{ δεν έχει πλάγια ή οριζόντια}$$

ασύμπτωτη.

$$\beta) f'(x) = \ln x + (x-3)\frac{1}{x} + 2 = \ln x + 1 - \frac{3}{x} + 2 = \ln x + 3 - \frac{3}{x} \text{ με } f'(1) = 0 ,$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} > 0 \text{ για } x > 0 \text{ οπότε } f' \nearrow$$

• $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) = 0$ άρα $f \searrow$ στο $[0,1)$.

• Αν $x > 1$ τότε $f'(x) > f'(1) = 0$ άρα $f \nearrow$ στο $[1, +\infty)$.

Είναι $f(1) = -3 < 0$ οπότε η f έχει μια ρίζα $\rho_1 \in (0,1)$ αφού $f(A_1) = [-3, +\infty)$

και έχει μια ρίζα $\rho_2 \in (1, +\infty)$ αφού $f \nearrow$ στο $A_2 = [1, +\infty)$ και

$f(A_2) = [-3, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ) Έστω $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [\rho_1, \rho_2]$ Από το Rolle για τη g υπάρχει $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$:

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 . \text{ Έστω}$$

$\varphi(x) = xf'(x) - f(x)$ με $\varphi'(x) = f'(x) + xf''(x) = xf''(x) > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow$ στο $(0, +\infty)$ άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ και

για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \text{ που ισχύει.}$$

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) > h(x) \Leftrightarrow x \ln x - 3 \ln x + 2x - 3 > -x - 3 \ln x - 3 - e \Leftrightarrow$$

$$x \ln x + 3x + e > 0$$

Έστω $a(x) = x \ln x + 3x + e, x > 0$. Είναι $a'(x) = \ln x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-4}$.

Για κάθε $x \in (0, e^{-4})$ είναι $a'(x) < 0 \Rightarrow a \searrow (0, e^{-4}]$ και για κάθε $x > e^{-4}$ είναι

$a'(x) > 0 \Rightarrow a \nearrow [e^{-4}, +\infty)$. Η a έχει ελάχιστο το $a(e^{-4}) = -e^{-4} + e > 0$, άρα

$$a(x) \geq a(e^{-4}) > 0.$$

$$78. \alpha) (f(x)e^{f(x)})' = (x)' \Rightarrow f'(x)e^{f(x)} + f(x)f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)e^{f(x)}(1 + f(x)) = 1 \quad (1). \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x)e^{f(x)} = x > 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) > 0, \text{ άρα από την (1) προκύπτει ότι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty).$$

β) Αφού η f παραγωγίσιμη τότε και η $\frac{1}{e^{f(x)} + x}$ είναι παραγωγίσιμη άρα η f

είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = -\frac{1}{(e^{f(x)} + x)^2} (f'(x)e^{f(x)} + 1) < 0$ άρα

f κοίλη.

γ) Είναι $(1) \xrightarrow{x=0} f'(0) = 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι η

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Επειδή f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της, εκτός βέβαια από το σημείο επαφής, άρα: $f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$.

δ) Έστω $g(x) = f(x) - xf'(x), x \geq 0$. Είναι $g'(x) = -xf''(x) > 0 \Rightarrow$

$$g \nearrow [0, +\infty). \text{ Για κάθε } x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > xf'(x)$$

ε) Είναι $f \nearrow [0, +\infty) \Rightarrow 1 - 1$ και αντιστρέφεται.

Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \Leftrightarrow \lambda e^\lambda = +\infty$ που

είναι άτοπο. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ τότε επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως

αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$ θα είχε σύνολο τιμών το $f(A) = [0, -\infty)$ που είναι αδύνατο. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(A) = [0, +\infty) = D_{f^{-1}}$.

Θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε $ye^y = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = ye^y, y \geq 0$ άρα $f^{-1}(x) = xe^x, x \geq 0$.

στ) Είναι $f(e)e^{f(e)} = e \Leftrightarrow f^{-1}(f(e)) = f^{-1}(1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} f(e) = 1$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - 1}{x - e} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{f'(x)}{1} \stackrel{(1)}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{e^{f(x)}(1 + f(x))} = \frac{1}{e^{f(e)}(1 + f(e))} = \frac{1}{2e}$$

ζ) Είναι $f'(e) = \frac{1}{2e} < 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega < 1$ άρα $\omega < 45^\circ$.

79.α) $f'(x) = \sqrt{4 + f^2(x)} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x > 0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$ και για κάθε $x < 0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0$.

β) Είναι $f''(x) = \frac{2f(x)f'(x)}{\sqrt{4 + f^2(x)}} \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) = f'(x) + f(x) \Leftrightarrow$

$$e^x f''(x) + e^x f'(x) = e^x f'(x) + e^x f(x) \Leftrightarrow [e^x f'(x)]' = [e^x f(x)]' \Leftrightarrow$$

$$e^x f'(x) = e^x f(x) + c_1. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } f'(0) = \sqrt{4 + f^2(0)} = 0 \text{ οπότε}$$

$$e^0 f'(0) = e^0 f(0) + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 2. \text{ Είναι}$$

$$e^x f'(x) = e^x f(x) + 2 \Leftrightarrow f''(x) = f(x) + 2e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 2e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 2e^{-2x} \Leftrightarrow (e^{-x} f(x))' = (-e^{-2x})' \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = -e^{-2x} + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = -e^{-x} + ce^x. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = -1 + c \Leftrightarrow c = 1 \text{ και } f(x) = e^x - e^{-x}$$

γ) $e^{2(x+\sigma\upsilon\nu\chi)+e^{-x}} - e^{e^{-x}} = e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi+2e^{-x}} - e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi} \Leftrightarrow$

$$(e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi})^2 e^{e^{-x}} - e^{e^{-x}} = e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi} (e^{e^{-x}})^2 - e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi})^2 e^{e^{-x}} - e^{e^{-x}}}{e^{e^{-x}} e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi}} = \frac{e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi} (e^{e^{-x}})^2 - e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi}}{e^{e^{-x}} e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi}} \Leftrightarrow$$

$$e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi} - \frac{1}{e^{x+\sigma\upsilon\nu\chi}} = e^{e^{-x}} - \frac{1}{e^{e^{-x}}} \Leftrightarrow f(x + \sigma\upsilon\nu\chi) = f(e^{-x}) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x + \sigma\upsilon\nu\chi = e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$x + \sigma\upsilon\nu\chi - e^{-x} = 0 \text{ (1). Έστω } g(x) = x + \sigma\upsilon\nu\chi - e^{-x}, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$g'(x) = 1 - \eta \mu x + e^{-x} > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R} \quad (1) \Leftrightarrow g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0$$

$$\delta) e^{2x} = \lambda e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = \lambda + e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ οπότε $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

$$\epsilon) f(x) = e^{4x} + e^{3x} - 3e^{2x} - 2e^x + 3 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^{4x} + e^{3x} - 3e^{2x} - 2e^x + 3 \quad (2)$$

Θέτουμε $e^x = \omega$, $0 < x < \ln 2 \Leftrightarrow 1 < e^x < 2 \Leftrightarrow 1 < \omega < 2$ και η (2) γίνεται:

$$\omega - \frac{1}{\omega} = \omega^4 + \omega^3 - 3\omega^2 - 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 = \omega^5 + \omega^4 - 3\omega^3 - 2\omega^2 + 3\omega \Leftrightarrow$$

$$\omega^5 + \omega^4 - 3\omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega + 1 = 0. \text{ Έστω}$$

$$a(\omega) = \omega^5 + \omega^4 - 3\omega^3 - 3\omega^2 + 3\omega + 1 = (\omega - 1)(\omega^4 + 2\omega^3 - \omega^2 - 4\omega - 1)$$

Έστω $b(\omega) = \omega^4 + 2\omega^3 - \omega^2 - 4\omega - 1$, $\omega \in [1, 2]$. Είναι

$b(1) = -3 < 0$, $b(2) = 19 > 0$ δηλαδή $b(1)b(2) < 0$ οπότε λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $\omega_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $b(\omega_1) = 0$. Τότε $a(\omega_1) = (\omega_1 - 1)b(\omega_1) = 0$.

80.α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Leftrightarrow x^2 f(x) - \ln x = 0. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση}$$

$a(x) = x^2 f(x) - \ln x$, $x > 0$. Η a είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $a'(x) = 2xf'(x) + x^2 f''(x) - \frac{1}{x}$. Η a' είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$a''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) + \frac{1}{x^2} =$$

$$2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x) + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$a''(x) = \frac{2x^2 f(x) + 4x^3 f'(x) + x^4 f''(x) + 1}{x^2} = \frac{-1+1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow a'(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

Είναι $a'(1) = 2f(1) + f'(1) - 1 = 0$ άρα $c = 0$ και $a'(x) = 0 \Leftrightarrow a(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Είναι $a(1) = f(1) - \ln 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$ άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι

$$x^2 f(x) - \ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\beta) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Για κάθε $x < \sqrt{e}$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, \sqrt{e}]$ και για κάθε $x > \sqrt{e}$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [\sqrt{e}, +\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$, οπότε για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq \frac{1}{2e} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{1}{2e} \Leftrightarrow 2e \ln x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln x^{2e} \leq x^2 \Leftrightarrow x^{2e} \leq e^{x^2}$$

$$\gamma) x^{2e} \leq e^{x^2} \Leftrightarrow \ln x^{2e} \leq \ln e^{x^2} \Leftrightarrow 2e \ln x \leq x^2 \ln e \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{\ln e}{2e} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\ln e}{2e}$$

Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq \frac{1}{2e}$, αρκεί $\frac{1}{2e} \leq \frac{\ln \lambda}{2e} \Leftrightarrow \ln \lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq e$

δ) Είναι $g(x) \geq 0$ και επειδή $g(1) = 0$, τελικά για κάθε $x > 0$ είναι

$g(x) \geq g(1)$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το Θ. Fermat, είναι $g'(1) = 0$

$$\epsilon) \text{ Είναι } g(x) = \left| \alpha x - \alpha - x^3 f(x) \right| = \left| \alpha x - \alpha - x^3 \frac{\ln x}{x^2} \right| = \left| \alpha x - \alpha - x \ln x \right| \text{ και}$$

$$g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{x-1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|\alpha x - \alpha - x \ln x|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|\alpha x - \alpha - x \ln x|}{|x-1|} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|\alpha x - \alpha - x \ln x|}{x-1} = |\alpha - 1|$$

$$\text{άρα } \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\alpha x - \alpha - x \ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\alpha - \ln x - 1}{1} = \alpha - 1.$$

στ) Είναι $g(x) = |x - 1 - x \ln x|$, $x > 0$.

Έστω $b(x) = x - 1 - x \ln x$, $x > 0$. Είναι $b'(x) = 1 - 1 - \ln x = -\ln x$.

Αν $0 < x < 1$ είναι $b'(x) > 0 \Rightarrow b \nearrow (0, 1]$ και αν $x > 1$ είναι

$b'(x) < 0 \Rightarrow b \searrow [1, +\infty)$. Η b έχει μέγιστο το $b(1) = 0$ άρα

$$b(x) \leq 0 \Leftrightarrow x - 1 - x \ln x \leq 0 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ οπότε } g(x) = x \ln x - x + 1$$

$$\zeta) x^4 f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 \frac{\ln x}{x^2} = x \ln x - x + 1 \Leftrightarrow x^2 \ln x - x \ln x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x \ln x (x - 1) + (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x \ln x + 1 = 0$$

Έστω $h(x) = x \ln x + 1$, $x > 0$. Είναι $h'(x) = \ln x + 1$.

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Για κάθε $0 < x < \frac{1}{e}$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow \left(0, \frac{1}{e}\right]$ και για κάθε $x > \frac{1}{e}$ είναι

$$h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right). \text{ Η } h \text{ έχει ελάχιστο το } h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + 1 = -\frac{1}{e} + 1 > 0,$$

άρα για κάθε $x > 0$ είναι $h(x) \geq h\left(\frac{1}{e}\right) > 0$, οπότε η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x + 1 = 0 \text{ είναι αδύνατη.}$$

81.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f(x) + xf'(x) - \sin x$. Η g' είναι και αυτή

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g''(x) = f'(x) + f'(x) + xf''(x) + \eta\mu x = 2f'(x) + xf''(x) + \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = -\eta\mu x + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow g'(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$g'(\pi) = f(\pi) + \pi f'(\pi) - \sin \pi = \pi \left(-\frac{1}{\pi}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $g(\pi) = \pi f(\pi) - \eta\mu \pi = 0$ άρα $c_1 = 0$ και

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow xf(x) = \eta\mu x. \text{ Για } x \neq 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1. \text{ Τελικά } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

γ) Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = 0,$$

οπότε το $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

δ) Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{x \cos x - \eta\mu x}{x^2}$. Έστω

$$h(x) = x \cos x - \eta\mu x, x \in [-\pi, \pi] \text{ με } h'(x) = -x \eta\mu x.$$

Αν $x \in (-\pi, 0)$ τότε $x < 0$, $\eta\mu x < 0$ άρα $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [-\pi, 0]$.

Αν $x \in (0, \pi)$ τότε $x > 0$, $\eta\mu x > 0$ άρα $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [-\pi, 0]$. Επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$. Για κάθε $-\pi < x < \pi$ είναι $h(\pi) < h(x) < h(-\pi) \Leftrightarrow -\pi < h(x) < 0$ άρα $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi, \pi]$.

$$\epsilon) f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \sin x - \eta\mu x}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \eta\mu x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sin x} - \cancel{x} \eta\mu x - \cancel{\sin x}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = -\frac{1}{3}$$

στ) Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) > 1 - \frac{x^2}{6} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{x^3}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{6} > 0$$

Θεωρούμε την $a(x) = \eta\mu x - x + \frac{x^3}{6}$, $x \geq 0$, η οποία είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, με $a'(x) = \sin x - 1 + \frac{x^2}{2}$ και $a''(x) = -\eta\mu x + x > 0$

για κάθε $x > 0$ ($\eta\mu x < x$ για κάθε $x > 0$), άρα η a' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $a'(x) > a'(0) = 0$, άρα η g είναι γνησίως

αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για $x > 0$ είναι $a(x) > a(0) \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{6} > 0 \Leftrightarrow$

$$\eta\mu x > x - \frac{x^3}{6}.$$

ζ) Αρχικά παρατηρούμε ότι η $x = 0$ δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, οπότε για

$$x \neq 0 \text{ είναι: } x^2 = x^2 f(x) + \sin x \Leftrightarrow x^2 - x^2 \frac{\eta\mu x}{x} - \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - x\eta\mu x - \sin x = 0. \text{ Έστω } b(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sin x, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$b'(x) = 2x - x \cos x = x(2 - \cos x). \text{ Επειδή } 2 - \cos x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

έχουμε: Για κάθε $x < 0$ είναι $b'(x) < 0 \Rightarrow b \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$b'(x) > 0 \Rightarrow b \nearrow [0, +\infty). \text{ Είναι } b(0) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) \right] = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) \right] = +\infty \text{ αφού } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\text{είναι και } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0. \text{ Όμοια } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ είναι $b(\Delta_1) = (-1, +\infty)$ και στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$ είναι $b(\Delta_2) = (-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in b(\Delta_1)$, άρα υπάρχει μοναδικός $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιος, ώστε $b(x_1) = 0$. Επειδή $0 \in b(\Delta_2)$, άρα υπάρχει μοναδικός $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιος, ώστε $b(x_2) = 0$. Άρα η εξίσωση $x^2 = x^2 f(x) + \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

82.α) Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) - e^x = 0$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x^2 + 1)f(x) - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$g'(x) = 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) - e^x \text{ και}$$

$$g''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x) + (x^2 + 1)f''(x) - e^x \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = 2f(x) + 4xf'(x) + (x^2 + 1)f''(x) - e^x = e^x - e^x = 0 \Leftrightarrow g'(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

Είναι $g'(0) = 2 \cdot 0 \cdot f(0) + (0^2 + 1)f'(0) - e^0 = 0 \Leftrightarrow c = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Είναι $g(0) = f(0) - 1 = 0$ άρα $c_1 = 0$ και

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) - e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x^2 + 1 - 2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}.$

Για κάθε $x \neq 1$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει ακρότατα. Για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq x^2 + 1 \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x = 0.$$

γ) Έστω $h(x) = e^{x^2} - \frac{1}{3}x^6 - x^2 - 1$, $x \geq 0$. Είναι $h'(x) = 2x(e^{x^2} - x^4 - 1)$

Για κάθε $x > 0$ είναι $e^{x^2} > x^2 + 1$ οπότε αντικαθιστώντας όπου x το x^2 προκύπτει ότι $e^{x^2} > x^4 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2} - x^4 - 1 > 0$ άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^{x^2} - \frac{1}{3}x^6 - x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$e^{x^2} \geq \frac{1}{3}x^6 + x^2 + 1.$$

$$\delta) \text{ Είναι } f''(x) = \frac{\left[e^x (x-1)^2 \right]' (x^2+1)^2 - e^x (x-1)^2 2(x^2+1) 2x}{(x^2+1)^4} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{\left[e^x (x-1)^2 + e^x 2(x-1) \right] (x^2+1) - e^x (x-1)^2 4x}{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{e^x (x-1)(x-1+2)(x^2+1) - e^x (x-1)^2 4x}{(x^2+1)^3} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{e^x (x-1) \left[(x+1)(x^2+1) - 4x(x-1) \right]}{(x^2+1)^3} = \frac{e^x (x-1)(x^3 - 3x^2 + 5x + 1)}{(x^2+1)^3}$$

Έστω $a(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$, $a \in \mathbb{R}$. Είναι $a'(x) = 3x^2 - 6x + 5 > 0 \Rightarrow a \nearrow \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 5x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 5x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ η a έχει σύνολο τιμών το

$a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in a(\mathbb{R})$ υπάρχει μοναδικό x_1 τέτοιο, ώστε $a(x_1) = 0$.

Για κάθε $x < x_1 \xrightarrow{a \nearrow} a(x) < a(x_1) = 0$ και για κάθε $x > x_1 \xrightarrow{a \nearrow} a(x) > a(x_1) = 0$.

Επειδή $a(0) = 1$ και $a(-1) = -8 < 0$, λόγω του Θ. Bolzano η εξίσωση

$a(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 0)$. Όμως το x_1 είναι η

μοναδική ρίζα της a , άρα

$x_1 \in (-1, 0)$.

Από τον πίνακα

μεταβολών προκύπτει
ότι η f έχει ακριβώς δύο
σημεία καμπής.

ε)

x	$-\infty$	x_1	1	$+\infty$
e^x	+	+	+	
$x-1$	-	-	0	+
$a(x)$	-	0	+	+
$(x^2+1)^3$	+	+	+	+
f''	+	-	+	+
f	$\cup \quad \Sigma. \text{K.} \quad \cap \quad \Sigma. \text{K.} \quad \cup$			

$$\sqrt{3} > \sqrt{2} \xrightarrow{f \nearrow} f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{3+1} > \frac{e^{\sqrt{2}}}{2+1} \Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{2}}} > \frac{4}{3} \Leftrightarrow e^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > \frac{4}{3}$$

$$\sigma\tau) 4x^2 + 4x + 2 = e^x (x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 1 = e^x [(x+1)^2 + 1] \Leftrightarrow$$

$$(2x+1)^2 + 1 = e^{2x+1-(x+1)} \left[(x+1)^2 + 1 \right] \Leftrightarrow (2x+1)^2 + 1 = \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}} \left[(x+1)^2 + 1 \right] \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{x+1}}{(x+1)^2 + 1} = \frac{e^{2x+1}}{(2x+1)^2 + 1} \Leftrightarrow f(x+1) = f(2x+1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x+1 = 2x+1 \Leftrightarrow x=0$$

83.α) Έστω τυχαίο σημείο $A(\alpha, -1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ της ευθείας $y = -1$. Θα αποδείξουμε ότι οι εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το A είναι κάθετες.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Για να διέρχεται από το A πρέπει:

$$-1 - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0) \Leftrightarrow -1 - \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{1}{2}x_0(\alpha - x_0) \Leftrightarrow$$

$$-4 - x_0^2 = 2\alpha x_0 - 2x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - 2\alpha x_0 - 4 = 0 \quad (1)$$

Η (1) είναι 2^{ov} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 4\alpha^2 + 16 > 0$, οπότε έχει δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 που από τους τύπους του Vieta ισχύει ότι $\rho_1 + \rho_2 = 2\alpha$ και $\rho_1\rho_2 = -4$.

Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της C_f στα

$$\rho_1, \rho_2, \text{ τότε } \lambda_1 = f'(\rho_1) = \frac{1}{2}\rho_1 \text{ και } \lambda_2 = f'(\rho_2) = \frac{1}{2}\rho_2. \text{ Είναι}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{2}\rho_1 \cdot \frac{1}{2}\rho_2 = \frac{1}{4}\rho_1\rho_2 = \frac{1}{4}(-4) = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2.$$

$$\beta) f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}(e^x - x - 1) \Leftrightarrow x^2 = 2e^x - 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$2e^x - x^2 - 2x - 2 = 0. \text{ Έστω } h(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$h'(x) = 2e^x - 2x - 2, h''(x) = 2e^x - 2$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $h''(x) < 0$ και επειδή η h' είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ είναι

γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x < 0$ είναι $h'(x) < h'(0) = 0$

και επειδή η h είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $h''(x) > 0$ και επειδή η h' είναι συνεχής στο

$[0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι

$h'(x) > h'(0) = 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ είναι γνησίως

αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η h έχει ελάχιστο στο $x = 0$ το $h(0) = 0$, οπότε

για κάθε $x \neq 0$ είναι $h(x) > 0$. Επομένως η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$. Είναι $h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = g'(0)$, οπότε οι

γραφικές παραστάσεις των f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο $x = 0$.

$$\gamma) g(x) \geq \frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^x - x - 1) \geq \frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$e^x - x - 1 \geq \lambda x - x - 1 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση}$$

$$\varphi(x) = e^x - \lambda x, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } \varphi'(x) = (e^x - \lambda x)' = e^x - \lambda.$$

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \lambda \Leftrightarrow x \geq \ln \lambda.$$

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln \lambda]$,

γνησίως αύξουσα στο $[\ln \lambda, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $\ln \lambda$ το

$$\varphi(\ln \lambda) = \lambda - \lambda \ln \lambda.$$

$$e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0. \text{ Όμως } \varphi(x) \geq \varphi(\ln \lambda), \text{ οπότε αρκεί}$$

$$\varphi(\ln \lambda) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda \ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \ln \lambda \leq \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 1 = \ln e \Leftrightarrow \lambda \leq e.$$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$ είναι η $\lambda = e$.

$$\delta) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{1}{2}x, f''(x) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f' 1-1, \text{ οπότε για κάθε}$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ είναι } f'(x_1) \neq f'(x_2).$$

$$84. \alpha) e^{f(x)} (e^{f(x)} + 2\eta\mu x) + 1 = e^{2x} + \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})^2 + 2\eta\mu x e^{f(x)} + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})^2 + 2\eta\mu x e^{f(x)} + \eta\mu^2 x = e^{2x} \Leftrightarrow (e^{f(x)} + \eta\mu x)^2 = (e^x)^2 \quad (1).$$

Είναι $(e^x)^2 > 0$ άρα $h(x) = e^{f(x)} + \eta\mu x \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής,

διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $h(\pi) = e^{f(\pi)} + \eta\mu\pi = e^\pi > 0$, είναι $h(x) > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται: $e^{f(x)} + \eta\mu x = e^x \Leftrightarrow e^{f(x)} = e^x - \eta\mu x$ (2).

Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > x + 1 > x$ και $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$, άρα

$$e^x > x > \eta\mu x \Rightarrow e^x - \eta\mu x > 0 \text{ οπότε η (2) γίνεται } f(x) = \ln(e^x - \eta\mu x).$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x}.$$

Επειδή $e^x > x + 1$ για κάθε $x > 0$, θα δείξουμε ότι $x + 1 > \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε

$x > 0$. Έστω $g(x) = x + 1 - \sigma\upsilon\nu x, x \geq 0$. Είναι $g'(x) = 1 + \eta\mu x > 0$ για κάθε

$x \neq 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ με $\kappa \geq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως

αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow x + 1 > \sin x$,
 οπότε $e^x > x + 1 > \sin x$ για κάθε $x > 0$. Οπότε $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$.

$$\gamma) f''(x) = \frac{(e^x + \eta \mu x)(e^x - \eta \mu x) - (e^x - \sin x)^2}{(e^x - \eta \mu x)^2} =$$

$$\frac{e^{2x} - \eta \mu^2 x - e^{2x} + 2e^x \sin x - \sin^2 x}{(e^x - \eta \mu x)^2} = \frac{2e^x \sin x - 1}{(e^x - \eta \mu x)^2}$$

Έστω $\varphi(x) = 2e^x \sin x - 1$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Είναι

$$\varphi'(x) = 2e^x \sin x - 2e^x \eta \mu x = 2e^x (\sin x - \eta \mu x) < 0$$

(στο 2ο τεταρτημόριο είναι $\sin x < 0$, $\eta \mu x > 0$) άρα $\varphi \searrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Για κάθε $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ είναι $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > \varphi(x) > \varphi(\pi) \Rightarrow -1 > \varphi(x)$ άρα

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f \cap \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

$$\delta) e^x - e^\lambda = \eta \mu x \Leftrightarrow e^x - \eta \mu x = e^\lambda \Leftrightarrow \ln(e^x - \eta \mu x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \eta \mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{\eta \mu x}{e^x} \right) \right] = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\left| \frac{\eta \mu x}{e^x} \right| = \frac{|\eta \mu x|}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x} \leq \frac{\eta \mu x}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \text{ και επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{e^x} = 0$. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - \eta \mu x) \stackrel{e^x - \eta \mu x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (0, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$. Αν $\lambda \leq 0$ τότε

$\lambda \notin f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη. Αν $\lambda > 0$ τότε $\lambda \in f(A)$

οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \lambda$.

ε) Επειδή f συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, η f δεν έχει κατακόρυφη

ασύμπτωτη. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - \eta \mu x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \eta \mu x}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \eta \mu x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \eta \mu x}{1} = 1$$

γιατί $\left| \frac{\eta \mu x}{e^x} \right| = \frac{|\eta \mu x|}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow -\frac{1}{e^x} \leq \frac{\eta \mu x}{e^x} \leq \frac{1}{e^x}$ και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{e^x} = 0.$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x - \eta \mu x) - \ln e^x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - \eta \mu x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{\eta \mu x}{e^x} \right) = 0, \text{ άρα η ευθεία } y = x \text{ είναι πλάγια}$$

ασύμπτωτη της C_f .

στ) $f(x) > \ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \eta \mu x \right) \Leftrightarrow \ln(e^x - \eta \mu x) > \ln \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 - \eta \mu x \right) \Leftrightarrow$

$$e^x - \eta \mu x > \frac{x^2}{2} + x + 1 - \eta \mu x \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 > 0. \text{ Έστω}$$

$$a(x) = e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x, \quad x \in [0, +\infty).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $a'(x) = e^x - x - 1$ και $a''(x) = e^x - 1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $a''(x) > 0$, άρα η a' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $a'(x) > a'(0) = 0$, άρα η a είναι γνησίως αύξουσα στο

$$[0, +\infty). \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } a(x) > a(0) = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 > 0$$

85.α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με $g'(x) = e^{f(x)} + x f'(x) e^{f(x)} - \frac{1}{x} = e^{f(x)} \left(1 + x f'(x) \right) - \frac{1}{x}$. Η g'

είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g''(x) = e^{f(x)} f'(x) (1 + x f'(x)) + e^{f(x)} (f'(x) + x f''(x)) + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = e^{f(x)} \left(f'(x) + x (f'(x))^2 + f'(x) + x f''(x) \right) + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = e^{f(x)} \left(2f'(x) + x (f'(x))^2 + x f''(x) \right) + \frac{1}{x^2} = e^{f(x)} \left(-\frac{e^{-f(x)}}{x^2} \right) + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow g'(x) = c, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } g'(e) = e^{f(e)}(1 + ef'(e)) - \frac{1}{e} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{Είναι}$$

$$g(e) = ee^{f(e)} - \ln e = e \frac{1}{e} - 1 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ για κάθε } x > 1.$$

$$\beta) g(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{f(x)} - \ln x = 0 \Leftrightarrow xe^{f(x)} = \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right) \Leftrightarrow f(x) = \ln(\ln x) - \ln x. \text{ Για κάθε } x > 1 \text{ είναι}$$

$$0 < \ln x < x - 1 < x \Rightarrow \ln(\ln x) < \ln x \Leftrightarrow \ln(\ln x) - \ln x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x > 1$ η εξίσωση

$$f(x) = -x \Leftrightarrow \ln(\ln x) - \ln x + x = 0 \text{ έχει ακριβώς μια ρίζα. Θεωρούμε τη}$$

συνάρτηση $h(x) = \ln(\ln x) - \ln x + x, x > 1.$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων με } h'(x) = \frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x} + 1 = \frac{1 - \ln x + x \ln x}{x \ln x}. \text{ Θεωρούμε τη}$$

$$\text{συνάρτηση } \varphi(x) = 1 - \ln x + x \ln x, x \geq 1.$$

$$\text{Η } \varphi \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (1, +\infty) \text{ με } \varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \ln x + 1 = \ln x + \frac{x-1}{x}.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 1$ είναι

$$\varphi(x) > \varphi(1) = 1 > 0 \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow (1, +\infty). \text{Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln(\ln x) - \ln x + x) = -\infty - 0 + 1 = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(\ln x) \stackrel{\ln x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty, \text{ οπότε υπάρχει θετικός και πολύ μικρός θετικός}$$

αριθμός α , τέτοιος, ώστε $h(\alpha) < 0$.

Παρατηρούμε ότι $h(e) = \ln(\ln e) - \ln e + e = \ln 1 - 1 + e = e - 1 > 0$, οπότε

$h(\alpha)h(e) < 0$ κι επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος Bolzano

υπάρχει $\rho \in (\alpha, e) \subseteq (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = -\rho$. Επειδή η h

είναι γνησίως αύξουσα το ρ είναι μοναδικό.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 > 1$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε

$f'(x_1)f'(x_2) = -1$. Είναι $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x \ln x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$.

Επειδή $f'(x_1)f'(x_2) < 0$ τα $f'(x_1), f'(x_2)$ είναι ετερόσημοι αριθμοί, άρα $f'(x_1) < 0$ και $f'(x_2) > 0$ ή αντίστροφα. Τότε $x_1 > e$ και $1 < x_2 < e$.

Έστω $x_1 > e$, τότε $f'(x_1) < 0$ και $-\frac{1}{f'(x_1)} > 0$. Θα δείξουμε ότι για κάθε

$x_1 > e$, υπάρχει $x_2 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = -\frac{1}{f'(x_1)}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1 - \ln x}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 1(+\infty) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$$

Αν $\Delta = (1, e)$, τότε επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$ και $f'(e) = 0$ το σύνολο $(0, +\infty)$ θα

είναι υποσύνολο του $f'(\Delta)$. Επειδή $-\frac{1}{f'(x_1)} \in (0, +\infty)$, θα είναι και

$$-\frac{1}{f'(x_1)} \in f'(\Delta), \text{ οπότε υπάρχει } x_2 \in (1, e) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(x_2) = -\frac{1}{f'(x_1)}.$$

86.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο

$f'(x) = \sin x - 2e^x + 2x + 1$, Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow 2e^x \geq 2x + 2 \Leftrightarrow -1 \geq 2x + 1 - 2e^x$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x = 0$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \sin x \leq 1$ με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $\sin x - 2e^x + 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για $x = 0$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έχουμε $e^{-x}(\eta\mu x + x^2 + x + 2) = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x + x^2 + x + 2 = 2e^x \Leftrightarrow$

$\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{x^2} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) - 2e^x \right] = +\infty \cdot [(0 + 1 + 0 + 0) - 0] = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 2) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^2} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right] = -\infty.$$

$$\left(\left| \frac{\eta\mu x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\eta\mu x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \text{ οπότε από} \right.$$

Κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} = 0$).

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty).$$

Το $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$.

Το x_0 μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Πρέπει και αρκεί: $\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 2 > 0$ (1) και

$$\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 1 - \ln(\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 2) \geq 0$$
 (2)

(1) $\Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$ (3) και για την (2) αν θέσουμε

$$\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 2 = y > 0 \text{ για } x < 0 \text{ τότε } -2e^x + x^2 + x + 2 = y - 1, (2) \Leftrightarrow$$

$$y - 1 \geq \ln y, \text{ αληθής για κάθε } y > 0, \text{ κατά συνέπεια αληθής για κάθε } x < 0 \text{ (4).}$$

Από (3), (4) $\Rightarrow A_g = (-\infty, 0)$.

δ) Έστω (ε) εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία (δ).

Αν $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της με την C_f τότε $f'(x_0) = \pi - e^\pi$.

Έστω $A_1 = (-\infty, 0)$ και $A_2 = [0, +\infty)$.

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε :

$$f'(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = (-\infty, 0), f'(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right) = (-\infty, 0]$$

.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x + 1 > x$, οπότε

$e^\pi > \pi \Leftrightarrow \pi - e^\pi < 0$. Το $\pi - e^\pi < 0$ ανήκει στα $f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν

$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = \pi - e^\pi, f'(x_2) = \pi - e^\pi$

Τα x_1, x_2 μοναδικά, λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα A_1, A_2 , άρα η

εξίσωση $f'(x) = \pi - e^\pi$ έχει δύο ακριβώς ρίζες. Άρα υπάρχουν δύο ακριβώς

εφαπτομένες παράλληλες στην ευθεία (δ): $y = (\pi - e^\pi) \cdot x - 2021$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x - 2e^x + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \cdot \left(\frac{\sin x}{x} + 2 + \frac{1}{x} \right) - 2e^x \right] =$$

$$-\infty \cdot [(0 + 2 + 0) - 0] = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - 2e^x + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - 2 \frac{e^x}{x} + 2 + \frac{1}{x} \right) \right] =$$

$$+\infty \cdot (0 - \infty + 2 + 0) = -\infty. \quad \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) \text{ οπότε από Κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{\text{DLH}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty).$$

$$87.a) \text{ Έχουμε : } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}, & x \geq 2 \\ \frac{-x+2}{\sqrt{x^2+1}}, & x < 2 \end{cases}.$$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 2), (2, +\infty)$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 0$ άρα η f είναι συνεχής στο 2 οπότε και στο $\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 2)$ με παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{x^2+1} + (x-2) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x^2-1 + x^2-2x}{\sqrt{x^2+1}^3} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+1}^3}.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}^3}_{>0}} \geq 0 \Leftrightarrow -2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}.$$

Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$,

γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$ οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{1}{2}$, το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2} = \frac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}} = \sqrt{5}. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο}$$

διάστημα $(2, +\infty)$ με παράγωγο: $f'(x) = \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+1}^3},$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \text{ για } x \geq 2 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } [2, +\infty)$$

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 2 το $f(2) = 0$.

$$\beta) \text{ Εστω } A_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), A_2 = \left[-\frac{1}{2}, 2\right] \text{ και } A_3 = [2, +\infty).$$

Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε:

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) \right) = (1, \sqrt{5}),$$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 2} f(x), f\left(-\frac{1}{2}\right) \right] = (0, \sqrt{5}] \text{ και } f(A_3) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, 1).$$

$$\text{Άρα έχει σύνολο τιμών το } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [0, \sqrt{5}].$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1, \right.$$

$$\left. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1 \right) \text{ από το σύνολο τιμών βλέπουμε}$$

$$\text{ότι το } f(2) = 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{5} \text{ είναι αντίστοιχα ελάχιστο και μέγιστο της}$$

συνάρτησης.

γ) Η απόσταση d της αρχής των αξόνων από τις ευθείες δίνεται από τον τύπο :

$$d = \frac{|2B-A|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{\left|2-\frac{A}{B}\right|}{\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2+1}} = \frac{\left|\frac{A}{B}-2\right|}{\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^2+1}}$$

Αν θέσουμε $\frac{A}{B} = x$, προκύπτει η συνάρτηση f , η οποία έχει μέγιστο το $\sqrt{5}$

για $x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{B} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow B = -2A$, όπως φαίνεται από το Δ2, οπότε η ζητούμε ευθεία έχει τύπο: $Ax - 2Ay - 5A = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 5 = 0$.

δ) i. Στο $[2, +\infty)$, η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (2x+1) \cdot 3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4x^2-3x+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Για $x > 2$ έχουμε: $\begin{cases} x^2 > 4 \\ -3x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x^2 < -16 \\ -3x+2 < -4 \end{cases} \Rightarrow -4x^2-3x+2 < -20 < 0$

οπότε $f''(x) < 0$ στο $[2, +\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

ii. Η f είναι κοίλη στο $[2, +\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα. Επομένως έχει σύνολο τιμών το

$$f'([2, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x), f'(2) \right] = (0, \sqrt{5}] \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x^0}{\sqrt{1+1/x^2}} = 0.$$

Το $\frac{1}{2} \in f'([2, +\infty))$ οπότε η εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{2}$ έχει λύση στο $[2, +\infty)$, η

οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα. Άρα υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 2021$.

88.α) Η κατακόρυφη απόσταση των f, g είναι $d = |f(x) - g(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - x + x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) = e^x - 1 + 2x$ και $h''(x) = e^x + 2$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h''(x) > 0 \Rightarrow h' \nearrow \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h'(0) = 0$, οπότε

για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) = 0 \Rightarrow h \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε

$x > 0 \Leftrightarrow h'(x) > h'(0) = 0 \Rightarrow h \nearrow [0, +\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(0) = 1$, άρα $h(x) \geq h(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$d = h(x)$ και $d_{\min} = h_{\min} = 1$ για $x = 0$, τότε το σημείο της f είναι το

$(0, f(0))$ ή $(0, 1)$ και το σημείο της g είναι το $(0, g(0))$ ή $(0, 0)$.

β) $f(x) \geq lg(x) + 1 \Leftrightarrow e^x - \lambda x + \lambda x^2 - 1 \geq 0$ (1)

Έστω $\varphi(x) = e^x - \lambda x + \lambda x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(0) = 0$, οπότε η (1)

γίνεται $\varphi(x) \geq \varphi(0)$, άρα η συνάρτηση φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$.

Επειδή η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = e^x - \lambda + 2\lambda x$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι $\varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

γ) Γνωρίζουμε ότι η αντίστροφη της $f(x) = e^x$ είναι η $f^{-1}(x) = \ln x$, $x > 0$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln x = x - x^2 \Leftrightarrow \ln x + x^2 - x = 0$ (2) έχει ακριβώς μια ρίζα.

Έστω $k(x) = \ln x + x^2 - x$, $x > 0$. Παρατηρούμε ότι $k(1) = 0$. Η k είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $k'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 1 = \frac{2x^2 - x + 1}{x}$.

Το τριώνυμο $2x^2 - x + 1$ έχει $\Delta = -7 < 0$ οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $2x^2 - x + 1 > 0 \Rightarrow$

$k'(x) > 0 \Rightarrow k \nearrow (0, +\infty) \Rightarrow k(1) = 0$. Η σχέση (2) γίνεται: $k(x) = k(1) \Leftrightarrow x = 1$,

άρα $M(1, 0)$. Είναι $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x}$ και $(f^{-1})'(1) = 1$, $g'(x) = 1 - 2x$, $g'(1) = -1$.

Επειδή $(f^{-1})'(1)g'(1) = -1$ οι εφαπτομένες των $C_{f^{-1}}, C_g$ στο M είναι κάθετες.

δ) Η g είναι παραβολή με κορυφή $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Είναι $-\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$, $\Delta = 1$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{1}{4}$,

άρα $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$. Η

g τέμνει τους άξονες στα σημεία $(0, 0)$ και $(1, 0)$.

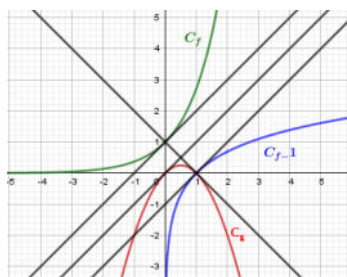
ε) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$. Η

εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία $\varepsilon_1: y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow$

$y = e^\alpha x + e^\alpha - \alpha e^\alpha$. Η εφαπτομένη της C_g στο B είναι η ευθεία

$\varepsilon_2: y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = (1 - 2\beta)x + \beta^2$. Για να δέχονται οι C_f, C_g κοινή εφαπτομένη πρέπει να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

να ταυτίζονται, άρα:
$$\begin{cases} e^\alpha = 1 - 2\beta \\ e^\alpha - \alpha e^\alpha = \beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1 - e^\alpha}{2} \\ e^\alpha - \alpha e^\alpha = \left(\frac{1 - e^\alpha}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (3)$$



Αρκεί η εξίσωση (3) να έχει ακριβώς 1 λύση στο $(0, +\infty)$. Είναι

$$e^a - ae^a = \left(\frac{1-e^a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow e^a - ae^a = \frac{1-2e^a+e^{2a}}{4} \Leftrightarrow$$

$$4e^a - 4ae^a = 1 - 2e^a + e^{2a} \Leftrightarrow 4e^a - 4ae^a - 1 + 2e^a - e^{2a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$6e^a - 4ae^a - 1 - e^{2a} = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x) = 6e^x - 4xe^x - 1 - e^{2x}$, $x \geq 0$. Η t είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $t'(x) = 2e^x(1-e^x) - 4xe^x$

Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > 1 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Rightarrow 2e^x(1-e^x) < 0$ και $-4xe^x < 0$, άρα

$$t'(x) < 0 \Rightarrow t \searrow [0, +\infty). \text{ Είναι } t(0) = 4, t(1) = -(e-1)^2 < 0.$$

Επειδή $t(0)t(1) < 0$ και η t είναι συνεχής στο $[0, 1]$, λόγω του θεωρήματος

Bolzano υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $t(x_1) = 0$ και επειδή η t είναι $\searrow [0, +\infty)$, το x_1 είναι η μοναδική της ρίζα στο διάστημα αυτό.

89.α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x + 2 - \sin x$. Η f' είναι επίσης

παραγωγίσιμη με $f''(x) = 2 + \eta\mu x$. Επειδή $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$, είναι

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \nearrow \mathbb{R} \Leftrightarrow f \cup \mathbb{R}$$

β) Έστω $h(x) = f(x) - \lambda x + 1$. Είναι

$$f(x) \geq \lambda x - 1 \Leftrightarrow f(x) - \lambda x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq h(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

άρα η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = f'(x) - \lambda = 2x + 2 - \sin x - \lambda, \text{ λόγω του Θεωρήματος Fermat}$$

είναι $h'(0) = 0 \Leftrightarrow 2 - 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή και ισχύει ότι $f(x) \geq x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

υπονιαζόμαστε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ είναι εφαπτομένη της C_f . Είναι

$$f'(0) = 2 \cdot 0 + 2 - \sin 0 = 2 - 1 = 1 = \lambda_\varepsilon.$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x - 1$.

Είναι $g'(x) = -x^2 + 1$ και $g'(x) = \lambda_\varepsilon \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Επειδή

$$g(0) = -1 = f(0) \text{ και } g'(0) = 1 \text{ η ευθεία } \varepsilon \text{ είναι κοινή εφαπτομένη των } C_f, C_g.$$

δ) $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x > \eta\mu x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 - \eta\mu x > -\frac{1}{3}x^3 + x - 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

Είναι $g''(x) = -2x < 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $g \searrow [0, +\infty)$. Επειδή η g είναι

κοίλη στο $[0, +\infty)$, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα

αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x) < x - 1$ για κάθε $x > 0$. Όμως η ε είναι εφαπτομένη της C_f και η f είναι κυρτή, οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) > x - 1$ για κάθε $x \neq 0$, άρα για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > x - 1 > g(x)$.

$$\varepsilon) x^2 + 2x = 1 + \eta \mu x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \frac{2}{x} - \frac{\sin x}{x} \right) \right] = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \text{ και από το κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0. \text{ Όμοια } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 + \frac{2}{x} - \frac{\sin x}{x} \right) \right] = +\infty.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = \mathbb{R}$. Άρα υπάρχει μοναδικό

$$x_1 : f'(x_1) = 0. \text{ Για κάθε } x < x_1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, x_1] \text{ και για}$$

$$\text{κάθε } x > x_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [x_1, +\infty).$$

Είναι $f'(0) = 2 - \sin 0 = 1$ και $f'(-1) = -2 + 2 - \sin(-1) = \sin 1 > 0$, λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 0)$, όμως το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της f' , άρα $x_1 \in (-1, 0)$.

Είναι $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 2 - \eta \mu 1 > 0$, άρα λόγω του Θ.Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1) \subseteq [x_1, +\infty)$. Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, +\infty)$ οπότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική σε αυτό το διάστημα.

$$\text{Είναι } f(-1) = -2 - \eta \mu(-1) = -2 + \eta \mu 1 < 0, f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \pi - 1 + 1 = \frac{\pi^2}{4} - \pi < 0,$$

$$f(-\pi) = \pi^2 - 2\pi - 1 > 0, \text{ δηλαδή } f\left(-\frac{\pi}{2}\right)f(-\pi) < 0 \text{ οπότε λόγω του}$$

Θ.Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο

$$\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \subseteq (-\infty, x_1]. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (-\infty, x_1], \text{ η}$$

προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

90.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -27e^{-x} - 512 \cdot 3(x+1)^2$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-27e^{-x} < 0$, $-512 \cdot 3(x+1)^2 \leq 0$ άρα

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1 \text{ και αντιστρέφεται.}$$

Έστω $f^{-1}(-485) = \alpha$, τότε $f(\alpha) = -485 = f(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$, άρα $f^{-1}(-485) = 0$

$$\beta) (x+1)^3 e^x = \frac{27}{512} \Leftrightarrow 512(x+1)^3 e^x = 27 \Leftrightarrow 512(x+1)^3 = \frac{27}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$0 = 27e^{-x} - 512(x+1)^3 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [27e^{-x} - 512(x+1)^3] = +\infty - (-\infty) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [27e^{-x} - 512(x+1)^3] = 0 - (+\infty) = -\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Το 0 περιέχεται στο

σύνολο τιμών της f , οπότε επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Είναι $f(0) = -485$, οπότε στο διάστημα

$\Delta = (-\infty, 0)$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta) = (-485, +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta)$

είναι $x_0 \in (-\infty, 0)$ άρα η ρίζα είναι αρνητική.

γ) Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $A(x_1, h(x_1))$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_1 : y - h(x_1) = h'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - e^{-x_1} = -e^{-x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$y = -e^{-x_1}x + e^{-x_1}(x_1 + 1)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(x_2, g(x_2))$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_2 : y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y + 2x_2^4 = -8x_2^3(x - x_2) \Leftrightarrow y = -8x_2^3x + 6x_2^4$$

Οι C_h, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases} -e^{-x_1} = -8x_2^3 \\ e^{-x_1}(x_1 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_1} = 8x_2^3 > 0 \quad (1) \\ e^{-x_1}(x_1 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Rightarrow 8x_2^3(x_1 + 1) = 6x_2^4 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = \frac{4}{3}(x_1 + 1). \text{ Είναι } 8x_2^3 > 0 \Leftrightarrow x_2 > 0 \Rightarrow \frac{4}{3}(x_1 + 1) > 0 \Leftrightarrow x_1 > -1$$

$$\text{Η σχέση (1) γίνεται: } e^{-x_1} = 8 \left[\frac{4}{3}(x_1 + 1) \right]^3 \Leftrightarrow e^{-x_1} = 8 \frac{64}{27}(x_1 + 1)^3 \Leftrightarrow$$

$$27e^{-x_1} - 512(x_1 + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow h(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_0.$$

2ος τρόπος: Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $A(x_1, h(x_1))$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_1 : y - h(x_1) = h'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - e^{-x_1} = -e^{-x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow$$

$$y = -e^{-x_1}x + e^{-x_1}(x_1 + 1)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(x_2, g(x_2))$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon_2 : y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y + 2x_2^4 = -8x_2^3(x - x_2) \Leftrightarrow y = -8x_2^3x + 6x_2^4$$

Οι C_h, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη όταν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να ταυτίζονται και αυτό συμβαίνει όταν:

$$\begin{cases} -e^{-x_1} = -8x_2^3 \\ e^{-x_1}(x_1 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_1} = 8x_2^3 > 0 \\ e^{-x_1}(x_1 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = \ln 8x_2^3 \\ e^{-x_1}(x_1 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \ln 2x_2 \\ e^{3 \ln 2x_2}(-3 \ln 2x_2 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \ln 2x_2 \\ 8x_2^3(-3 \ln 2x_2 + 1) = 6x_2^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 \ln 2x_2 \\ 6x_2 + 24 \ln 2x_2 - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \ln 2x_2 \\ 3x_2 + 12 \ln 2x_2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $c(x) = 3x + 12 \ln x - 4, x > 0$, η οποία είναι

παραγωγίσιμη με παράγωγο $c'(x) = 3 + \frac{12}{x} > 0$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο

πεδίο ορισμού της.

Επομένως έχει σύνολο τιμών το $c(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} c(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) \right) = (-\infty, +\infty)$.

Το $0 \in c(A)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 > 0$ για το οποίο ισχύει $c(x_2) = 0$.

$$\delta) f(x) = h(x) + g(x) \Leftrightarrow f(x) - h(x) - g(x) = 0.$$

Έστω $\varphi(x) = f(x) - h(x) - g(x), x \in [-1, 0]$. Είναι $\varphi(-1) = 26e + 2 > 0$,

$$\varphi(0) = f(0) - h(0) - g(0) = 27 - 512 - 1 = -486 < 0, \text{ δηλαδή } \varphi(0)\varphi(-1) < 0$$

και επειδή η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(x) + g(x)$ έχει

τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1, 0)$.

$$\epsilon) h(x) \geq \lambda x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} - \lambda x - 1 \geq 0 \quad (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = e^{-x} - \lambda x - 1, x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\alpha(0) = 0, \text{ οπότε η (1) γίνεται: } \alpha(x) \geq \alpha(0), \text{ άρα η } \alpha \text{ έχει ελάχιστο στο } x = 0.$$

Επειδή η α είναι παραγωγίσιμη με $\alpha'(x) = -e^{-x} - \lambda$, σύμφωνα με το θεώρημα

$$\text{Fermat, είναι } \alpha'(0) = 0 \Leftrightarrow -1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

στ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-27e^{-x} - 512 \cdot 3(x+1)^2) = -\infty - \infty = -\infty,$$

οπότε η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-27e^{-x} - 512 \cdot 3(x+1)^2) = 0 - \infty = -\infty, \text{ οπότε η}$$

f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

91.α) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα, γιατί αν η f είχε δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 > 0$ με $\rho_1 < \rho_2$, τότε: αν η f ήταν γνησίως αύξουσα τότε $f(\rho_1) < f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 < 0$ άτοπο, ενώ αν η f ήταν γνησίως φθίνουσα, τότε $f(\rho_1) > f(\rho_2) \Leftrightarrow 0 > 0$ επίσης άτοπο.

- Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, τότε

$$(x^2 + 1)f'(x) = |2xf(x)| \Leftrightarrow f'(x) = \frac{|2xf(x)|}{x^2 + 1} > 0 \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής}$$

στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Αν υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$ τότε $f'(x) = \frac{|2xf(x)|}{x^2 + 1} > 0$ για κάθε $x \in (0, \rho) \cup (\rho, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επομένως σε κάθε περίπτωση η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 1$, οπότε $(x^2 + 1)f'(x) = 2xf(x) \Leftrightarrow$

$$(x^2 + 1)f'(x) - 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 + 1)f'(x) - 2xf(x)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2 + 1} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2 + 1} = c \Leftrightarrow f(x) = c(x^2 + 1), c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c = 1$, άρα

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = x^2 + 1, x \geq 0$$

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y - 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} y-1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}, y \geq 1 \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}, x \geq 1.$$

δ) Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 2e^x - 3 \Leftrightarrow f(x) - 2e^x + 3 = 0$ να έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Έστω

$$g(x) = f(x) - 2e^x + 3 = x^2 + 1 - 2e^x + 3 = x^2 - 2e^x + 4, x \in [0,1]. \text{ Είναι}$$

$g(0) = -2 + 4 = 2 > 0$, $g(1) = 5 - 2e < 0$, δηλαδή $g(0)g(1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2e^x - 3 \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (0,1).$$

Είναι $g'(x) = 2x - 2e^x$ και $g''(x) = 2 - 2e^x = 2(1 - e^x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$,

οπότε η g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. Η g' έχει σύνολο τιμών το

$$g'((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} g'(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) \right) = (2 - 2e, -2), \text{ οπότε}$$

$g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$ και η ρίζα του θεωρήματος Bolzano είναι η μοναδική για την g .

ε) Έστω $M(x(t), y(t))$, $x(t) \geq 0$, $t \geq 0$.

Επειδή η τετμημένη του M αυξάνεται με ρυθμό 1 μονάδα μήκους το δευτερόλεπτο, είναι $x'(t) = 1 \mu\mu / \text{sec}$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το A , τότε $x(t_0) = 1$ και $y(t_0) = 2$. Η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων είναι

$$d(t) = (OM) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{x^2(t) + (x^2(t) + 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + x^4(t) + 2x^2(t) + 1} = \sqrt{x^4(t) + 3x^2(t) + 1}. \text{ Η ταχύτητα}$$

απομάκρυνσης του M από το O είναι το

$$d'(t) = \frac{(x^4(t) + 3x^2(t) + 1)'}{2\sqrt{x^4(t) + 3x^2(t) + 1}} = \frac{4x^3(t)x'(t) + 6x(t)x'(t)}{2\sqrt{x^4(t) + 3x^2(t) + 1}}. \text{ Τη χρονική στιγμή}$$

$$t_0 \text{ είναι } d'(t_0) = \frac{4 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1}{2\sqrt{1 + 3 + 1}} = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5} \mu\mu. / \text{sec}$$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln[f(x)]}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{f(x)} \ln f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln f(x)}{f(x)}} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ u \rightarrow 0}} e^u = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{\ln u}{u} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$$

92.α) Αν $x > 0$ τότε $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f' \nearrow (0, +\infty) \Rightarrow f \cup (0, +\infty)$

Αν $x < 0$ τότε $f''(x) < 0 \Leftrightarrow f' \searrow (-\infty, 0) \Rightarrow f \cap (-\infty, 0)$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Η εφαπτομένη της C_f στο $K(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > 0$ έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0). \text{ Είναι}$$

$f(x) \geq f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0)$ (1) για κάθε $x > 0$. Έστω ότι $f'(x_0) > 0$

τότε επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x_0)x - x_0 f'(x_0) + f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x_0)x = +\infty$, από τη

σχέση (1) θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x) \leq 0$ για

κάθε $x > 0$. Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η

εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $(0, +\infty)$, άρα $f'(x) < 0$ για κάθε

$x \in (0, +\infty)$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \rho) \cup (\rho, +\infty)$, ρ η πιθανή ρίζα της.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη

της στο διάστημα αυτό. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_1, f(x_1))$ με $x_1 < 0$

έχει εξίσωση: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x - x_1 f'(x_1) + f(x_1)$.

Είναι $f(x) \leq f'(x_1)x - x_1 f'(x_1) + f(x_1)$ (2) για κάθε $x < 0$. Έστω ότι

$f'(x_1) > 0$ τότε επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x_1)x - x_1 f'(x_1) + f(x_1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x_1)x = -\infty$,

από τη σχέση (2) θα είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ που είναι άτοπο. Άρα $f'(x) \leq 0$

για κάθε $x < 0$. Όμως η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$, οπότε η

εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα αυτό, άρα $f'(x) < 0$

για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, \rho') \cup (\rho', 0)$, ρ' η πιθανή ρίζα

της. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Έστω ότι στο υπάρχει $\rho_1 > 0$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) \leq 0$, τότε στο διάστημα

$\Delta_1 = (\rho_1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(\rho_1) \right) = (0, f(\rho_1))$ που είναι αδύνατο.

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $xf(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$. Έστω ότι στο

υπάρχει $\rho_2 < 0$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_2) \geq 0$, τότε στο διάστημα $\Delta_2 = (-\infty, \rho_2)$ η f

είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(\Delta_2) = \left(f(\rho_2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (f(\rho_2), 0)$ που είναι αδύνατο. Άρα $f(x) < 0$ για

κάθε $x < 0$ και $xf(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$.

γ) Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της πρέπει για κάθε $x_2, x_3 \in \mathbb{R}^*$ με $x_2 < x_3$ να είναι $f(x_2) > f(x_3)$. Έστω $x_2 < 0 < x_3$ τότε $f(x_2) < 0, f(x_3) > 0$ άρα $f(x_2) < f(x_3)$ οπότε η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

δ) Η ευθεία AB έχει εξίσωση

$$y - f(a) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}(x - a) \Leftrightarrow y = \lambda_{AB}x - \alpha\lambda_{AB} + f(a).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x) < \lambda_{AB}x - \alpha\lambda_{AB} + f(a)$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.

Έστω $g(x) = f(x) - \lambda_{AB}x + \alpha\lambda_{AB} - f(a)$, $x \in [a, \beta]$. Είναι $g'(x) = f'(x) - \lambda_{AB}$.

Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[a, \beta]$, υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$

τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} = \lambda_{AB}$. Για κάθε

$\alpha < x < \xi \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [a, \xi]$, οπότε για κάθε

$\alpha < x \leq \xi$ είναι $g(x) < g(\alpha) = 0$. Για κάθε

$\xi < x < \beta \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [\xi, \beta]$, οπότε για κάθε

$\xi \leq x < \beta$ είναι $g(x) < g(\beta) = 0$. Άρα για κάθε $x \in (a, \beta)$ είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow$

$$f(x) < \lambda_{AB}x - \alpha\lambda_{AB} + f(a)$$

93.α) Αρχικά για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = x^3 + x - \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g'(x) = 3x^2 + 1 - \sigma\upsilon\nu x.$$

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $3x^2 > 0$ και $1 - \sigma\upsilon\nu x \geq 0$, οπότε $g'(x) > 0$ για κάθε

$x \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε

$$x < 0 \text{ είναι } g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f(x) = -x^3 - x + \eta\mu x$$

και για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 + x - \eta\mu x$.

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} -x^3 - x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^3 + x - \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 - x + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-x^2 - 1 + \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 + 1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στην αρχή O των αξόνων.

β) Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = -3x^2 - 1 + \sin x = -g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 1 - \sin x = g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 - x + \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-x^2 - 1 + \frac{\eta\mu x}{x} \right) \right] = +\infty$ γιατί για

$x < 0$ είναι $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{-x} \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq -\frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$,

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x - \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(x^2 + 1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) \right] = +\infty$ γιατί όμοια με

πριν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (0, +\infty)$.

Για κάθε $\kappa \in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \kappa$. Όμως $\kappa \in f(\Delta_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \kappa$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , επειδή $f(x_1) = f(x_2)$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$. Επειδή το $f(\Delta_1)$ περιέχει άπειρους αριθμούς, υπάρχουν άπειρα x_1 και αντίστοιχα άπειρα x_2 . Οπότε υπάρχουν άπειρα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ στα οποία εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f .

δ) Για να δέχεται η C_f παράλληλες εφαπτόμενες πρέπει να υπάρχουν

$x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ με $x_3 \neq x_4$ τέτοια, ώστε $f'(x_3) = f'(x_4)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) = -6x - \eta\mu x = -5x - x - \eta\mu x$

Είναι $|\eta\mu x| < |x| = -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Rightarrow -x - \eta\mu x > 0$ και $-5x > 0$, άρα $f''(x) > 0$. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$, οπότε η f' είναι συνεχής στο

$x = 0$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) = 6x + \eta\mu x = 5x + x + \eta\mu x$

Είναι $|\eta\mu x| < |x| = x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Rightarrow x + \eta\mu x > 0$ και $5x > 0$, άρα $f''(x) > 0$.

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ με $x_3 \neq x_4$ είναι $f'(x_3) \neq f'(x_4)$ και η γραφική παράσταση της f δεν δέχεται παράλληλες εφαπτόμενες.

ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 - 1 + \sigma\upsilon\nu x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^2 \left(-3 - \frac{1}{x^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) \right] = -\infty$ γιατί

$$\left| \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right| = \frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \text{ και από}$$

το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 1 - \sigma\upsilon\nu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(3 + \frac{1}{x^2} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} \right) \right] = +\infty$ γιατί όμοια

με πριν είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = 0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = (-\infty, 0)$. Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = (0, +\infty)$. Για να υπάρχουν εφαπτόμενες της C_f , που είναι κάθετες πρέπει να υπάρχουν $x_5, x_6 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_5)f'(x_6) = -1$. Για κάθε $\lambda \in f'(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_5 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f'(x_5) = \lambda$. Τότε

$$\lambda f'(x_6) = -1 \Leftrightarrow f'(x_6) = -\frac{1}{\lambda}. \quad -\frac{1}{\lambda} \in f'(\Delta_2) \text{ οπότε υπάρχει μοναδικό } x_6 \in \Delta_2$$

τέτοιο, ώστε $f'(x_6) = -\frac{1}{\lambda}$. Επειδή το $f'(\Delta_1)$ περιέχει άπειρους αριθμούς, υπάρχουν άπειρα x_5 και αντίστοιχα άπειρα x_6 . Οπότε υπάρχουν άπειρα ζεύγη κάθετων εφαπτομένων της f .

94.α) Επειδή η f είναι άρτια, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(-x) = f(x)$.

$$\text{Οπότε } (f(-x))' = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x)(-x)' = f'(x) \Leftrightarrow$$

$$-f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f' \text{ περιττή.}$$

β) Για $x = 0$ είναι $f'(0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Για κάθε $x < 0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > 0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)$.

γ) Επειδή η f' γνησίως αύξουσα, η f είναι κυρτή, οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία ε με εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

Είναι $f(x) \geq f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $x_0 > 0$ τότε $f'(x_0) > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x_0)x) = +\infty \text{ οπότε και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty, u \rightarrow +\infty}} f(u) = +\infty.$$

Αν $x_0 < 0$ τότε $f'(x_0) < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(x_0)x) = +\infty$$

οπότε και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

δ) Είναι $0 < 1 \xrightarrow{f \nearrow} f(0) < f(1) = 0$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (f(0), +\infty)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο

$f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$. Στο διάστημα

$\Delta_2 = (0, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο

σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (f(0), +\infty)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_2)$

υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$. Τελικά η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

ε) Έστω ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ της C_f με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι συνευθειακά. Τότε: $AB \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (1). \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στα διαστήματα } [x_1, x_2],$$

$[x_2, x_3]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1, x_2) και (x_2, x_3) , οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \text{ Από τη σχέση (1) είναι}$$

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[a, \beta]$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι και 1-1. Είναι:

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \xi_1 = \xi_2 \text{ που είναι άτοπο.}$$

Οπότε δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

95.α) $f^2(x) = 2xf(x) + 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$

$$(f(x) - x)^2 = x^2 + 9 \text{ (1). Επειδή } x^2 + 9 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ είναι}$$

$$g(x) = f(x) - x \neq 0 \text{ και επειδή η } g \text{ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.}$$

Επειδή $g(0) = f(0) = 3 > 0$, είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η (1)

$$\text{γίνεται: } f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 9}}. \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι}$$

$$x^2 < x^2 + 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{x^2 + 9} < x < \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$$

άρα $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{f(x)f(-x)}{\sqrt{x^2 + 9}(x^2 + 9)} > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}.$$

γ) $\sqrt{x^2 + 9} = \lambda - x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} + x = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 9}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - 9}{x - \sqrt{x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{x + x\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} \right)} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 9}) = +\infty + \infty = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

- Αν $\lambda \leq 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda > 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

$$\delta) x + \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{\left(x + \sqrt{x^2 + 9}\right)^2 + 9} < 9 \Leftrightarrow f(x) + \sqrt{f^2(x) + 9} < 9 \Leftrightarrow$$

$$f(f(x)) < f(4) \Leftrightarrow f'(x) < 4 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} < 4 - x \quad (2)$$

Αν $4 - x < 0 \Leftrightarrow x > 4$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

$$\text{Αν } 4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \text{ η (2) γίνεται: } \left(\sqrt{x^2 + 9}\right)^2 < (4 - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 9 < 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow 8x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{8} \text{ που είναι δεκτές τιμές.}$$

ε) Είναι $M(x(t), y(t))$, όπου $y(t) = x(t) + \sqrt{x^2(t) + 9}$. Είναι $x'(t) = 1$ και

$$y'(t) = x'(t) + \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + 9}}. \text{ Είναι } (OM)(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \text{ οπότε}$$

$$(OM)'(t) = \frac{\dot{x}x'(t)x(t) + \dot{y}y(t)y'(t)}{\dot{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}}. \text{ Τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ που είναι}$$

$x(t_0) = 4$, $y(t_0) = 9$ είναι:

$$(OM)'(t_0) = \frac{x'(t_0)x(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{1 \cdot 4 + 9 \left(1 + \frac{4 \cdot 1}{\sqrt{16 + 9}}\right)}{\sqrt{16 + 81}} = \frac{101}{5\sqrt{97}} \text{ cm/sec}$$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = y - x \quad (3)$$

Είναι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9} > x \Leftrightarrow y - x > 0$ οπότε η (3) γίνεται:

$$x^2 + 9 = (y - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = y^2 - 2xy + x^2 \Leftrightarrow 2xy = y^2 - 9 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 9}{2y}, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2 - 9}{2y}, y \in (0, +\infty) \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{2x}, x \in (0, +\infty).$$

$$\zeta) (AB) = \sqrt{\left(x - f^{-1}(x)\right)^2 + \left(f^{-1}(x) - x\right)^2} = \sqrt{2\left(x - f^{-1}(x)\right)^2} = 2\left|x - f^{-1}(x)\right|.$$

Επειδή $f(x) > x$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y = x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y = x$. Άρα

$$(AB) = 2\left(x - f^{-1}(x)\right) = 2\left(x - \frac{x^2 - 9}{2x}\right) = \cancel{2} \frac{2x^2 - x^2 + 9}{\cancel{2}x} = \frac{x^2 + 9}{x} = x + \frac{9}{x}.$$

$$\text{Είναι } (AB)'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

Για κάθε $x \in (0, 3)$ είναι $(AB)'(x) < 0 \Rightarrow (AB) \searrow (0, 3]$ και για κάθε $x > 3$ είναι $(AB)'(x) > 0 \Rightarrow (AB) \nearrow [3, +\infty)$. Η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη για $x = 3$ με ελάχιστη απόσταση την $(AB) = 3 + \frac{9}{3} = 6$.

$$\eta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) \stackrel{x^2=y}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)) = 0 \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (u^2 - \eta \mu^2 u) = 0 \text{ και επειδή}$$

$$|\eta \mu f(x)| < |f(x)| \Leftrightarrow \eta \mu^2 f(x) < f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - \eta \mu^2 f(x) > 0, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x^2)}{f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x^2) \cdot \frac{1}{f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)} \right] = +\infty(+\infty) = +\infty$$

$$96.a) f(x) + f'(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + \lambda x^2 + 2\lambda x + x + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \frac{x^3}{3} + e^x x^2 + e^x \lambda x^2 + e^x 2\lambda x + e^x x + e^x \Leftrightarrow$$

$$(e^x f(x))' = \left(e^x \frac{x^3}{3} + e^x \lambda x^2 + e^x x \right)' \Leftrightarrow$$

$$e^x f(x) = e^x \frac{x^3}{3} + e^x \lambda x^2 + e^x x + c, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=0: c=0 \text{ άρα}$$

$$e^x f(x) = e^x \frac{x^3}{3} + e^x \lambda x^2 + e^x x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda x^2 + x, x \in \mathbb{R}$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολωνυμική με παράγωγο:

$f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 1, x \in \mathbb{R}$. Η παράγωγος της f είναι τριώνυμο με διακρίνουσα:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4 = 4(\lambda^2 - 1) = 4(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

$$\text{Αν } \lambda < -1 \text{ τότε } \Delta > 0 \text{ και η } f' \text{ έχει δύο ρίζες τις } x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-1)}}{2}$$

και τότε η f' θα είναι αρνητική ανάμεσα στις δύο ρίζες άρα θα είναι φθίνουσα σε εκείνο το διάστημα άρα ΑΤΟΠΟ.

Αν $\lambda = -1$ τότε $\Delta = 0$ και $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$ στο οποίο η f είναι συνεχής άρα f γνησίως αύξουσα στο

ℝ. Αν $\lambda \in (-1, 1)$ τότε $\Delta < 0$ και $f'(x) > 0$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο ℝ.

Αν $\lambda = 1$ τότε $\Delta = 0$ και $f'(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = -1$ στο οποίο η f είναι συνεχής άρα f γνησίως αύξουσα στο ℝ.

Αν $\lambda > 1$ τότε $\Delta > 0$ και η f' έχει δύο ρίζες τις $x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{(\lambda+1)(\lambda-1)}}{2}$

και τότε η f' θα είναι αρνητική ανάμεσα στις δύο ρίζες άρα θα είναι φθίνουσα σε εκείνο το διάστημα άρα άτοπο.

Άρα τελικά η f είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ αν και μόνον αν $\lambda \in [-1, 1]$.

γ) $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 1, x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) = 2x + 2\lambda$. Είναι

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > -2\lambda \Leftrightarrow x > -\lambda \text{ και } f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2x < -2\lambda \Leftrightarrow x < -\lambda.$$

Επομένως η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -\lambda]$ και κυρτή στο $[-\lambda, +\infty)$. Παρουσιάζει καμπή για $x = -\lambda$ και έχει μοναδικό σημείο καμπής.

δ) Επειδή $\lambda = 1$ από το γ) ερώτημα η f είναι κυρτή στο $[-1, +\infty)$ και η f' γνησίως αύξουσα. Έστω $-1 < \alpha < \beta$ τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$. Οπότε λόγω ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}.$$

$$\text{Είναι } \alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta \xRightarrow{f' \nearrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta). \text{ Όμοια αν } \alpha > \beta.$$

Αν $\alpha = \beta$ τότε $f(\alpha) = f(\beta) = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ άρα $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(\alpha) + f(\beta)$.

Τελικά προκύπτει $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in (-1, +\infty)$.

ε) Είναι $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$ και $f'(x) = x^2 + 2x + 1$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ είναι η

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{7}{3} = 4x - 4 \Leftrightarrow y = 4x - \frac{5}{3}$$

Επειδή $\lambda = 1$ από το γ) ερώτημα η f είναι κυρτή στο $[-1, +\infty)$ άρα η γραφική παράσταση της f στο διάστημα αυτό βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Δηλαδή

$$f(x) \geq 4x - \frac{5}{3} \Leftrightarrow f(x) - 4x + \frac{5}{3} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, +\infty) \text{ με την ισότητα να}$$

ισχύει μόνον για $x = 1$. Όμως όταν $x \rightarrow 1$ είναι $x \neq 1$, δηλαδή

$$f(x) - 4x + \frac{5}{3} > 0. \text{ Άρα είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{|x - 1| \left(f(x) - 4x + \frac{5}{3} \right)} = +\infty.$$

Επίπεδο Δ2

97.α) Έστω ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = \lambda x + \beta$,

τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \beta$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f^3(x) + 3f(x) + 1 = x^3 \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x^3} + 3 \frac{f(x)}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{x^3}{x^3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 + 3 \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - 1 = 0. \text{ Άρα και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)^3 + 3 \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$f^3(x) + 3f(x) + 1 = x^3 \Leftrightarrow f^3(x) - x^3 = -3f(x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)(f^2(x) + xf(x) + x^2) = -3f(x) - 1 \quad (1)$$

Επειδή το τριώνυμο $\omega^2 + x\omega + x^2$ ως προς $\omega = f(x)$ έχει $\Delta = -3x^2 < 0$, είναι

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 > 0 \text{ για κάθε } x > 0, \text{ άρα } f(x) - x = \frac{-3f(x) - 1}{f^2(x) + xf(x) + x^2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3f(x) - 1}{f^2(x) + xf(x) + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{f(x)}{x} + 1} = 0, \text{ άρα}$$

$\beta = 0$, οπότε η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\text{β) i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2 + 6x}{f(x) + 2x - 4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x}(f(x) - x + 6)}{\cancel{x}\left(\frac{f(x)}{x} + 2 - \frac{4}{x}\right)} = \frac{0 + 6}{1 + 2 - 0} = 2$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

γ) Για $x = 1$ είναι

$$f^3(1) + 3f(1) + 1 = 1 \Leftrightarrow f(1)(f^2(1) + 3) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ ή } f^2(1) = -3 \text{ αδύνατο}$$

$$f^3(x) + 3f(x) + 1 = x^3 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = x^3 - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 - 1}{f^2(x) + 1}.$$

$$\text{Είναι } |f(x)| = \left| \frac{x^3 - 1}{f^2(x) + 1} \right| = \frac{|x^3 - 1|}{f^2(x) + 1}. \text{ Είναι } 1 + f^2(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x) + 1} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|x^3 - 1|}{f^2(x) + 1} \leq |x^3 - 1| \text{ άρα } |f(x)| \leq |x^3 - 1| \Leftrightarrow -|x^3 - 1| \leq f(x) \leq |x^3 - 1|. \text{ Επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} |x^3 - 1| = \lim_{x \rightarrow 1} (-|x^3 - 1|) = 0 \text{ από το κριτήριο παρεμβολής είναι και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{ η } f \text{ είναι συνεχής στο } x = 1.$$

$$\text{δ) Είναι } f^3(x) + 3f(x) = x^3 - 1(1) \text{ και για } x = x_0 : f^3(x_0) + 3f(x_0) = x_0^3 - 1(2).$$

$$\text{Από (1) - (2) } \Rightarrow f^3(x) - f^3(x_0) + 3f(x) - 3f(x_0) = x^3 - x_0^3 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - f(x_0))(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)) + 3(f(x) - f(x_0)) =$$

$$(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - f(x_0))(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 3) = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2) \quad (3)$$

Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega f(x_0) + f^2(x_0) + 3$ έχει

$$\Delta = f^2(x_0) - 4f^2(x_0) - 12 = -3f^2(x_0) - 12 < 0 \text{ άρα}$$

$f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 3 > 0$ για κάθε $x, x_0 \in \mathbb{R}$, οπότε για $x \neq x_0$ η (3)

$$\text{γίνεται: } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 + xx_0 + x_0^2}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 3} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 + xx_0 + x_0^2}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 3} \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = \frac{3x_0^2}{3f^2(x_0) + 3}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{3x^2}{3f^2(x) + 3} = \frac{x^2}{f^2(x) + 1}$.

ε) Είναι $f'(x) = \frac{x^2}{f^2(x) + 1} > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Η f είναι συνεχής, οπότε είναι

γνησίως αύξουσα.

στ) Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Έστω ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = \beta$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f^3(x) + 3f(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 1) \Leftrightarrow \beta^3 + 3\beta = -\infty$ που είναι αδύνατο.

ζ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$ θα είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ τότε $f(\mathbb{R}) = \left(+\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$ που είναι αδύνατο, άρα

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Όμοια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$\eta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{f^2(x) + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{f^2(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

θ) Είναι $f'(1) = \frac{1^2}{f^2(1) + 1} = 1$, οπότε η εφαπτομένη στο $x = 1$ είναι η ευθεία ε:

$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$ Επειδή $\lambda_e = 1 = \lambda_{\text{ασύμπτωτης}}$, η ε είναι παράλληλη στην $y = x$.

ι) Για να υπάρχει εφαπτομένη της C_f σε σημείο με τετμημένη $x_1 \in (0, 1)$, παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 1821$, αρκεί να υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο,

ώστε $f'(x_1) = \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$, $x \in [0,1]$ με
 $g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2}$. Είναι $g'(0) = f'(0) - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ και
 $g'(1) = f'(1) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$. Επειδή $g'(0) < 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} < 0$,
 οπότε υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ με x_2 πολύ κοντά στο 0 τέτοιο, ώστε
 $\frac{g(x_2) - g(0)}{x_2} < 0 \Rightarrow g(x_2) - g(0) < 0 \Leftrightarrow g(x_2) < g(0)$ (1)

Επειδή $g'(1) > 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} > 0$, οπότε υπάρχει $x_3 \in (0,1)$ με x_3
 πολύ κοντά στο 1 τέτοιο, ώστε
 $\frac{g(x_3) - g(1)}{x_3 - 1} > 0 \Rightarrow g(x_3) - g(1) < 0 \Leftrightarrow g(x_3) < g(1)$ (2).

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, οπότε θα παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Από τις (1), (2) διαπιστώνουμε ότι η g δεν παρουσιάζει ελάχιστο στα 0 και 1, οπότε υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο. Τότε όμως από το θεώρημα

Fermat ισχύει ότι $g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) = \frac{1}{2}$

2ος τρόπος

Επειδή $f'(x) = \frac{3x^2}{3f^2(x)+3} = \frac{x^2}{f^2(x)+1}$, η f' είναι συνεχής ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων. Είναι $f'(0) = 0 \neq f'(1) = 1$, το $\frac{1}{2}$ βρίσκεται ανάμεσα στο $f'(0)$ και στο $f'(1)$ άρα από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = \frac{1}{2}$.

κ) Αν στη σχέση $f^3(x) + 3f(x) = x^3 - 1$ αντικαταστήσουμε όπου x το $\eta\mu x$ προκύπτει: $f^3(\eta\mu x) + 3f(\eta\mu x) = \eta\mu^3 x - 1$, τότε η εξίσωση
 $f^3(\eta\mu x) + 3f(\eta\mu x) = x^3 - 1$ γίνεται:
 $\eta\mu^3 x - 1 = x^3 - 1 \Leftrightarrow \eta\mu^3 x = x^3 \Leftrightarrow \eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0$

98.α) Για κάθε $x < 0$ είναι $e^{2x} - \beta x^2 - 2x - 1 \geq \alpha x^3 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{e^{2x} - \beta x^2 - 2x - 1}{x^3}$,

άρα και $\lim_{x \rightarrow -\infty} a \geq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - \beta x^2 - 2x - 1}{x^3}$ (1). Όμως

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - \beta x^2 - 2x - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x^3} - \frac{\beta}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 0,$$

γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} \cdot \frac{1}{x^3} = 0 \cdot 0 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{\beta}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$, οπότε η

σχέση (1) γίνεται $a \geq 0$.

β) Για $x \neq 0$ είναι: $e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1 \geq \beta x^2 \Leftrightarrow \beta \leq \frac{e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1}{x^2}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \beta \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1}{x^2} \quad (2). \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - \alpha x^3 - 2x - 1)'}{(x^2)'} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 3\alpha x^2 - 2}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^{2x} - 3\alpha x^2 - 2)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^{2x} - 3\alpha x^2 - 2)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x} - 6\alpha x}{2} = 2, \text{ άρα η σχέση (2) γίνεται: } \beta \leq 2.$$

γ) $f'(x) = 2e^{2x} - 3\alpha x^2 - 2\beta x - 2$, $f''(x) = 4e^{2x} - 6\alpha x - 2\beta$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x} - 6\alpha$

$$f''(0) = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2 \text{ και } f^{(3)}(0) = 0 \Leftrightarrow 8 - 6\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}.$$

Τότε $f''(x) = 4e^{2x} - 8x - 4$, $f^{(3)}(x) = 8e^{2x} - 8$. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow [0, +\infty) \text{ και για } x < 0 \text{ είναι } f^{(3)}(x) < 0 \Rightarrow f'' \searrow (-\infty, 0].$$

δ) Για $x > 0 \Leftrightarrow f''(x) > f''(0) = 0$ και για $x < 0 \Leftrightarrow f''(x) < f''(0)$, άρα για κάθε $x \neq 0$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, 0]$ και για

$$x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [0, +\infty)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{2x} - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \right) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 2x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{4}{3}x^3 \right) = +\infty. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(\frac{e^{2x}}{x^3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) \right] = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{3x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{6x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8e^{2x}}{6} = +\infty. \text{ Στο διάστημα } \Delta_1 = (-\infty, 0) \text{ είναι}$$

$f(\Delta_1) = (0, +\infty)$ και στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$ είναι $f(\Delta_2) = (0, +\infty)$. Είναι

$f(\Delta_1) = (0, +\infty) = f(\Delta_2)$. Έστω $\alpha \in \Delta_1$ τότε $f(\alpha) \in f(\Delta_1)$ και $f(\alpha) \in f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό $\beta \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) = f(\alpha)$. Επειδή η f είναι

συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) εφαρμόζεται γι αυτήν το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

99.α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα

στο $\mathbb{R}$. Είναι $\alpha < \alpha + 2 \stackrel{f', \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\alpha) < f'(\alpha + 2) \Leftrightarrow 3f(\alpha + 2) < f(\alpha + 2) \Leftrightarrow 2f(\alpha + 2) < 0 \Leftrightarrow f(\alpha + 2) < 0$.

Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[\alpha, \alpha + 2]$, οπότε

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha + 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\alpha + 2) - f(\alpha)}{\alpha + 2 - \alpha} = \frac{f(\alpha + 2) - f(\alpha)}{2}$.

Είναι $\alpha < \xi < \alpha + 2 \stackrel{f', \nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi) < f'(\alpha + 2) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha + 2) - f(\alpha)}{2} < f(\alpha + 2) \Leftrightarrow$

$f(\alpha + 2) - f(\alpha) < 2f(\alpha + 2) \Leftrightarrow f(\alpha) > -f(\alpha + 2) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής

στο $[\alpha, \alpha + 2]$ και $f(\alpha)f(\alpha + 2) < 0$, από το θεώρημα Bolzano υπάρχει

$x_0 \in (\alpha, \alpha + 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Επειδή $f(\alpha + 3) = 0$, $f(\alpha + 2) < 0$ και $f(\alpha) > 0$, είναι

$f(\alpha + 2) < f(\alpha + 3) < f(\alpha)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \alpha + 2]$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων

τιμών, υπάρχει $x_1 \in (\alpha, \alpha + 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = f(\alpha + 3)$ (1). Αν η f ήταν

1-1, τότε από την (1) θα πρόκυπτε ότι $x_1 = \alpha + 3$ που είναι αδύνατο αφού

$x_1 \in (\alpha, \alpha + 2)$, άρα η f δεν μπορεί να είναι 1-1.

γ) Επειδή $f(\alpha + 2) < f(\alpha + 3) < f(\alpha)$ η f θα έχει ακρότατο σε σημείο x_2 του

διαστήματος $[\alpha, \alpha + 3]$ που θα είναι διαφορετικό από τα άκρα του. Από το

θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(x_2) = 0$, δηλαδή η C_f δέχεται οριζόντια

εφαπτομένη.

δ) Επειδή $\alpha < x_2 < \alpha + 3$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:

$f'(x_2) < f'(\alpha + 3) \Leftrightarrow f'(\alpha + 3) > 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = \alpha + 3$, είναι:

$y - f(\alpha + 3) = f'(\alpha + 3)(x - \alpha - 3) \Leftrightarrow y = xf'(\alpha + 3) - (\alpha + 3)f'(\alpha + 3) + f(\alpha + 3)$

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, άρα

$$f(x) \geq xf'(\alpha+3) - (\alpha+3)f'(\alpha+3) + f(\alpha+3)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} [xf'(\alpha+3) - (\alpha+3)f'(\alpha+3) + f(\alpha+3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xf'(\alpha+3)] = +\infty,$$

άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

100. α) i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1)-f(0) \quad (2).$$

ii. Στη σχέση $2(f'(x)-1) \geq f^2(0) + f^2(1) \quad (1)$ θέτουμε $x = \xi$ οπότε γίνεται

$$2(f'(\xi)-1) \geq f^2(0) + f^2(1) \Leftrightarrow 2f'(\xi) - 2 \geq f^2(0) + f^2(1) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$2(f(1)-f(0))-2 \geq f^2(0) + f^2(1) \Leftrightarrow$$

$$f^2(0) + f^2(1) - 2f(1) + 2f(0) + 1 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (f(0)+1)^2 + (f(1)-1)^2 \leq 0 \text{ όμως}$$

$$(f(0)+1)^2 + (f(1)-1)^2 \geq 0 \text{ άρα } (f(0)+1)^2 + (f(1)-1)^2 = 0 \text{ οπότε } f(0) = -1$$

και $f(1) = 1$.

iii. Από την (1) έχουμε $2f'(x) - 2 \geq f^2(0) + f^2(1) \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow}$

$$2f'(x) - 2 \geq (-1)^2 + 1^2 \Leftrightarrow 2f'(x) \geq 4 \Leftrightarrow f'(x) \geq 2 \quad (3)$$

β) i. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x_0]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, x_0)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x_0)-f(0)}{x_0} \Leftrightarrow x_0 f'(\xi_1) = f(x_0) + 1.$$

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_0, 1]$ οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (x_0, 1)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1} \Leftrightarrow (x_0-1)f'(\xi_2) = f(x_0) - 1.$$

γ) Από τη σχέση (3) θα είναι $f'(\xi_1) \geq 2$ και $f'(\xi_2) \geq 2$ δηλαδή

$$\frac{f(x_0)+1}{x_0} \geq 2 \Leftrightarrow f(x_0) \geq 2x_0 - 1 \quad (4) \text{ και}$$

$$\frac{f(x_0)-1}{x_0-1} \geq 2 \stackrel{x_0-1 < 0}{\Leftrightarrow} f(x_0) - 1 \leq 2(x_0 - 1) \Leftrightarrow f(x_0) \leq 2x_0 - 1 \quad (5)$$

Από (4), (5) είναι $f(x_0) = 2x_0 - 1$ για τυχαίο $x_0 \in (0,1)$ άρα

$$f(x) = 2x - 1, \quad x \in (0,1) \text{ και αφού } f(0) = -1, \quad f(1) = 1 \text{ τότε } f(x) = 2x - 1,$$

$$x \in [0,1].$$

101. α) Λόγω του ΘΕΤ υπάρχει $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = f(\beta)$ και

λόγω του Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in (x_1, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

β) Έστω ότι $f(x) < f'(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = e^{-x}f(x), \quad x \in [\alpha, \beta]. \text{ Είναι}$$

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0 \Rightarrow g \nearrow [\alpha, \beta].$$

$$x_0 < \beta \stackrel{g \nearrow}{\Leftrightarrow} g(x_0) < g(\beta) \Leftrightarrow e^{-x_0}f(x_0) < e^{-\beta}f(\beta) \Leftrightarrow 0 < 0 \text{ αδύνατο, άρα υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } f(\xi) \geq f'(\xi).$$

γ) Λόγω του ΘΜΤ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > 0, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < 0 \text{ και λόγω του ΘΜΤ}$$

$$\text{για την } f' \text{ υπάρχει } \rho \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\rho) = \frac{f'(\xi_2) - f'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0.$$

δ) Έστω $h(x) = f(x) + x^3 - \alpha^3, x \in [\alpha, \beta]$. Είναι

$$h(\alpha) = f(\alpha) + \alpha^3 - \alpha^3 = f(\alpha) < 0, \quad h(\beta) = f(\beta) + \beta^3 - \alpha^3 = \beta^3 - \alpha^3 > 0, \text{ δηλαδή}$$

$h(\alpha)h(\beta) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, λόγω του Θ. Bolzano, η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x^3 - \alpha^3 = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } (\alpha, \beta).$$

102. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq e^x - x^2 - \lambda x - 1 \Leftrightarrow f(x) - e^x + x^2 + \lambda x + 1 \geq 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x + x^2 + \lambda x + 1, x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε

ότι $g(0) = 0$, οπότε η σχέση (1) γίνεται: $g(x) \geq g(0)$ και συνάρτηση g

παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως

άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f'(x) - e^x + 2x + \lambda$,

σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $g'(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Άρα για κάθε

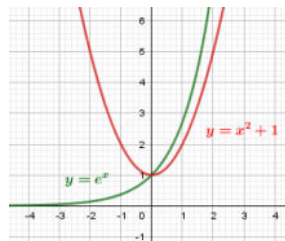
$$x \in \mathbb{R} \text{ είναι } e^x - x^2 - 1 \leq f(x) \leq e^x - x^2 - 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$$

β) Είναι $f'(x) = e^x - 2x$ και $f''(x) = e^x - 2$.

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$$

Για κάθε $x < \ln 2$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $(-\infty, \ln 2]$,

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > \ln 2$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $[\ln 2, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f' έχει ελάχιστο το $f'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2 - \ln 4 = \ln e^2 - \ln 4 > 0$, άρα $f'(x) \geq f'(\ln 2) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.



$$y) \quad e^x < x^2 + 1 \Leftrightarrow e^x - x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow x < 0.$$

Δηλαδή η γραφική παράσταση της $y = e^x$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της $y = x^2 + 1$ στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ έχει εξίσωση:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - (e - 2) = (e - 2)(x - 1) \Leftrightarrow y = (e - 2)x$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, άρα $f(x) > (e - 2)x \Leftrightarrow e^x - x^2 - 1 > ex - 2x \Leftrightarrow$

$$e^x - ex > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow e(e^{x-1} - x) > (x - 1)^2 \stackrel{x > 1}{\Leftrightarrow} e > \frac{(x - 1)^2}{e^{x-1} - x}$$

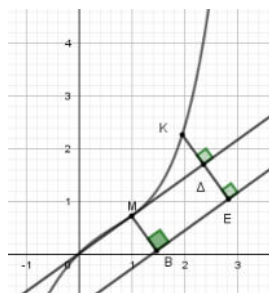
Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x + 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, οπότε αντικαθιστώντας όπου x το $x - 1$ προκύπτει ότι $e^{x-1} > x$ για κάθε $x > 1$.

ε) Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) \geq (e - 2)x > (e - 2)x - 1$.

Επειδή οι ευθείες $y = (e - 2)x$ και $y = (e - 2)x - 1$ είναι παράλληλες, το σημείο της C_f που είναι πλησιέστερο στην ε είναι το $M(1, e - 2)$.

Παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε σημείο K της C_f με τετμημένη μεγαλύτερη του 1 ισχύει ότι $(KE) = (K\Delta) + (\Delta E) > (\Delta E) = (MB)$, οπότε η MB είναι η μικρότερη απόσταση σημείου της C_f με την ευθεία ε . Η ελάχιστη απόσταση είναι η

$$(MB) = d(M, \varepsilon) = \frac{|e - 2 - (e - 2) - 1|}{\sqrt{1 + (e - 2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 4e + 5}}$$



2^{ος} τρόπος

Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της C_f . Η απόσταση του M από την ε είναι:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{|(e - 2)x - f(x) - 1|}{\sqrt{1 + (e - 2)^2}} = \frac{f(x) + 1 - (e - 2)x}{\sqrt{e^2 - 4e + 5}}.$$

$$\text{Έστω } d(x) = \frac{f(x) + 1 - (e-2)x}{\sqrt{e^2 - 4e + 5}} = \frac{e^x - x^2 - (e-2)x}{\sqrt{e^2 - 4e + 5}}, \quad x \geq 1.$$

$$\text{Είναι } d'(x) = \frac{e^x - x^2 - (e-2)}{\sqrt{e^2 - 4e + 5}} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 4e + 5}}(e^x - 2x - (e-2)),$$

$$d''(x) = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 4e + 5}}(e^x - 2) = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 4e + 5}}f''(x) \text{ για } x \geq 1 \text{ άρα η } d' \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Για $x \geq 1 \Leftrightarrow d'(x) \geq d'(1) = 0$, η d συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα η d είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Για $x \geq 1 \Leftrightarrow d(x) \geq d(1)$ άρα η d παρουσιάζει ελάχιστο στο 1.

Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη στο $x = 1$, δηλαδή στο $M(1, e-2)$.

στ) i. Για κάθε $x \in [0, 1)$ είναι $f(x) \geq 0$ και

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow (e-2)x < e-2 \Leftrightarrow (e-2)x - 1 < e-3 < 0, \text{ άρα}$$

$$f(x) > (e-2)x - 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 1).$$

ii. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = (e-2)x - 1$ έχει ακριβώς 1 ρίζα x_0 και $f'(x_0) \neq e-2 = \lambda_e$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \geq 0$ είναι

$$f(x) > (e-2)x - 1. \text{ Έστω } \varphi(x) = e^x - x^2 - (e-2)x + 1, \quad x \leq 0.$$

$$\text{Είναι } \varphi'(x) = e^x - 2x - e + 2 \text{ και } \varphi''(x) = e^x - 2 = f''(x).$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $\varphi''(x) < 0$ και επειδή η φ' είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό, οπότε

$$\varphi'(x) > \varphi'(0) = 3 - e > 0 \Rightarrow \varphi' \nearrow (-\infty, 0].$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x - x^2 - (e-2)x] = 0 - \infty = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 - (e-2)x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty \text{ και } \varphi(0) = 1. \text{ Επειδή η } \varphi \text{ είναι συνεχής}$$

και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (-\infty, 0)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$\varphi(\Delta) = (-\infty, 1). \text{ Επειδή το } 0 \text{ περιέχεται στο } (-\infty, 1), \text{ υπάρχει μοναδικό } x_0 < 0$$

τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0) = 0$, οπότε η ε έχει μοναδικό κοινό σημείο με την C_f

Επειδή η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ είναι: $x_0 < 0 \Leftrightarrow$

$$f'(x_0) > f'(0) = 1 > e-2, \text{ άρα } f'(x_0) \neq \lambda_e \text{ και η } \varepsilon \text{ τέμνει την } C_f \text{ στο } x_0.$$

103. α) Έστω $\varphi(x) = \frac{e^{f(x)} + f(x) - 1}{x}, \quad x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$. Είναι

$$e^{f(x)} + f(x) - 1 = x\varphi(x) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [e^{f(x)} + f(x) - 1] = \lim_{x \rightarrow 0} [x\varphi(x)] \Leftrightarrow e^{f(0)} + f(0) - 1 = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $a(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $a(0) = 0$.

Είναι $a'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow a \nearrow \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται

$a(f(0)) = a(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, το κρίσιμο σημείο της θα είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$, οπότε αρκεί $f'(0) = 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} + f(x) - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{f(x)} - 1}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) = 0 \quad (2). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι}$$

$$\text{παραγωγίσιμη στο } x=0 \text{ είναι } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x) = e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Η t είναι παραγωγίσιμη ως

σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $t'(x) = e^{f(x)} f'(x)$. Είναι

$$t'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t(x) - t(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{x} = e^{f(0)} f'(0) = f'(0).$$

Η σχέση (2) γίνεται: $f'(0) + f'(0) = 0 \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$, οπότε η f έχει κρίσιμο σημείο το $x = 0$.

β) Έστω $g(x) = f'(x) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f''(x) - f'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq f(x)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f(x)$.

γ) Είναι $f'(x) \leq f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) \leq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$h'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x))$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) < f(x) \Rightarrow h'(x) < 0$ και επειδή h είναι συνεχής,

είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) > f(x) \Rightarrow h'(x) > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για κάθε $x < 0 \xrightarrow{h'} h(x) < h(0) \Leftrightarrow e^{-x} f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$ και

για κάθε $x > 0 \xrightarrow{h'} h(x) < h(0) \Leftrightarrow e^{-x} f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$.

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < 0 \Rightarrow f''(x) < f'(x) < f(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

ε) Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο αυτό (υπάρχει το $f'(0)$), αν ήταν σημείο καμπής το O τότε $f''(0) = 0$. Τότε όμως από τη σχέση $f''(x) < f'(x)$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για $x = 0$ προκύπτει $f''(0) < f'(0) \Leftrightarrow 0 < 0$ άτοπο.

Άρα η f δεν έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$.

104. α) Έστω $\varphi(x) = f'(x) - \ln x$, $x > 0$. Είναι $\varphi(x) \neq 0$ και η φ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, οπότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έστω ότι $\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < \ln x$ για κάθε $x > 0$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $x = 0$, ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \Leftrightarrow f'(0) \leq -\infty$ που είναι άτοπο, άρα $f'(x) > \ln x$ για κάθε $x > 0$.

β) Επειδή η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0 > 0$ και είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, είναι $f''(x_0) = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε: $x_0 > 0 \Leftrightarrow f'(x_0) > \ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 < 0 \Leftrightarrow x_0 < 1$, άρα $0 < x_0 < 1$.

γ) Για κάθε $0 < x < x_0 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > x_0 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο x_0 .

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x(\ln x - 1) - 2$, $x \geq 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g'(x) = f'(x) - (\ln x - 1) - x \cdot \frac{1}{x} = f'(x) - \ln x.$$

Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > g(1) \Leftrightarrow f(x) - x(\ln x - 1) - 2 > f(1) + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) > x(\ln x - 1) + 2$.

ε) Για κάθε $x > 1$ είναι $f(x) < f'(x)(x-1) + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 < f'(x)(x-1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x-1} < f'(x)$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1, x]$, $x > 1$, οπότε

υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$. Είναι

$$1 < \xi < x \xRightarrow{f' \nearrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x-1} < f'(x).$$

$$105. \alpha) \text{ Είναι } e^{f(x)-x} = e^{-x} (1-f'(x)) \Leftrightarrow \frac{e^{f(x)-x}}{e^{-x}} = 1-f'(x).$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } \frac{e^{f(x)-x}}{e^{-x}} > 0 \Leftrightarrow 1-f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) < 1 = \varepsilon\varphi 45^\circ.$$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της $(x, f(x))$, τότε $\varepsilon\varphi\omega = f'(x)$, άρα $\varepsilon\varphi\omega < \varepsilon\varphi 45^\circ \Leftrightarrow \omega < 45^\circ$. Οπότε δεν μπορεί να υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει με τον άξονα x' x γωνία μεγαλύτερη από 45° .

$$\beta) e^{f(x)-x} = e^{-x} (1-f'(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1-f'(x)}{e^{f(x)-x}} \Leftrightarrow e^x = (1-f'(x))e^{x-f(x)} \Leftrightarrow$$

$$(e^{x-f(x)})' = (e^x)' \Leftrightarrow e^{x-f(x)} = e^x + c, c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Για $x = 0$ είναι $e^{-f(0)} = 1 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$, οπότε

$$e^{x-f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow x - f(x) = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow x - \ln(e^x + 1) = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma) e^{f(2f'(x))} < e^{\frac{\ln e}{e+1}} \Leftrightarrow f(2f'(x)) < 1 - \ln(e+1) = f(1) \Leftrightarrow 2f'(x) < 1 \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}, \text{ οπότε η (1) γίνεται}$$

$$2 \frac{1}{e^x + 1} < 1 \Leftrightarrow 2 < e^x + 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\delta) \text{ Είναι } f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \Rightarrow f' \searrow \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{0+1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) \right) = (0, 1)$.

Επειδή $\theta \in (0, \pi)$, είναι $0 < \eta\mu\theta < 1$, οπότε για κάθε $\theta \in (0, \pi)$, το $\eta\mu\theta$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f , επομένως η εξίσωση $f'(x) = \eta\mu\theta$ έχει μοναδική λύση. Επειδή το θ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός του διαστήματος $(0, \pi)$, υπάρχουν άπειρες εξισώσεις $\eta\mu\theta = f'(x)$, οπότε η εξίσωση αυτή αληθεύει για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$.

ε) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - \ln(e^x + 1)] = -\infty - 0 = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(e^x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln e^x - \ln(e^x + 1)] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\substack{\frac{e^x}{e^x + 1} = u \\ u \rightarrow 1}}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0 \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι}$$

συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το

$$f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0), \text{ άρα } A_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0).$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - \ln(e^x + 1) = y \Leftrightarrow \ln e^x - \ln(e^x + 1) = y \Leftrightarrow \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x}{e^x + 1} = e^y \Leftrightarrow e^x = e^y e^x + e^y \Leftrightarrow e^x - e^y e^x = e^y \Leftrightarrow e^x (1 - e^y) = e^y \stackrel{y \in (0,1)}{\Leftrightarrow}$$

$$e^x = \frac{e^y}{1 - e^y} > 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{e^y}{1 - e^y}.$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(y) = \ln \frac{e^y}{1 - e^y}, y \in (-\infty, 0), \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \ln \frac{e^x}{1 - e^x}, x \in (-\infty, 0).$$

$$\text{στ) Έστω } g(x) = f(x) - f^{-1}(x) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - \ln \frac{e^x}{1 - e^x} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \ln \frac{\cancel{e^x} \frac{1 - e^x}{1 - e^x}}{\cancel{e^x} \frac{e^x + 1}{1 - e^x}} = \ln \frac{1 - e^x}{e^x + 1}, x \in (-\infty, 0).$$

Είναι $[f(x) - f^{-1}(x)]^2 = x^2 \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 \Leftrightarrow |g(x)| = |x|$ και επειδή

$x \in (-\infty, 0)$, είναι $|g(x)| = -x$ (2). Είναι

$$-e^x < e^x \Leftrightarrow 1 - e^x < 1 + e^x \Leftrightarrow \frac{1 - e^x}{1 + e^x} < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1 - e^x}{1 + e^x} < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \text{ για κάθε}$$

$$x \in (-\infty, 0), \text{ οπότε η (2) γίνεται: } -g(x) = -x \Leftrightarrow \ln \frac{1 - e^x}{e^x + 1} = x \Leftrightarrow \frac{1 - e^x}{e^x + 1} = e^x \Leftrightarrow$$

$$1 - e^x = e^{2x} + e^x \Leftrightarrow e^{2x} + 2e^x - 1 = 0 \quad (3)$$

Θέτουμε $e^x = \omega > 0$ και η (3) γίνεται $\omega^2 + 2\omega - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\omega = \sqrt{2} + 1 \text{ ή } \omega = -\sqrt{2} - 1 \text{ απορρίπτεται. Άρα } e^x = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{2} + 1) < 0$$

106. α) 1^{ος} τρόπος

$$2f'(x) + xf''(x) + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow f'(x) + f'(x) + xf''(x) + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + xf'(x) - \sigma\upsilon\nu x)' = 0 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) - \sigma\upsilon\nu x = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) + 0 \cdot f'(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = c \Leftrightarrow 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0,$$

άρα

$$f(x) + xf'(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow (xf'(x) - \eta\mu x)' = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - \eta\mu x = c', c' \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } c' = 0 \text{ οπότε } xf'(x) - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow xf'(x) = \eta\mu x \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{\eta\mu x}{x}.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ είναι και συνεχής σ' αυτό, οπότε

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$

$$\text{2^{ος} τρόπος: } f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} \Leftrightarrow xf(x) = \eta\mu x \Leftrightarrow xf(x) - \eta\mu x = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = xf(x) - \eta\mu x, x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Είναι } h'(x) = f(x) + xf'(x) - \sigma\upsilon\nu x \text{ και}$$

$$h''(x) = f'(x) + f'(x) + xf''(x) + \eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$h''(x) = 2f'(x) + xf''(x) + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow h'(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } h'(0) = c \Leftrightarrow f(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = c', c' \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } h(0) = 0 \Leftrightarrow c' = 0 \text{ οπότε } h(x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) - \eta\mu x = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ είναι και συνεχής σ' αυτό, οπότε

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1.$$

β) Για κάθε $x \in (-\pi, 0)$ είναι $\eta\mu x < 0$, $x < 0$, άρα $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} > 0$.

Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x > 0$, $x > 0$, άρα $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x} > 0$. Επειδή $f(0) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f(-x) = \frac{\eta\mu(-x)}{-x} = \frac{-\eta\mu x}{-x} = \frac{\eta\mu x}{x} = f(x)$, οπότε η f είναι άρτια. Έστω $a > 0$. Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-a, a]$ και παραγωγίσιμη στο $(-a, a)$.

Επειδή $f(-a) = f(a)$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[-a, a]$.

δ) $f(x) = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \eta\mu x = 2x - 1 \Leftrightarrow \eta\mu x - 2x + 1 = 0$.

Έστω $t(x) = \eta\mu x - 2x + 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Είναι

$t(0) = 1$, $t\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 = 2 - \pi < 0$, οπότε $t(0)t\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Επειδή η t

είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $t(\rho_1) = 0$. Έστω ότι η t

έχει και δεύτερη ρίζα $\rho_2 \neq \rho_1$. Η t είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ ή $[\rho_2, \rho_1]$, και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ή (ρ_2, ρ_1) με $t'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2$.

Επειδή $t(\rho_1) = t(\rho_2)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει

$\rho_3 \in (\rho_1, \rho_2)$ ή (ρ_2, ρ_1) τέτοιο, ώστε $t'(\rho_3) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \rho_3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \rho_3 = 2$

αδύνατο. Άρα η t έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ε) Για $x \neq 0$ είναι $g(x) = xf(x) = \cancel{x} \frac{\eta\mu x}{\cancel{x}} = \eta\mu x$ και για $x = 0$ είναι

$g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$, άρα $g(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_1 < x_2$.

Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$, οπότε από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1). \text{ Γνωρίζουμε ότι ισχύει : } |\sin \xi| \leq 1, \text{ άρα}$$

$$|g'(\xi)| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|g(x_1) - g(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq 1 \Leftrightarrow |g(x_1) - g(x_2)| \leq |x_1 - x_2|.$$

Ομοίως αν $x_2 < x_1$. Τέλος αν $x_1 = x_2$, τότε ισχύει η ισότητα

$$|\eta \mu x_1 - \eta \mu x_1| = |x_1 - x_1|.$$

στ) $g\left(\frac{x}{2}\right) = x \Leftrightarrow \eta \mu \frac{x}{2} - x = 0$. Έστω $\varphi(x) = \eta \mu \frac{x}{2} - x$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε

ότι $\varphi(0) = \eta \mu 0 - 0 = 0$. Έστω ότι η φ έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[0, \rho]$ ή $[\rho, 0]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$ με

$$\varphi'(x) = \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' - 1 = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} - 1.$$

Επειδή $\varphi(0) = \varphi(\rho)$ σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ ή $(\rho, 0)$

τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin \frac{\xi}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\xi}{2} = 2$ αδύνατο.

Άρα η φ δεν έχει άλλη ρίζα, οπότε η $x = 0$ είναι η μοναδική της ρίζα.

ζ) $g\left(\frac{7\pi}{18}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{36} \Leftrightarrow \eta \mu \frac{7\pi}{18} < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{36} \Leftrightarrow \eta \mu \frac{7\pi}{18} - \eta \mu \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{36} \Leftrightarrow$

$$\eta \mu \frac{7\pi}{18} - \eta \mu \frac{6\pi}{18} < \frac{\pi}{36}. \text{ Η } g \text{ είναι συνεχής στο } \left[\frac{6\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right] \text{ και παραγωγίσιμη στο}$$

$$\left(\frac{6\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right), \text{ με } g'(x) = \sin x, \text{ οπότε λόγω του Θ.Μ.Τ. υπάρχει } \xi \in \left(\frac{6\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right)$$

$$\text{τέτοιο, ώστε: } f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{7\pi}{18}\right) - f\left(\frac{6\pi}{18}\right)}{\frac{7\pi}{18} - \frac{6\pi}{18}} \Leftrightarrow \sin \xi = \frac{\eta \mu \frac{7\pi}{18} - \eta \mu \frac{6\pi}{18}}{\frac{\pi}{18}}.$$

Είναι $\frac{6\pi}{18} < \xi < \frac{7\pi}{18}$ και η συνάρτηση $\sin x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο

$$\text{διάστημα } \left[\frac{6\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ οπότε: } \sin \frac{6\pi}{18} > \sin \xi > \sin \frac{7\pi}{18}.$$

$$\text{Άρα, } \sin \xi < \sin \frac{6\pi}{18} \Leftrightarrow \frac{\eta \mu \frac{7\pi}{18} - \eta \mu \frac{6\pi}{18}}{\frac{\pi}{18}} < \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \eta \mu \frac{7\pi}{18} - \eta \mu \frac{6\pi}{18} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{36}.$$

η) i. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν άπειρα ζεύγη $x_1, x_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$. Είναι $f'(x) = \sin x$. Επειδή για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$f'(x) > 0$, ενώ για $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $f'(x) < 0$, θα είναι $0 < x_1 < \frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$.

Είναι $f'(x_2) = -f'(x_1) \Leftrightarrow \sin x_2 = -\sin x_1 = \sin(\pi - x_1) \Leftrightarrow x_2 = \pi - x_1$

Άρα για κάθε $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ οι εφαπτομένες της C_k στο $x = x_1$ και στο $x = \pi - x_1$

έχουν αντίθετες κλίσεις.

ii. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο x_1 με τον άξονα $x'x$ και φ η γωνία που

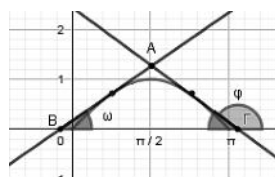
σχηματίζει η εφαπτομένη της C_k στο $x_2 = \pi - x_1$ με

τον άξονα $x'x$. Είναι $k'(x_1) = \varepsilon\varphi\omega$ και $k'(x_2) = \varepsilon\varphi\varphi$

Έστω ότι οι εφαπτομένες τέμνονται στο Α. Είναι

$k'(x_2) = -k'(x_1) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varphi = -\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(180^\circ - \varphi) \Leftrightarrow$

$\widehat{A\hat{B}\Gamma} = \widehat{A\hat{\Gamma}B}$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



$$107. \alpha) f'(x)f(x) - f(x) = x(f'(x) + 3x^4 - 1) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)f(x) - f(x) = xf'(x) + 3x^5 - x \Leftrightarrow$$

$$f'(x)f(x) - f(x) - xf'(x) = 3x^5 - x^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)' - (f(x) + xf'(x)) = \left(\frac{3}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^2\right)' \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}f^2(x) - xf(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^2\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{2}f^2(x) - xf(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^2 + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) - 2xf(x) = x^6 - x^2 + 2c. \text{ Για } x = 2 \text{ είναι } f^2(2) - 4f(2) = 64 - 4 + 2c \Leftrightarrow$$

$$100 - 40 = 60 + 2c \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα}$$

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^6 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^6 \Leftrightarrow |f(x) - x| = |x^3| \quad (1).$$

Είναι $|x^3| > 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα και $h(x) = f(x) - x \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Επειδή η h είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Είναι $h(2) = f(2) - 2 = 8 > 0$ άρα $h(x) > 0$ για

κάθε $x > 0$ και η (1) γίνεται: $f(x) - x = x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x, x > 0$.

Είναι $h(-2) = f(-2) + 2 = -f(2) + 2 = -8 < 0$ άρα $h(x) < 0$ για κάθε $x < 0$

και η (1) γίνεται: $-f(x) + x = -x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x, x < 0$.

Από τη σχέση (1) για $x=0$ προκύπτει ότι $f(0)=0$, οπότε

$$f(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) x^4 + 1 + f(x) = 4x \Leftrightarrow x^4 + 1 + x^3 + x - 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^4 + x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \text{ ή } x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

1	1	0	-3	1	1
	1	2	2	-1	
1	2	2	-1	0	

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 + 2x^2 + 2x - 1, x \in [0,1]$.

Είναι $\varphi(0) = -1, \varphi(1) = 4$, δηλαδή $\varphi(0)\varphi(1) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως πολωνυμική, σύμφωνα με το Θ. Bolzano, η εξίσωση

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο } (0,1).$$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $\varphi'(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $\varphi'(x) > 0$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

$$\gamma) (x^3 + x)^3 + x^3 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = 10 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(2) \quad (2)$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) > 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1, οπότε η } (2)$$

$$\text{γίνεται: } f(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = f(1)^{1-1} \Leftrightarrow x = 1.$$

δ) Επειδή η f είναι 1-1 αντιστρέφεται. Επειδή $f(1) = 2$ είναι $1 = f^{-1}(2)$.

$$\text{Είναι } f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1}(x^3 + x))' = (x)' \Rightarrow (f^{-1})'(x^3 + x)(3x^2 + 1) = 1.$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } (f^{-1})'(2) \cdot 4 = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{4}.$$

Η εφαπτομένη (ε) της $C_{f^{-1}}$ στο $x = 2$ είναι η ευθεία ε:

$$y - f^{-1}(2) = (f^{-1})'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αρχικά θα βρούμε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $y = x$. Είναι $f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x = x \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Επειδή $f(0) = 0$ είναι και $f^{-1}(0) = 0$ άρα κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$ το $O(0,0)$. Θα δείξουμε τώρα ότι το σημείο αυτό είναι μοναδικό.

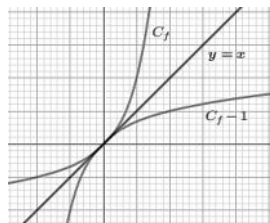
Έστω $M(\alpha, \beta)$ κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$, τότε $f(\alpha) = f^{-1}(\alpha) = \beta$. Αν

$$f(\alpha) > \alpha \text{ τότε και } f^{-1}(\alpha) > \alpha \text{ αλλά επειδή η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει}$$

$$f(f^{-1}(\alpha)) > f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha > f(\alpha) \text{ που είναι άτοπο. Όμοια αν}$$

$f(a) < a$ ισχύει: $f^{-1}(a) < a \Leftrightarrow f(f^{-1}(a)) < f(a) \Leftrightarrow a < f(a)$ που είναι άτοπο.

Οπότε τελικά $f(a) = a$ και το Μ ανήκει στην ευθεία $y = x$. Όμως μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y = x$ είναι το Ο, άρα το Ο είναι το μοναδικό κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$.



στ) σχήμα

$$\zeta) g^3(x) - e^{3x} = e^x - g(x) \Leftrightarrow$$

$$g^3(x) + g(x) = e^{3x} + e^x \Leftrightarrow$$

$$f(g(x)) = f(e^x)^{1-1} \Leftrightarrow g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

$$\eta) f(x) + 126x = 6g(x) - 3x^2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x + 126x = 6e^x \Leftrightarrow$$

$$x^3 + 3x^2 + 127x - 6e^x = 0.$$

Έστω $h(x) = x^3 + 3x^2 + 127x - 6e^x, x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$h'(x) = 3x^2 + 6x + 127 - 6e^x, h''(x) = 6x + 6 - 6e^x \text{ και } h^{(3)}(x) = 6 - 6e^x.$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $h^{(3)}(x) < 0$ άρα $h'' \searrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι

$$h^{(3)}(x) > 0 \text{ άρα } h'' \nearrow (-\infty, 0]. \text{ Η } h'' \text{ έχει μέγιστο το } h''(0) = 0 \text{ άρα } h''(x) < 0$$

για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η h' είναι συνεχής στο $x = 0$, η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 6x + 127 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h'(x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(3 + \frac{6}{x} + \frac{127}{x^2} - 6 \frac{e^x}{x^2} \right) \right] = +\infty(-\infty) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{2x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty. \text{ Επειδή η } h' \text{ είναι συνεχής έχει σύνολο}$$

τιμών το $\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει μοναδικός ρ τέτοιος ώστε $h'(\rho) = 0$.

Για κάθε $x < \rho$ είναι $h'(x) > h'(\rho) = 0 \Rightarrow h' \nearrow (-\infty, \rho]$ και για κάθε $x > \rho$ είναι

$$h'(x) < h'(\rho) = 0 \Rightarrow h' \searrow [\rho, +\infty), \text{ οπότε η } h \text{ έχει μέγιστο στο } \rho. \text{ Παρατηρούμε}$$

$$\text{ότι } h'(1) = 136 - 6e > 0, h'(2) = 151 - 6e^2 > 0, h'(3) = 172 - 6e^3 > 0,$$

$$h'(4) = 199 - 6e^4 < 199 - 6 \cdot 2,5^4 = 199 - 6 \cdot 6,25 \cdot 6,25 = 199 - 37,5 \cdot 6,25 < 0.$$

Άρα $3 < \rho < 4$. Είναι $h'(\rho) = 3\rho^2 + 6\rho + 1 - 6e^\rho = 0 \Leftrightarrow 6e^\rho = 3\rho^2 + 6\rho + 1$, άρα

$$h(\rho) = \rho^3 + 3\rho^2 + 127\rho - 3\rho^2 - 6\rho - 1 = \rho^3 + 121\rho - 1.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(\rho) = \rho^3 + 121\rho - 1, \rho > 1$. Είναι

$\alpha'(\rho) = 3\rho^2 + 121 > 0$. Άρα η α είναι γνησίως αύξουσα.

$3 < \rho < 4 \Rightarrow \alpha(3) < \alpha(\rho) < \alpha(4) \Rightarrow 390 < \alpha(\rho)$, άρα $h(\rho) > 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 127x - 6e^x) = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{127}{x^2} - 6 \frac{e^x}{x^3} \right) \right] = +\infty(-\infty) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty.$$

Στο $\Delta_1 = (-\infty, \rho)$ η h έχει σύνολο τιμών το $h(\Delta_1) = (-\infty, h(\rho))$ και στο

$\Delta_2 = [\rho, +\infty)$ η h έχει σύνολο τιμών το $h(\Delta_2) = (-\infty, h(\rho)]$. Επειδή το 0

ανήκει και στα δύο διαστήματα, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

$$\theta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)\eta\mu x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x}{x^3} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0 \text{ γιατί}$$

$$\text{για κάθε } x > 0 \text{ είναι } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right), \text{ οπότε από το Κ.Π. είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

$$i) g(x^2 + \lambda x) \geq f(x) + 1 \Leftrightarrow e^{x^2 + \lambda x} - x^3 - x - 1 \geq 0 \quad (3).$$

Έστω $b(x) = e^{x^2 + \lambda x} - x^3 - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, τότε η (3) γίνεται $b(x) \geq b(0)$,

δηλαδή η b έχει ελάχιστο στο $x = 0$ που είναι στο εσωτερικό του πεδίου

ορισμού της. Επειδή η b είναι παραγωγίσιμη με $b'(x) = (2x + \lambda)e^{x^2 + \lambda x} - 3x^2 - 1$,

σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $b'(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

108. α) Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$f'(x_1) < f'(x_2)$. Θεωρούμε τις εφαπτόμενες της C_f στα x_1, x_2 .

$$\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \text{ και}$$

$$\varepsilon_2 : y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$$

Επειδή η f βρίσκεται πάνω από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εκτός του σημείου επαφής τους, ισχύει

ότι $f(x) \geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$ (1) και $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$ (2)

Η (1) για $x = x_2$ γίνεται:

$$f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1) \quad (3)$$

Η (2) για $x = x_1$ γίνεται: $f(x_1) > f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow$

$$f(x_1) - f(x_2) > f'(x_2)(x_1 - x_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2) \quad (4)$$

Από τις (3), (4) $\Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow f' \nearrow [0, +\infty) \Leftrightarrow f \cup [0, +\infty)$

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x}$. Για την f

εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, x]$, $x > 0$, οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$

τέτοιο ώστε $f'(x_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}$. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι

γνησίως αύξουσα, οπότε $0 < \xi_1 < x \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow$

$f(x) < xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) > 0$, άρα $g'(x) > 0$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Για κάθε $1 \leq x \leq 2$ είναι $g(1) \leq g(x) \leq g(2) \Leftrightarrow$

$$f(1) \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(2)}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 4 \Leftrightarrow x \leq f(x) \leq 4x \quad (1).$$

δ) Έστω ότι τα σημεία

$A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2)), \Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι συνευθειακά,

$$\text{τότε } AB/B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχουν $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_3 \in (x_2, x_3)$ τέτοια,

$$\text{ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ και } f'(\xi_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \text{ Άρα}$$

$f'(\xi_2) = f'(\xi_3)$ και επειδή η f' είναι 1-1 (αφού είναι γνησίως αύξουσα ως κυρτή) είναι $\xi_2 = \xi_3$ που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχουν τρία σημεία της C_f που να είναι συνευθειακά.

ε) 1ος τρόπος: Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[a, x]$, $x \in (a, \beta]$ υπάρχει

$$\xi_5 \in (a, x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$\text{Επειδή } \xi < x < \beta \text{ και } f' \nearrow \text{ έχουμε: } f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(\beta) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(a) < f'(\beta)(x - a). \text{ Αν } x = a \text{ ισχύει η ισότητα. Οπότε για κάθε}$$

$x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$

2ος τρόπος: $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha) \Leftrightarrow f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha) \leq 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha)$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $h'(x) = f'(x) - f'(\beta)$.

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα διαδοχικά έχουμε:

$\alpha < x < \beta \Rightarrow f'(x) < f'(\beta) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\beta) < 0$ άρα $h'(x) < 0$ και η γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

Για κάθε $\alpha \leq x \leq \beta$ είναι $h(\alpha) \geq h(x) \Leftrightarrow 0 \geq f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha)$.

στ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0, 1]$ οπότε υπάρχει $\xi_5 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_5) = f(1) - f(0) = 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = \xi_5$ έχει εξίσωση $y - f(\xi_5) = f'(\xi_5)(x - \xi_5) \Leftrightarrow y = x - \xi_5 + f(\xi_5)$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο $[0, +\infty)$, οπότε $f(x) \geq x - \xi_5 + f(\xi_5)$ για κάθε $x \geq 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \xi_5 + f(\xi_5)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, οπότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

ζ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$, οπότε υπάρχει $\xi_6 \in (x, x+1)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi_6) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x)$. Επειδή η f' είναι

γνησίως αύξουσα έχουμε: $x < \xi_6 < x+1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi_6) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

η) 1ος τρόπος: $(g(x) - x^2)(g(x) + x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$(g(x) - x^2)(g(x) + x^2) + 2(g(x) - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g^2(x) - x^4 + 2g(x) - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow g^2(x) - 2g(x) + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(g(x) + 1)^2 = (x^2 + 1)^2 \quad (3)$$

Επειδή $(x^2 + 1)^2 > 0$ για κάθε $x > 0$ είναι $(g(x) + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow g(x) + 1 \neq 0$.

Η συνάρτηση $\varphi(x) = g(x) + 1$, $x > 0$ είναι συνεχής και $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε

$x > 0$ και $\varphi(2) = g(2) + 1 = \frac{f(2)}{2} + 1 = 5 > 0$, άρα $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x > 0$,

οπότε η (3) γίνεται:

$$g(x) + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow g(x) = x^2 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = x^2 \Leftrightarrow f(x) = x^3, \quad x > 0.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}. \text{ Επειδή ο τύπος } y = x^3 \text{ ικανοποιεί και το } (0, f(0)),$$

$$\text{τελικά } f(x) = x^3, \quad x \geq 0.$$

2ος τρόπος: Επειδή $(g(x) - x^2)(g(x) + x^2 + 2) = 0$ (3) οι τιμές της g θα είναι της μορφής $g(x) = x^2$ ή $g(x) = -x^2 - 2$.

Έστω ότι υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ για το οποίο $g(x_1) = x_1^2 \geq 0$ και $x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_2) = -x_2^2 - 2 \leq -2$. Τότε επειδή η g είναι συνεχής και $g(x_1) < -1 < g(x_2)$, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = -1$. Τότε για $x = x_0$ η σχέση (3) γίνεται

$$(g(x_0) - x_0^2)(g(x_0) + x_0^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow (-1 - x_0^2)(-1 + x_0^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow -(x_0^2 + 1)^2 = 0$$

αδύνατη. Άρα $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = -x^2 - 2, x \in \mathbb{R}$. Επειδή $g(1) = 1$ είναι $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

109. α) Έστω ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε επειδή η f' είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε η f είναι γνησίως μονότονη. Τότε όμως επειδή είναι συνεχής θα έχει σύνολο τιμών το:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (+\infty, +\infty) \text{ που είναι αδύνατο. Άρα υπάρχει}$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο. Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε το x_0 είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f .

β) Για κάθε $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [x_0, +\infty)$ και για κάθε

$$x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, x_0], \text{ οπότε η } f \text{ έχει ελάχιστο στο } x_0.$$

γ) Επειδή η ε είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 5) = 0.$$

Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το

$$f'(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right). \text{ Επειδή το } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \text{ υπάρχει, ισχύει ότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x), \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2.$$

$$5 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{f(x)}{x} - 2 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f(x)}{x} - 2}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \frac{\frac{f'(x)}{1} - 2}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - xf'(x))$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3x - xe^{-x}}{xf(x) - 2x^2 + \eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(\frac{f(x)}{x} + 3 - e^{-x} \right)}{\cancel{x} \left(f(x) - 2x + \frac{\eta\mu x}{x} \right)} = \frac{2+3-0}{5+0} = 1 \text{ γιατί για}$$

$$x > 0 \text{ είναι } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right),$$

$$\text{οπότε από Κ.Π είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

ε) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x). \text{ Είναι}$$

$$x < \xi < x+1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x+1) \stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = 2$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2$.

στ) Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), 2 \right)$, άρα $f'(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x - 5, x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$g'(x) = f'(x) - 2 < 0 \Rightarrow g \searrow \mathbb{R}. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 5) = 0 \text{ η } g$$

έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = \left(0, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right)$, άρα

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - 2x - 5 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x + 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\zeta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 5) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(-x) - 2x - 5) = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $-x = u$. Όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $u \rightarrow -\infty$ και η (1) γίνεται:

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (f(u) + 2u - 5) = 0 \text{ ή } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x - 5) = 0, \text{ άρα η ευθεία } y = -2x + 5$$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

η) Επειδή η f είναι άρτια ισχύει ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα

$$(f(-x))' = f'(x) \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \text{ και για } x=0 \text{ είναι}$$

$$-f'(0) = f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0, \text{ άρα το κρίσιμο σημείο της } f \text{ είναι}$$

το $x_0 = 0$. Επειδή η f από το σκέλος 2 έχει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, ισχύει ότι $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

θ) $h(x) = f(x) - x \ln x$, $x \geq 1$. Είναι $h(1) = f(1) > 2 \cdot 1 + 5 = 7 > 0$ (είναι $f(x) > 2x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$) και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{f(x)}{x} - \ln x \right) \right] = +\infty(2 - \infty) = -\infty$$

οπότε υπάρχει $\alpha > 1$ όπου ο α είναι πολύ μεγάλος αριθμός, τέτοιος ώστε $h(\alpha) < 0$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[1, \alpha]$, σύμφωνα με το Θ.Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x \ln x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα μεγαλύτερη από το 1.

ι) Επειδή η $y = -2x + 5$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2. \text{ Όμως } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{1} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -2.$$

Από το σκέλος 6 η f' έχει σύνολο τιμών το

$$f'(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), 2 \right) = (-2, 2), \text{ άρα } -2 < f'(x) < 2 \Leftrightarrow |f'(x)| < 2 \text{ για κάθε}$$

$x \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi_1 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) - 6. \text{ Είναι}$$

$$|f'(\xi_1)| < 2 \Leftrightarrow |f(1) - 6| < 2 \Leftrightarrow 4 < f(1) < 8. \text{ Όμως από το 6ο ερώτημα είναι } f(1) > 7, \text{ άρα } 7 < f(1) < 8.$$

110. α) Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ είναι $|f(x)| = \sqrt{x \eta \mu x}$ (1). Για κάθε

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

είναι $f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $\eta \mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Για κάθε

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ είναι } f^2(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής,}$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η (1)

γίνεται $f(x) = \sqrt{x\eta\mu x}$. Επειδή η f είναι άρτια, ισχύει ότι

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0, \text{ οπότε η (1) γίνεται } f(x) = \sqrt{x\eta\mu x}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Άρα $f(x) = \sqrt{x\eta\mu x}$ για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ και επειδή

$$f(0) = 0 = \sqrt{0 \cdot \eta\mu 0}, \text{ είναι } f(x) = \sqrt{x\eta\mu x}, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

β) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση

$$\text{παραγωγίσιμων συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{(x\eta\mu x)'}{2\sqrt{x\eta\mu x}} = \frac{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}.$$

$$\text{Στο } x = -\frac{\pi}{2} \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{x + \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{x\eta\mu x} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{x + \frac{\pi}{2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \frac{\eta\mu x + x\eta\mu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{\eta\mu x + x\eta\mu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}}{1} = \frac{-1 + \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}(\pi - 2)}{2\sqrt{2}} \text{ Στο } x = \frac{\pi}{2} \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{x\eta\mu x} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{x - \frac{\pi}{2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\eta\mu x + x\eta\mu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}}{1} = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}(\pi + 2)}{2\sqrt{2}}$$

Στο $x = 0$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sqrt{\frac{x\eta\mu x}{x^2}} \right) = -1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x\eta\mu x}{x^2}} = 1, \text{ οπότε η } f \text{ δεν}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

γ) Είναι $f'(x) = \frac{\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{x\eta\mu x}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x > 0$, $x > 0$, $\sigma\upsilon\nu x > 0$, $\sqrt{x\eta\mu x} > 0$, άρα

$f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, είναι γνησίως αύξουσα στο

διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ είναι

$\eta\mu x < 0$, $x < 0$, $\sigma\upsilon\nu x > 0$, $x\sigma\upsilon\nu x < 0$, $\sqrt{x\eta\mu x} > 0$, άρα $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = 0$ και τοπικά μέγιστα τα

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

δ) $E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\eta\mu x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(-\sigma\upsilon\nu x)' dx = -[x\sigma\upsilon\nu x]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$

ε) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx \leq 1 + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx \leq 2 + \pi \Leftrightarrow$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx + \pi \geq 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f^2(x) - 2f(x)) dx + \pi \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f^2(x) - 2f(x) + 1 - 1) dx + \pi \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f(x) - 1)^2 dx - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx + \pi \geq 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f(x) - 1)^2 dx - \pi + \pi \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (f(x) - 1)^2 dx \geq 0 \text{ ισχύει αφού } (f(x) - 1)^2 \geq 0$$

111. α) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και έχει ακρότατο στο $x = 1$ εφαρμόζεται το

θεώρημα Fermat, οπότε $f'(1) = 0$. Για κάθε $x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

αυτό. Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο Α.

β) Για $x = 1$ είναι $f'(1)(1-1) \geq f(1) \Leftrightarrow 0 \geq f(1)$ και ισχύει η ισότητα.

Για $x > 1$ είναι $f'(x)(x-1) \geq f(x) \Leftrightarrow f'(x) \geq \frac{f(x)}{x-1} \Leftrightarrow f'(x) \geq \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1, x]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}. \text{ Είναι}$$

$$1 < \xi < x \xRightarrow{f', \nearrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < f'(x).$$

$$\text{Για } x < 1 \text{ είναι } f'(x)(x - 1) \geq f(x) \Leftrightarrow f'(x) \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow f'(x) \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x, 1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, 1)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = \frac{-(f(x) - f(1))}{-(x - 1)} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

$$\text{Είναι } x < \xi < 1 \xRightarrow{f', \nearrow} f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > f'(x).$$

$$\gamma) \text{ Για κάθε } x \neq 1 \text{ η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη με } g'(x) = \frac{f'(x)(x - 1) - f(x)}{(x - 1)^2}$$

Από το προηγούμενο σκέλος είναι $f'(x)(x - 1) > f(x)$ για κάθε $x \neq 1$, άρα $g'(x) > 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

$$\delta) \text{ Για κάθε } x > 1 : xf(x) < (x - 1)f(x + 1) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x - 1} < \frac{f(x + 1)}{x} \Leftrightarrow$$

$$g(x) < g(x + 1) \xRightarrow{g, \nearrow (1, +\infty)} x < x + 1 \text{ ισχύει}$$

$$\epsilon) (3\rho - 5)f(2\rho) = (\rho^2 - 3)f(3\rho) \Leftrightarrow (3\rho - 5)f(2\rho) - (\rho^2 - 3)f(3\rho) = 0$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } h(x) = (3x - 5)f(2x) - (x^2 - 3)f(3x), x \in [1, 2].$$

$$\text{Είναι } h(1) = -2f(2) + 2f(3) = 2(f(3) - f(2)).$$

$$\text{Είναι } 2 < 3 \xRightarrow{f, \nearrow (1, +\infty)} f(2) < f(3) \Leftrightarrow f(3) - f(2) > 0 \Leftrightarrow h(1) > 0$$

$$\text{Είναι } h(2) = f(4) - f(6) < 0 \text{ γιατί } 4 < 6 \xRightarrow{f, \nearrow (1, +\infty)} f(4) < f(6) \Leftrightarrow f(4) - f(6) < 0.$$

Επειδή $h(1)h(2) < 0$ και η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho) = 0 \Leftrightarrow (3\rho - 5)f(2\rho) = (\rho^2 - 3)f(3\rho)$

$$\mathbf{112. \alpha)} \text{ Έστω } \varphi(x) = g(x) - xh(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Είναι}$$

$$\varphi'(x) = \sigma\eta\nu x - \sigma\eta\nu x + \chi\eta\mu x = \chi\eta\mu x.$$

$$\text{Για } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } \varphi'(x) > 0 \text{ και για } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ είναι } \eta\mu x < 0 \Rightarrow \chi\eta\mu x > 0$$

$$\text{άρα } \varphi'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και επειδή η } \varphi \text{ είναι συνεχής στο}$$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{είναι } \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1 \leq \varphi(x) \leq 1 \Leftrightarrow |\varphi(x)| \leq 1.$$

$$\beta) \beta g(\alpha) > \alpha g(\beta) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha} > \frac{\eta\mu\beta}{\beta}.$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } t(x) = \frac{\eta\mu x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο: } t'(x) = \frac{x\sigma\eta\nu x - \eta\mu x}{x^2} = \frac{-\varphi(x)}{x^2}.$$

$$\text{Για κάθε } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ είναι } \varphi(x) > \varphi(0) = 0 \Rightarrow t(x) < 0 \Rightarrow t' \searrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Είναι } \alpha < \beta \Leftrightarrow t(\alpha) > t(\beta) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu\alpha}{\alpha} > \frac{\eta\mu\beta}{\beta} \Leftrightarrow \beta\eta\mu\alpha > \alpha\eta\mu\beta.$$

γ) Έχουμε

$$D_{g,h} = \left\{x \in D_h / h(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / \sigma\eta\nu x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \stackrel{-1 \leq \sigma\eta\nu x \leq 1}{=} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

και επίσης

$$D_{h,g} = \left\{x \in D_g / g(x) \in D_h\right\} = \left\{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / \eta\mu x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\} \stackrel{-1 \leq \eta\mu x \leq 1}{=} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Άρα } f(x) = (g \circ h)(x) + (h \circ g)(x) = g(h(x)) + h(g(x)) =$$

$$\eta\mu(\sigma\eta\nu x) + \sigma\eta\nu(\eta\mu x), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\delta) 1^{\text{ος}} \text{ τρόπος (Χωρίς παραγώγους): Για κάθε } x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow$$

$$\stackrel{\sigma\eta\nu x \nearrow}{\Rightarrow} \sigma\eta\nu x_1 > \sigma\eta\nu x_2 \stackrel{\eta\mu x \nearrow}{\Rightarrow} \eta\mu(\sigma\eta\nu x_1) > \eta\mu(\sigma\eta\nu x_2) \quad (3) \text{ γιατί}$$

$$0 \leq \sigma\eta\nu x_2 < \sigma\eta\nu x_1 \leq 1 < \frac{\pi}{2}$$

$$\stackrel{\eta\mu x \nearrow}{\Rightarrow} \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \stackrel{\sigma\eta\nu x \searrow}{\Rightarrow} \sigma\eta\nu(\eta\mu x_1) > \sigma\eta\nu(\eta\mu x_2) \quad (4) \text{ γιατί}$$

$$0 \leq \eta \mu x_1 < \eta \mu x_2 \leq 1 < \frac{\pi}{2}$$

$$(3)+(4): f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Για κάθε } x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow$$

$$-x_1 > -x_2 \xRightarrow[-x_1, -x_2 \in [0, \pi/2]]{f \searrow} f(-x_1) < f(-x_2) \xRightarrow{\text{Άρτια}} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ και}$$

επειδή είναι συνεχής στο μηδέν τότε το $f(0) = \eta \mu 1 + 1$ είναι ολικό μέγιστο.

2^{ος} τρόπος (Με παραγώγους):

Η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{με παράγωγο: } f'(x) = -\eta \mu x \cdot (\sin(\sin x)) - \sin x \cdot (\eta \mu(\eta \mu x)), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Στο διάστημα } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ έχουμε ότι } \eta \mu x, \sin x \in (0, 1) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } \eta \mu(\eta \mu x),$$

$$\sin(\sin x) \in (0, 1) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ άρα } \sin(\eta \mu(\eta \mu x)), \eta \mu(\sin(\sin x)) > 0 \text{ αφού}$$

μέσα στους τριγωνομετρικούς αριθμούς έχουμε γωνίες 1^{ου} τεταρτημορίου άρα ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \xRightarrow[-x_1, -x_2 \in [0, \pi/2]]{f \searrow} f(-x_1) < f(-x_2) \xRightarrow{\text{Άρτια}} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

Επίσης το πρόσημο της παραγώγου θα μπορούσε να δειχτεί και με την παρακάτω πιο χρονοβόρα διαδικασία:

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ είναι } -1 < \eta \mu x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -\eta \mu x < 1,$$

$$0 < \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x < 0, -1 < \eta \mu x \leq 0 \xRightarrow{\eta \mu x, \nearrow} \eta \mu(\eta \mu x) \leq 0,$$

$$0 < \sin x \leq 1 \xRightarrow{\sin x, \searrow} 0 < \sin(1) \leq \sin(\sin x) < 1$$

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι } 0 \leq \eta \mu x < 1 \Leftrightarrow -1 < -\eta \mu x \leq 0,$$

$$0 < \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x < 0, 0 \leq \eta \mu x < 1 \xRightarrow{\eta \mu x, \nearrow} \eta \mu(\eta \mu x) \geq 0,$$

$$0 < \sin x \leq 1 \xRightarrow{\sin x, \searrow} 0 < \sin(1) \leq \sin(\sin x) < 1$$

Άρα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$
$-\eta\mu x$			+	-	
$-\sigma\upsilon\nu x$			-	-	
$\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)$			+	+	
$\eta\mu(\eta\mu x)$			-	+	
$-\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x))$			+	-	
$-\sigma\upsilon\nu x \cdot (\eta\mu(\eta\mu x))$			+	-	
$f'(x)$			+	-	
$f(x)$			$\nearrow$	$\searrow$	

$$\varepsilon) \ln\left(\frac{\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))}\right) + f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))) - \ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))) + f(x) - 1 = 0$. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))) - \ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))) + f(x) - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Θα βρούμε την μονοτονία της g με δύο τρόπους:

1^{ος} τρόπος (Χωρίς Παραγώγους):

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$\overset{\eta\mu x \nearrow}{-} \Rightarrow 0 \leq \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \leq 1 < \overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 0 < \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2) < \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\overset{\varepsilon\varphi x \nearrow}{\Rightarrow} 0 < \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2)) < \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1)) \leq \varepsilon\varphi 1 < \overset{\ln x \nearrow}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2))) < \ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1))) \Rightarrow$$

$$\ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_1))) > \ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x_2))) \quad (5)$$

$$\overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow}{-} \Rightarrow 0 \leq \sigma\upsilon\nu x_2 < \sigma\upsilon\nu x_1 \leq 1 < \overset{\varepsilon\varphi \nearrow}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow 0 \leq \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_2) < \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_1) \leq \varepsilon\varphi 1 < \overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\overset{\sigma\upsilon\nu x \searrow}{\Rightarrow} 0 < \sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_1)) < \sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_2)) \leq 1 \Rightarrow$$

$$\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_1))) < \ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_2))) \Rightarrow$$

$$\ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_1))) > \ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x_2))) \quad (6)$$

$$\overset{f \searrow}{-} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) - 1 > f(x_2) - 1 \quad (7)$$

$$(5)+(6)+(7): g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

2^{ος} τρόπος (Με Παραγώγους):

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)))'}{\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))} - \frac{(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)))'}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))} + f'(x) = \\ &= \frac{-\eta\mu(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))} - \frac{\eta\mu((\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))} - \\ &\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)) - \sigma\upsilon\nu x(\eta\mu(\eta\mu x)) = \\ &= -\frac{\eta\mu(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x)) \cdot \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x))} - \frac{\eta\mu((\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x))) \cdot \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x)) \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\sigma\upsilon\nu x)} - \\ &\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu(\sigma\upsilon\nu x)) - \sigma\upsilon\nu x(\eta\mu(\eta\mu x)) \end{aligned}$$

Ισχύει $g'(x) < 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ επειδή $x, \eta\mu x, \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x), \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα επειδή η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε η g είναι γνησίως φθίνουσα. Η g είναι συνεχής ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων και έχουμε:

$$g(0) = \ln(\varepsilon\varphi 1) - \ln(\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)) + \eta\mu 1 = \ln\left(\frac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)}\right) + \eta\mu 1 > 0 \quad \text{γιατί}$$

$$\varepsilon\varphi 1 > \sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\varepsilon\varphi 1}{\sigma\upsilon\nu(\varepsilon\varphi 1)}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu 1 > 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu 1)) + \sigma\upsilon\nu 1 - 1 < 0 \quad \text{γιατί}$$

$$0 < \sigma\upsilon\nu 1 < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu 1) < 1 \Leftrightarrow \ln(\varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu 1)) < 0 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu 1 < 1$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): g(x_0) = 0$ όμως η g είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα αυτό.

$$\mathbf{113. \alpha)} \quad x^2 f^2(x) - \ln^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{(-\ln x)^2}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = \frac{\ln^2 x}{x^2} \Leftrightarrow |f(x)| = \left| \frac{\ln x}{x} \right| \quad (1)$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\ln x}{x} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln 2 < 0$ άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, οπότε η (1)

γίνεται: $-f(x) = -\frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Είναι $f(e) = \frac{1}{e} > 0$ άρα $f(x) > 0$ για

κάθε $x \in (1,+\infty)$, οπότε η (1) γίνεται: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Για $x = 1$: $f(1) = \ln 1 = 0$ άρα είναι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x}, & 0 < x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

παράγωγο: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x > 0$ και έχουμε

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq e. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο } e$$

άρα έχουμε για $x \in (0, e)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, e]$ και επίσης έχουμε ότι για

$x \in (e, +\infty)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [e, +\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x

$$= e \text{ το } f(e) = \frac{1}{e}.$$

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}, x > 0 \text{ και έχουμε}$$

$$\text{ότι: } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x - 3}{x^3} \geq 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 2\ln x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{e^3}$$

Αφού η f' είναι συνεχής στο $x = \sqrt{e^3}$ τότε για

$$x > \sqrt{e^3} \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [\sqrt{e^3}, +\infty).$$

Εφαρμόζουμε στο διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq [\sqrt{e^3}, +\infty)$ το ΘΜΤ για την συνάρτηση f

και έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{\ln \beta}{\beta} - \frac{\ln \alpha}{\alpha}}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{\alpha \ln \beta - \beta \ln \alpha}{\alpha \beta}}{\beta - \alpha} = \frac{\alpha \ln \beta - \beta \ln \alpha}{\alpha \beta (\beta - \alpha)}$$

$$\text{Για } \sqrt{e^3} < \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow \frac{1 - \ln \alpha}{\alpha^2} < \frac{\alpha \ln \beta - \beta \ln \alpha}{\alpha \beta (\beta - \alpha)} < \frac{1 - \ln \beta}{\beta^2}$$

$$\delta) \text{ Αν } \gamma \in (0, e) \text{ έχουμε: } \gamma < \gamma + 1 \Leftrightarrow f(\gamma) < f(\gamma + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln \gamma}{\gamma} < \frac{\ln(\gamma + 1)}{\gamma + 1} \Leftrightarrow$$

$$(\gamma + 1) \ln \gamma < \gamma \ln(\gamma + 1) \Leftrightarrow \gamma^{\gamma+1} < (\gamma + 1)^\gamma. \text{ Αν } \gamma \in (e, +\infty) \text{ έχουμε:}$$

$$\gamma < \gamma + 1 \Leftrightarrow f(\gamma) > f(\gamma + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln \gamma}{\gamma} > \frac{\ln(\gamma + 1)}{\gamma + 1} \Leftrightarrow (\gamma + 1) \ln \gamma > \gamma \ln(\gamma + 1) \Leftrightarrow$$

$$\gamma^{\gamma+1} > (\gamma + 1)^\gamma. \text{ Αν } \gamma = e, \text{ τότε επειδή η } f \text{ έχει μέγιστο στο } x = e, \text{ είναι}$$

$$f(e + 1) < f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln(e + 1)}{e + 1} < \frac{\ln e}{e} \Leftrightarrow e \ln(e + 1) < (e + 1) \ln e \Leftrightarrow$$

$$\ln(e + 1)^e < \ln e^{(e+1)} \Leftrightarrow (e + 1)^e < e^{(e+1)}$$

$$\epsilon) \text{ Είναι } e^x > x^{\lambda - e} \Leftrightarrow x > (\lambda - e) \ln x \quad (1). \text{ Είναι } e \leq \lambda < 2e \Leftrightarrow 0 < \lambda - e \leq e$$

Αν $\lambda = e$ τότε η (1) ισχύει αφού $x > 0$.

$$\text{Αν } e < \lambda < 2e \text{ τότε η (1) γίνεται } \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\lambda - e} \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{\lambda - e} \quad (2)$$

Η f έχει μέγιστο το $\frac{1}{e}$ άρα για να ισχύει η (2) πρέπει

$$\frac{1}{e} < \frac{1}{\lambda - e} \Leftrightarrow e > \lambda - e \Leftrightarrow \lambda < 2e \text{ ισχύει.}$$

$$\sigma) \left(\sqrt[n]{v} \right)^x = x \Leftrightarrow v^x = x^v \Leftrightarrow \ln v^x = \ln x^v \Leftrightarrow x \ln v = v \ln x \Leftrightarrow .$$

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln v}{v} \Leftrightarrow f(x) = f(v). \text{ Αν } v = 2 \text{ τότε η εξίσωση έχει μοναδική και}$$

προφανή ρίζα στο $(0, e]$ την $x = 2$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } f(e) = \frac{1}{e}.$$

Στο διάστημα $[e, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f([e, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right] = \left(0, \frac{1}{e} \right]. \text{ Θα εξετάσουμε αν } \frac{\ln 2}{2} \in f([e, +\infty)) :$$

Είναι $2 < e \Leftrightarrow f(2) < f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} < \frac{1}{e}$ και επειδή επίσης $\frac{\ln 2}{2} > 0$ υπάρχει

$\rho \in f([e, +\infty))$: $g(\rho) = \frac{\ln 2}{2}$ άρα στο διάστημα $[e, +\infty)$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = \rho$ άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, +\infty)$ σε αυτήν την περίπτωση.

Αν $v > 2$ τότε η εξίσωση έχει μοναδική και προφανή ρίζα στο $[e, +\infty)$ την $x = v$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty$, $f(e) = \frac{1}{e}$ και η f είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$ τότε έχουμε: $f((0, e]) = (-\infty, e]$.

Θα εξετάσουμε αν το $\frac{\ln v}{v} \in f((0, e])$: Είναι $v > e \Leftrightarrow f(v) < f(e) \Leftrightarrow f(v) < \frac{1}{e}$

άρα υπάρχει $\rho \in f((0, e])$: $f(\rho) = \frac{\ln v}{v}$ άρα στο διάστημα $(0, e]$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = \rho$ άρα έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0, +\infty)$ σε αυτήν την περίπτωση.

114. α) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ και η εφαπτομένη της f στο M είναι

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Επειδή διέρχεται από το $(0, 0)$ είναι

$$-f(x_0) = -x_0 f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Αφού ισχύει για όλες τις εφαπτόμενες τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $xf'(x) - f(x) = 0$.

$$\text{Για } x \neq 0 \text{ είναι } \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{x \neq 0 f(x)}{x} = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} xc_1, & x < 0 \\ xc_2, & x > 0 \end{cases}. \text{ Επειδή η } f \text{ περιττή τότε για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει}$$

$$f(-x) = -f(x). \text{ Για } x = 0: f(0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ και για}$$

$$x = 1: f(-1) = -f(1) = -1.$$

Για $x = 1: c_1 = 1$ και για $x = -1: c_2 = 1$ άρα τελικά

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x, x \in \mathbb{R}$$

Άρα είναι $g(x) = \sqrt{4f(x)-4} = \sqrt{4(x-1)} = 2\sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.

β) Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} > 0$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$ η g είναι συνεχής στο 1 και $g \nearrow [1, +\infty)$ είναι 1-1 και αντιστρέφεται. $g \nearrow [1, +\infty)$ και συνεχής άρα

$g([1, +\infty)) = [g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = [0, +\infty)$. Άρα για $x \in [1, +\infty)$ και $y \in [0, +\infty)$:

$$g(x) = y \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = y \Leftrightarrow 4(x-1) = y^2 \Leftrightarrow x-1 = \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{y^2+4}{4} \Leftrightarrow$$

$$g^{-1}(y) = \frac{y^2+4}{4}, y \geq 0 \text{ άρα τελικά } g^{-1}(x) = \frac{x^2+4}{4}, x \geq 0.$$

γ) Ισχύουν $g(x) = g^{-1}(y) \Leftrightarrow g(g(x)) = y$ και $g(y) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(g(y)) = x$

Αν $x < y \stackrel{g \nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) < g(y) \stackrel{g \nearrow}{\Leftrightarrow} g(g(x)) < g(g(y)) \Leftrightarrow y < x$ Άτοπο.

Ομοίως αν $x > y$ καταλήγουμε σε άτοπο άρα τελικά $x = y$.

Άρα αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $g(x) = g^{-1}(x)$

$$g(x) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \frac{x^2+4}{4} \Leftrightarrow 8\sqrt{x-1} - x^2 - 4 = 0$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = 8\sqrt{x-1} - x^2 - 4$, $x \geq 1$ η οποία είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $h'(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}} - 2x = \frac{4-2x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$.

$$\text{Είναι } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4-2x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow 4-2x\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x-1) = 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ γιατί}$$

$$x^2+x+2 > 0 \text{ αφού } \Delta = -7 < 0. \text{ Επίσης } \sqrt{x-1} > 0 \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και}$$

$$4-2x\sqrt{x-1} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+x+2) > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$ άρα η h συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα $h \nearrow [1, 2]$, $h \searrow [2, +\infty)$

και παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x = 2$ το $h(2) = 0$.

Επομένως μοναδική ρίζα το 2 άρα $x = y = 2$.

δ) Είναι $y(t) = g(x(t)) = 2\sqrt{x(t)-1}$, $x'(t) = 1 \text{ m/sec}$, $x(t_0) = 2$ και $y(t_0) = 2$.

ι) Το τρίγωνο έχει βάση $(AB) = 1$ και ύψος $y(t) = 2\sqrt{x(t)-1}$

$$\text{Άρα είναι } E(t) = \frac{1}{2} |AB| |2\sqrt{x(t)-1}| = \frac{1}{2} (AB) (2\sqrt{x(t)-1}) = \sqrt{x(t)-1}$$

$$\text{Είναι } E'(t) = \frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x(t)-1}} \cdot \Gamma\iota\alpha$$

$$t = t_0 : E'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{x(t_0)-1}} = \frac{1}{2} \text{ m}^2 / \text{sec}$$

ii) Η ταχύτητα απομάκρυνσης του Μ από την αρχή των αξόνων είναι ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του Μ από την αρχή των αξόνων. Είναι

$$(OM) = d(t) = \sqrt{x^2(t) + 4x(t) - 4} \text{ και}$$

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 4x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + 4x(t) - 4}} = \frac{x(t)x'(t) + 2x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + 4x(t) - 4}} = \frac{x(t) + 2}{\sqrt{x^2(t) + 4x(t) - 4}}$$

$$\Gamma\iota\alpha \ t = t_0 : d'(t_0) = \frac{x(t_0) + 2}{\sqrt{x^2(t_0) + 4x(t_0) - 4}} = \frac{2 + 2}{\sqrt{4 + 8 - 4}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} / \text{sec}$$

34

Επαναληπτικά διαγωνίσματα

ΘΕΜΑ Α

A1. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad \text{αφού η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη}$$

στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

A2. Αν μια συνάρτηση f είναι:

• συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$

• παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και

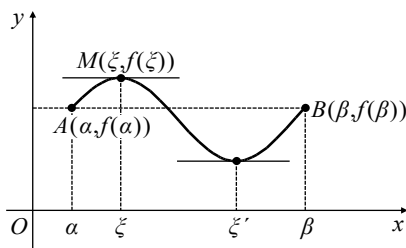
• $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει

ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο

$M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



A3. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f . **A4.** α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

B1. Η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο., οπότε η f είναι γνησίως μονότονη.

B2. Για $x = 1$ είναι $f(1) = -f(2-1) \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, το $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

B3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Είναι $g(1) = \frac{f(1)}{f'(1)} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x - 1} \cdot \frac{1}{f'(x)} \right) = f'(1) \cdot \frac{1}{f'(1)} = 1.$$

Είναι $g'(1) = 1$ άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο

στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

B4. Για $x=0$ η σχέση $f(x) = -f(2-x)$ γίνεται $f(0) = -f(2) = 1$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi_1 \in (0,1)$ και $\xi_2 \in (1,2)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) = f(1) - f(0) = -1$ και $f'(\xi_2) = f(2) - f(1) = -1$. Επειδή $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ και η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) , σύμφωνα με το Θ. Rolle, η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ξ_1, ξ_2) .

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $g(x) = f'(x)f(x) - x^2$, $x \in [-1,1]$. Είναι $g(-1) = g(1) = -1$ και g συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με

$$g'(x) = f''(x)f(x) + (f'(x))^2 - 2x, \text{ οπότε σύμφωνα με το Θ. Rolle, υπάρχει}$$

$$\xi \in (-1,1) \text{ τέτοιο, ώστε: } g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f''(\xi)f(\xi) = 2\xi - (f'(\xi))^2.$$

Γ2. Επειδή $f(-1) = f(1)$, λόγω του Θ. Rolle για την f , υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$. Είναι $f \cup \mathbb{R} \Leftrightarrow f' \not\cup \mathbb{R}$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi_1 \in (-1,0)$ και $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1) = f(0) - f(-1) = f(0) \text{ και } f'(\xi_2) = f(1) - f(0) = -f(0).$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(0) < -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) < 0 \Leftrightarrow f(0) < 0.$$

$$\textbf{Γ3. } f^2(x_0) + x_0(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0 - 1} f(x_0) + x_0 = 0. \text{ Έστω}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{x-1} f(x) + x, x \in [0,1]. \text{ Είναι } h(0) = -f^2(0) < 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x)}{x-1} f(x) + x \right) = f'(1)f(1) + 1 = 1 > 0, \text{ οπότε υπάρχει}$$

$$\alpha \in (0,1) \text{ το οποίο βρίσκεται πολύ κοντά στο } 1, \text{ τέτοιο, ώστε } h(\alpha) > 0.$$

Επειδή $h(0)h(\alpha) < 0$ και η h είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$, λόγω του Θ. Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (0, \alpha) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) + x_0^2 - x_0 = 0$

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο $x=1$ έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = f'(1)x - f'(1).$$

Είναι $1 > x_0 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(1) > f'(x_0) = 0$. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq f'(1)x - f(1)$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(1)x - f(1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(1)x = +\infty$ είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \Gamma 5. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-2h) - 2f(x) + f(x+2h)}{4h^2} & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ h \rightarrow 0} \frac{-2f'(x-2h) + 2f'(x+2h)}{8h} = \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-2h) + f'(x+2h) - f'(x)}{4h} = \\ & \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\frac{f'(x-2h) - f'(x)}{4h} + \frac{f'(x+2h) - f'(x)}{4h} \right] = -\left(-\frac{2}{4}f''(x)\right) + \frac{2}{4}f''(x) = f''(x) \\ \text{γιατί } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+kh) - f'(x)}{h} & \stackrel{kh=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{\frac{u}{k}} = kf''(x) \end{aligned}$$

Θέμα Δ

Δ1. Λόγω Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = f(2) - f(1) = f(2) + 1. \text{ Είναι } f'(\xi) > 2 \Leftrightarrow f(2) + 1 > 2 \Leftrightarrow f(2) > 1 > 0.$$

Επειδή $f(1)f(2) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, λόγω του θ. Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$. Επειδή $f'(x) > 2 > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

$$\Delta 2. f(x) + 1 = f'(x) - e^x \Leftrightarrow e^x + 1 = f'(x) - f(x) \Leftrightarrow$$

$$e^{-x}(e^x + 1) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) \Leftrightarrow 1 + e^{-x} = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) \Leftrightarrow$$

$$(x - e^{-x})' = [e^{-x}f(x)]' \Leftrightarrow e^{-x}f(x) = x - e^{-x} + c \Leftrightarrow f(x) = xe^x - 1 + ce^x, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } f(1) = e - 1 + ce \Leftrightarrow c = -1, \text{ οπότε } f(x) = (x - 1)e^x - 1$$

$$\Delta 3. x = (\lambda + 1)e^{-x} + 1 \Leftrightarrow x - 1 = (\lambda + 1)e^{-x} \Leftrightarrow (x - 1)e^x = \lambda + 1 \Leftrightarrow f(x) = \lambda$$

$$\text{Είναι } f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x.$$

$$\text{Αν } x < 0 \text{ τότε } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0] \text{ και αν } x > 0: f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, f(0) = -2.$$

Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = (-2, -1)$. Στο διάστημα $A_2 = (0, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = (-2, +\infty)$. Αν $\lambda < -2$ τότε το λ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη. Αν $\lambda = -2$ τότε $\lambda \notin f(A_1), f(A_2)$,

άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στα διαστήματα A_1, A_2 . Επειδή $f(0) = -2$, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το $x = 0$.

Αν $-2 < \lambda < -1$ τότε $\lambda \in f(A_1), f(A_2)$, άρα η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα A_1, A_2 , οπότε έχει συνολικά δύο ρίζες.

Αν $\lambda \geq -1$ τότε $\lambda \notin f(A_1), \lambda \in f(A_2)$ οπότε η εξίσωση έχει μία ρίζα στο A_2 .

Δ4. Έστω $g(x) = (x-2)e^x - x - 4, x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = (x-1)e^x - 1 = f(x)$.

Έστω $x_1 > 0$ η ρίζα της f με βάση το προηγούμενο σκέλος ($\lambda = 0 \geq -1$).

Για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$.

Για κάθε $0 < x < x_1$ είναι $f(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [0, x_1]$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $x = 0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_1]$.

Για κάθε $x > x_1$ είναι $f(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [x_1, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$, άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

Επειδή $f(1) = -1 < 0, f(2) = e^2 - 1 > 0$, είναι $x_1 \in (1, 2)$, οπότε

$g(x_1) = (x_1-2)e^{x_1} - x_1 - 4 < 0$. Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, x_1)$ είναι

$g(\Delta_1) = (g(x_1), +\infty)$ και $0 \in g(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς

μια ρίζα στο Δ_1 . $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\left(1 - \frac{2}{x} \right) e^x - 1 - \frac{4}{x} \right) \right] = +\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (x_1, +\infty)$ είναι $g(\Delta_2) = (g(x_1), +\infty)$ και $0 \in g(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2 . Τελικά η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Δ5. α) Είναι $f''(x) = e^x + xe^x > 0$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

β) Παρατηρούμε ότι $f'(1) = e$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y + 1 = ex - e \Leftrightarrow y = ex - e - 1$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$$f(x) \geq ex - e - 1 \Leftrightarrow (x-1)e^x - 1 \geq ex - e - 1 \Leftrightarrow (x-1)e^x \geq ex - e \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

1ο Διαγώνισμα μέχρι τις παραγώγους

A1. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0

είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1) Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Επομένως,}$$

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα

$$\text{έχουμε } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα

$$\text{έχουμε } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3) \text{ Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε}$$

$$f'(x_0) = 0. \text{ Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.}$$

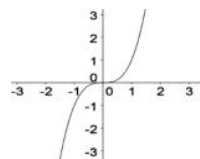
A2. α) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, αλλά δεν είναι

παραγωγίσιμη σ' αυτό, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \gamma) \text{ Έστω η συνάρτηση } f(x) = x^3.$$

Είναι $f'(x) = 3x^2$, και $f'(0) = 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, 0)$, που είναι το σημείο καμπής της, είναι ο άξονας $x'x$.



A3. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

A4. α) Λ $\beta)$ Λ $\gamma)$ Σ $\delta)$ Σ $\epsilon)$ Λ

Θέμα Β

$$\text{B1. Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = f(0)$$

άρα f συνεχής στο 0.

B2. Είναι $f'(x) = \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$. Για κάθε $0 < x < \frac{1}{e}$ είναι

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, \frac{1}{e}\right] \text{ και για κάθε } x > \frac{1}{e} \text{ είναι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Η f έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln e^{-1} = -\frac{1}{e}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$. Στο διάστημα $A_1 = \left(0, \frac{1}{e}\right]$ η f είναι

συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$f(A_1) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right]. \text{ Στο διάστημα } A_2 = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \text{ η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως}$$

αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

$$\text{Είναι } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

B3. $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$.

- Αν $\alpha < -\frac{1}{e}$ τότε $\alpha \notin f(A)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.

- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$ τότε για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f(x) > -\frac{1}{e}$, οπότε η

$x = \frac{1}{e}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης στη περίπτωση αυτή.

- Αν $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, τότε $\alpha \in f(A_1)$, $\alpha \in f(A_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει

μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ και $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

- Αν $\alpha \in [0, +\infty)$ τότε $\alpha \notin f(A_1)$ και $\alpha \in f(A_2)$, οπότε η εξίσωση έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

B4. Λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f , υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = f(x+1) - f(x). \text{ Είναι } f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0, +\infty).$$

$$\xi < x+1 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$$

Θέμα Γ

Γ1. $f \cup [0, +\infty) \Leftrightarrow f' \nearrow [0, +\infty)$. Για κάθε

$$x > 0 \Leftrightarrow f' \nearrow (x) > f'(0) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty). \text{ Για κάθε } x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) = 0$$

Γ2. $f \nearrow [0, +\infty) \Rightarrow f(1) - 1 \Rightarrow f$ αντιστρέφεται. Η εφαπτομένη της C_f στο $x = 0$ είναι η ευθεία $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x$. Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$, επειδή $f(x) > x$, είναι $f^{-1}(x) < x$ για κάθε $x > 0$. Άρα $f(x) > f^{-1}(x)$ για κάθε $x > 0$.

Γ3. Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) \geq x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = \lim_{f(x) \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Γ4. $x(f'(x) - f(x)) = f(x) \Leftrightarrow xf'(x) - xf(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$$xf'(x) - f(x) = xf(x) \Leftrightarrow \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = ce^x \Leftrightarrow f(x) = xce^x, c \in \mathbb{R}, x > 0. \text{ Είναι } f(1) = e \Leftrightarrow c = 1 \text{ άρα}$$

$$f(x) = xe^x, x > 0$$

Γ5. $g(x) = \frac{x^{2\alpha} e^{(-\alpha^2 + \alpha)x}}{f^\alpha(x)} = \frac{x^{2\alpha} e^{(-\alpha^2 + \alpha)x}}{x^\alpha e^{\alpha x}} = x^\alpha e^{-\alpha^2 x}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$$(0 + \infty) \text{ με } g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-\alpha^2 x} (1 - \alpha x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ και για κάθε $x > \frac{1}{\alpha}$ είναι

$$g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow \left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right). \text{ Η } g \text{ έχει μέγιστο το } g\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^{-\alpha} e^{-\alpha}. \text{ Έστω}$$

$$h(\alpha) = \alpha^{-\alpha} e^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln \alpha} e^{-\alpha} = e^{-\alpha \ln \alpha - \alpha}, \alpha > 0.$$

$$h'(\alpha) = e^{-\alpha \ln \alpha - \alpha} (-\ln \alpha - 2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \alpha \leq -2 \Leftrightarrow \alpha \leq e^{-2}. \text{ Για κάθε } 0 < \alpha < e^{-2}$$

είναι $h'(\alpha) > 0 \Rightarrow h \nearrow (0, e^{-2}]$ και για κάθε $\alpha > e^{-2}$ είναι

$$h'(\alpha) < 0 \Rightarrow h \searrow [e^{-2}, +\infty). \text{ Η } h \text{ έχει μέγιστο για } \alpha = e^{-2}.$$

Θέμα Δ

Δ1. $f^2(x) = x \ln x - \ln x = (x-1) \ln x \quad (1)$

Για κάθε $x > 1$ είναι $x-1 > 0, \ln x > 0$ άρα $(x-1) \ln x > 0$ και για κάθε

$x \in (0,1)$ είναι $x-1 < 0$, $\ln x < 0$ άρα $(x-1)\ln x > 0$. Δηλαδή $(x-1)\ln x > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Είναι

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Οπότε για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}$ ή $f(x) = -\sqrt{(x-1)\ln x}$ και για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f(x) = \sqrt{(x-1)\ln x}$ ή $f(x) = -\sqrt{(x-1)\ln x}$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x-1)\ln x}, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 1 \\ \sqrt{(x-1)\ln x}, & x \in (1,+\infty) \end{cases} = \sqrt{(x-1)\ln x}, \quad x > 0 \quad \text{ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{(x-1)\ln x}, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 1 \\ -\sqrt{(x-1)\ln x}, & x \in (1,+\infty) \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} -\sqrt{(x-1)\ln x}, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 1 \\ \sqrt{(x-1)\ln x}, & x \in (1,+\infty) \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{(x-1)\ln x}, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 1 \\ -\sqrt{(x-1)\ln x}, & x \in (1,+\infty) \end{cases} = -\sqrt{(x-1)\ln x}, \quad x > 0$$

Δ2. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $t(x) = \sqrt{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $t'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, οπότε: Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{[(x-1)\ln x]'}{2\sqrt{(x-1)\ln x}} = \frac{\ln x + \frac{x-1}{x}}{2\sqrt{(x-1)\ln x}} = \frac{x \ln x + x - 1}{2x\sqrt{(x-1)\ln x}}. \text{ Στο } x = 1 \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{(x-1)\ln x}{(x-1)^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{\ln x}{x-1}}. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } \varphi(x) = \ln x, \quad x > 0. \text{ Η } \varphi \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \varphi'(1) = 1, \text{οπότε} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \sqrt{\varphi'(1)} = 1 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{(x-1)\ln x}}{-\sqrt{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\sqrt{\frac{(x-1)\ln x}{(x-1)^2}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\sqrt{\frac{\ln x}{x-1}} \right) = -\sqrt{\varphi'(1)} = -1 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

Δ3. Για να βρούμε το πρόσημο της $f'(x) = \frac{x \ln x + x - 1}{2x\sqrt{(x-1)\ln x}}$, αρκεί να βρούμε

το πρόσημο της παράστασης $x \ln x + x - 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x \ln x + x - 1, x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + 1 = \ln x + 2$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq e^{-2}$. Για κάθε $x \in (0, e^{-2})$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0, e^{-2}]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (e^{-2}, +\infty)$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[e^{-2}, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[e^{-2}, +\infty)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική στο διάστημα αυτό. Για κάθε

$$e^{-2} \leq x < 1 \stackrel{g'}{\Rightarrow} g(x) < g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [e^{-2}, 1]$$

Για κάθε $x > 1 \stackrel{g'}{\Rightarrow} g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + x - 1) = -1$ και

$$g(e^{-2}) = e^{-2} \ln e^{-2} + e^{-2} - 1 = -\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} - 1 = -\frac{1}{e^2} - 1 < 0.$$

Στο διάστημα $\Delta = (0, e^{-2})$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει

αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta) = \left(-\frac{1}{e^2} - 1, -1 \right)$, άρα για κάθε $x \in (0, e^{-2})$

είναι $g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, e^{-2})$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = e^{-2}$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, οπότε έχει ελάχιστο το $f(1) = 0$.

Δ4. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, για κάθε $0 < \alpha < \beta < 1$ είναι $f(\alpha) > f(\beta)$. Για κάθε $1 < \alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$. Άρα σε κανένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,+\infty)$ δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f . Αν τώρα επιλέξουμε $\alpha \in (0,1)$ και $\beta \in (1,+\infty)$, τότε επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1, δεν θα είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) , οπότε και πάλι δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f .

Δ5. $f^2(x) = 4 - x^2$

Αν $4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \xrightarrow{x>0} x > 2$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \xrightarrow{x>0} 0 < x \leq 2$, έχουμε:

$$f^2(x) = 4 - x^2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 4 - x^2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x + x^2 - 4 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x-1)\ln x + x^2 - 4$, $x \in (0,2]$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ με

$$h'(x) = \ln x + (x-1)\frac{1}{x} + 2x = \ln x + 1 - \frac{1}{x} + 2x \text{ και}$$

$$h''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 2 > 0 \Rightarrow h' \nearrow (0,2].$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + 1 - \frac{1}{x} + 2x \right) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\ln x + 1 - \frac{1}{x} + 2x \right) = \ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + 4 = \ln 2 + \frac{9}{2} > 0$$

Η h' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το

$$h'((0,2)) = \left(-\infty, \ln 2 + \frac{9}{2} \right). \text{ Επειδή το μηδέν περιέχεται στο σύνολο τιμών της}$$

h' , υπάρχει μοναδικό $\rho \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\rho) = 0$.

Για κάθε $0 < x < \rho \Rightarrow h'(x) < h'(\rho) = 0 \Rightarrow h \searrow (0,\rho]$ και για κάθε

$\rho < x < 2 \Rightarrow h'(x) > h'(\rho) = 0 \Rightarrow h \nearrow [\rho,2]$. Η h έχει ελάχιστο στο ρ .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x-1)\ln x + x^2 - 4] = -1(-\infty) + 0 - 4 = +\infty \text{ και}$$

$h(2) = \ln 2 > 0$. Θα αναζητήσουμε τώρα το πρόσημο του ελαχίστου.

Είναι $h'(1) = 2 > 0$, και επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} h'(x) = -\infty$, στο διάστημα $(0,1)$ είναι

$h'((0,1)) = (-\infty, 2)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $(-\infty, 2)$, η h' έχει ρίζα στο $(0,1)$. Όμως το ρ είναι η μοναδική της ρίζα, άρα $\rho \in (0,1)$. Είναι

$h(1) = -3 < 0$ και $\rho < 1 \Leftrightarrow h(\rho) < h(1) < 0$. Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, \rho)$ η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $h(\Delta_1) = (h(\rho), +\infty)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (0, 2)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $h(\Delta_2) = (h(\rho), \ln 2)$. Επειδή $0 \in h(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $h(x_2) = 0$.

Τελικά η h έχει ακριβώς δύο ρίζες.

2ο Διαγώνισμα μέχρι τις παραγώγους

Θέμα Α

A1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει

$f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και είναι συνεχής ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

A3. α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Είτε ορίσουμε την $f \circ g$ είτε την $g \circ f$ και οι δύο έχουμε πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

και ισχύει $(f \circ g)(x) = g^2(x) = |x|^2 = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$(g \circ f)(x) = |f(x)| = |x^2| = x^2, \quad x \in \mathbb{R} \text{ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες}$$

συναρτήσεις. Και η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση όμως η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν.

A4. Ο μαθητής κάνει λάθος καθώς ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ τότε είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 \text{ και δεν}$$

έχουμε απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Θέμα Β

B1. Η f ορίζεται όταν $x > 0$ και $x - \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \ln x$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x \leq x - 1 < x \Leftrightarrow x - \ln x > 0$, οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

B2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$.

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e.$$

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, e]$,

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (e, +\infty)$ είναι

$f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[e, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα

στο διάστημα αυτό. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{e}{e-1}$.

$$\text{B3. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{(x - \ln x)^2}}{\frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \frac{1}{1 - \ln x} \right) = 0 \cdot 0 = 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \ln x} \stackrel{1 - \ln x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{1}{u} = 0$$

B4. Είναι $f(1) = \frac{1}{1 - \ln 1} = 1$. Αρχικά η ε διέρχεται από το σημείο A οπότε

$1 = \alpha + \beta$ (1). Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο A , είναι $f'(1) = \lambda_\varepsilon = \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει $\beta = 0$.

B5. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \frac{1}{x - \ln x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (0, e)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta) = \left(0, \frac{e}{e-1}\right)$. Είναι $\frac{2}{3} < \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow 2e - 2 < 3e \Leftrightarrow e > -2$

ισχύει. Επειδή το $2/3$ περιέχεται στο σύνολο τιμών της f , η εξίσωση $f(x) = \frac{2}{3}$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0, e)$.

Θέμα Γ

Γ1. Για $x > 0$:

$$f'(x) - f(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \frac{1-2\sqrt{x}^2}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = e^{-x} \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^{-x}\sqrt{x} \Leftrightarrow (e^{-x}f(x))' = (e^{-x}\sqrt{x})' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}f(x) = e^{-x}\sqrt{x} + c \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x} + ce^x \text{ και για } x = 1 \text{ είναι}$$

$$f(1) = \sqrt{1} + ce \Leftrightarrow ce = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$. Επειδή η f συνεχής στο $[0, +\infty)$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0. \text{ Άρα } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0.$$

Γ2. Πρέπει $\begin{cases} x \geq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ και είναι

$$g(x) = \frac{x+1}{f(x)} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}^2+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$$

$$\text{Είναι } \sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\kappa}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \leq 4 \Leftrightarrow g(\kappa) + g(\lambda) \leq 4$$

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο:

$$g'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{(\sqrt{x})^2}(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}, g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0, 1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η g έχει ελάχιστο το $g(1) = 2$. Επειδή η g έχει ελάχιστο το 2, ισχύει ότι $g(x) \geq 2$ για κάθε $x > 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $g(\kappa) \geq 2$, $g(\lambda) \geq 2$ και $g(\kappa) + g(\lambda) \geq 4$ (1). Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $g(\kappa) + g(\lambda) = 4 \Leftrightarrow g(\kappa) = g(\lambda) = 2 \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 1$

Γ3. Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = g(x(t))$ το υλικό σημείο. Είναι $x'(t) = 0,5 \text{ cm/sec}$. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι $y'(t) = (g(x(t)))' = g'(x(t))x'(t)$.

Έστω $t = t_0$ η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το A , τότε $x(t_0) = 4$, οπότε $y'(t_0) = g'(x(t_0))x'(t_0) = g'(4) \cdot 0,5 = \frac{4-1}{2 \cdot 4\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32} \text{ cm/sec}$

Γ4. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \text{ Η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } h'(x) = e^x$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ έχει εξίσωση:

$\varepsilon_1: y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$. Η εφαπτομένη της C_h στο σημείο $B(\beta, h(\beta))$ με $\beta \in \mathbb{R}$ έχει εξίσωση:

$\varepsilon_2: y - h(\beta) = h'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = h'(\beta)x - \beta h'(\beta) + h(\beta)$

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = h'(\beta) \\ -\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta h'(\beta) + h(\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = e^\beta \\ -\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} = -\beta e^\beta + e^\beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2e^\beta} \\ -\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2e^\beta} = -\beta e^\beta + e^\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2e^{2\beta}} \\ -\frac{1}{4e^\beta} + \frac{1}{2e^\beta} = -\beta e^\beta + e^\beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2e^{2\beta}} \\ -1 + 2 = -4\beta e^{2\beta} + 4e^{2\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2e^{2\beta}} \\ 4e^{2\beta} - 4\beta e^{2\beta} - 1 = 0 \end{cases}$$

Έστω η συνάρτηση $k(\beta) = 4e^{2\beta} - 4\beta e^{2\beta} - 1$, $\beta \in \mathbb{R}$. Η k είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο $k'(\beta) = 8e^{2\beta} - 4e^{2\beta} - 8\beta e^{2\beta} = 4e^{2\beta}(1 - 2\beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$

$$\text{Είναι } k'(\beta) \geq 0 \Leftrightarrow 4e^{2\beta}(1-2\beta) \geq 0 \stackrel{4e^{2\beta} > 0}{\Leftrightarrow} 1-2\beta \geq 0 \Leftrightarrow \beta \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Για κάθε } \beta < \frac{1}{2} \text{ είναι } k'(\beta) > 0 \text{ και η } k \text{ συνεχής άρα } k \nearrow \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Για κάθε } \beta > \frac{1}{2} \text{ είναι } k'(\beta) < 0 \text{ και η } k \text{ συνεχής άρα } k \searrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

$$\text{Η } k \text{ είναι συνεχής και } k \nearrow \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \text{ άρα}$$

$$k\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right) = \left(\lim_{\beta \rightarrow -\infty} k(\beta), k\left(\frac{1}{2}\right)\right) = (-1, 1] \text{ και } k \searrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ άρα}$$

$$k\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) = \left(\lim_{\beta \rightarrow +\infty} k(\beta), k\left(\frac{1}{2}\right)\right) = (-\infty, 1) \text{ γιατί}$$

$$- \lim_{\beta \rightarrow -\infty} (4\beta e^{2\beta}) = \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \frac{4\beta}{e^{-2\beta}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\beta \rightarrow -\infty} \frac{4}{-2e^{-2\beta}} = 0$$

$$- \lim_{\beta \rightarrow +\infty} k(\beta) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (4e^{2\beta} - 4\beta e^{2\beta} - 1) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} [4e^{2\beta}(1-\beta) - 1] = -\infty$$

$$\text{Το } 0 \in k\left(\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\right) \text{ και } 0 \in k\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) \text{ άρα η εξίσωση } k(\beta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4e^{2\beta} - 4\beta e^{2\beta} - 1 = 0 \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες (λόγω μονοτονίας) μία στο διάστημα } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \text{ και μία στο διάστημα } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right). \text{ Άρα έχουν δύο κοινές εφαπτομένες.}$$

Θέμα Δ Δ1. Για $x = 1$ είναι

$$\ln 1 + (f(e^2) - 2f(e))(1-1) \leq f(1) \leq f(e) \ln 1 + (f(e)-1)(1-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$\mathbf{\Delta 2.} \ln x + (f(e^2) - 2f(e))(x-1) \leq f(x) \leq f(e) \ln x + (f(e)-1)(x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln x + (f(e^2) - 2f(e))(x-1) \leq f(x) \Leftrightarrow \ln x + (f(e^2) - 2f(e))(x-1) - f(x) \leq 0$$

$$(1) \text{ και } f(x) \leq f(e) \ln x + (f(e)-1)(x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(e) \ln x - (f(e)-1)(x-1)^2 \leq 0 (2). \text{ Έστω}$$

$$b(x) = \ln x + (f(e^2) - 2f(e))(x-1) - f(x), \quad x > 0.$$

Από τη σχέση (1) ισοδύναμα έχουμε: $b(x) \leq 0 \Leftrightarrow b(x) \leq b(1)$, δηλαδή η συνάρτηση b έχει μέγιστο στο $x = 1$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η b είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$b'(x) = \frac{1}{x} + f(e^2) - 2f(e) - f'(x)$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι

$$b'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + f(e^2) - 2f(e) - f'(1) = 0 \Leftrightarrow f(e^2) = 2f(e) \quad (3)$$

Έστω $d(x) = f(x) - f(e) \ln x - (f(e) - 1)(x - 1)^2$, $x > 0$.

Από τη σχέση (2) ισοδύναμα έχουμε: $d(x) \leq 0 \Leftrightarrow d(x) \leq d(1)$, δηλαδή η συνάρτηση d έχει μέγιστο στο $x = 1$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η d είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$d'(x) = f'(x) - f(e) \frac{1}{x} - 2(f(e) - 1)(x - 1)$, λόγω του θεωρήματος Fermat είναι

$$d'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) - f(e) = 0 \Leftrightarrow f(e) = 1 \text{ και από την (3): } f(e^2) = 2.$$

Τότε η σχέση $\ln x + (f(e^2) - 2f(e))(x - 1) \leq f(x) \leq f(e) \ln x + (f(e) - 1)(x - 1)^2$ γίνεται: $\ln x \leq f(x) \leq \ln x \Leftrightarrow f(x) = \ln x$, $x > 0$

$$\Delta 3. f^2(x) = 2xf(x) - 1 \Leftrightarrow \ln^2 x - 2x \ln x + 1 = 0$$

Έστω $h(x) = \ln^2 x - 2x \ln x + 1$, $x \in (0, +\infty)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο

$$(0, +\infty) \text{ με: } h'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} - 2 \ln x - 2 \text{ και } h''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} - \frac{2}{x} = 2 \frac{1 - \ln x - x}{x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της h'' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1 - \ln x - x$. Έστω $\varphi(x) = 1 - \ln x - x$, $x \in (0, +\infty)$. Είναι

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} - 1 < 0 \text{ άρα η } \varphi \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } (0, +\infty).$$

Παρατηρούμε ότι $\varphi(1) = 0$. Για κάθε $x > 1$ είναι $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$, άρα

$h''(x) < 0$ και η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$h'(x) < h'(1) = -2 < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Για κάθε

$0 < x < 1$ είναι $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$, άρα $h''(x) > 0$ και η h' είναι γνησίως

αύξουσα στο $(0, 1]$. Άρα $h'(x) < h'(1) = -2 < 0$, οπότε η h είναι γνησίως

φθίνουσα στο $(0, 1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, είναι γνησίως

φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x - 2x \ln x + 1) = +\infty$,

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \right] = -\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \ln x}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Για το σύνολο τιμών της h έχουμε: $h((0, +\infty)) =$

$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \right) = \mathbb{R}$. Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$.

Δ4. Έστω $f(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$, $x > 0$. Η f είναι συνεχής στο $[x, x+1]$

και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $f'(t) = \frac{1}{t}$, οπότε λόγω του Θ.Μ.Τ υπάρχει

$$\xi \in (x, x+1) \text{ τέτοιο, ώστε : } f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x.$$

Είναι $x < \xi < x+1$ άρα $\frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

$$\textbf{Δ5. α)} \text{ Είναι : } g'(x) = \ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1} - \ln x - \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = (\ln(x+1) - \ln x) + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x} + \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} = -\frac{1}{x+1} < 0, \text{ άρα}$$

$g \searrow (0, +\infty)$.

$$\textbf{β)} (x+1)^x = x^{x+1} \Leftrightarrow \ln(x+1)^x = \ln x^{x+1} \Leftrightarrow x \ln(x+1) - (x+1) \ln x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

Είναι $g(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \ln x$. Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\stackrel{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0$$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Για το σύνολο τιμών της g , έχουμε

$$g(A) = g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right) = \mathbb{R}. \text{ Επειδή } 0 \in g(A) \text{ και } g$$

$\searrow (0, +\infty)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $g(x_1) = 0$.

35

Αρχική συνάρτηση

8. α) $F(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + c$ β) $F(x) = -\sin x - \eta\mu 2x + c$

γ) $F(x) = -e^{-x} + e^{2x} + c$

δ) $F'(x) = f(x) = e^x + 4x + \frac{2}{x} \Leftrightarrow$

$F'(x) = (e^x + 2x^2 + 2\ln x)' \Leftrightarrow F(x) = e^x + 2x^2 + 2\ln x + c$

ε) $F(x) = \varepsilon\phi x + \sigma\phi x + c$

στ) $F'(x) = f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^2} \Leftrightarrow F'(x) = 4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$

$F'(x) = \left(4x - 4\ln x - \frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow F(x) = 4x - 4\ln x - \frac{1}{x} + c$

ζ) $F'(x) = f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x + 3}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \sigma\upsilon\nu x - 1 + 4 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \Leftrightarrow$

$F'(x) = (\eta\mu x + 4\varepsilon\phi x - x)' \Leftrightarrow F(x) = \eta\mu x + 4\varepsilon\phi x - x + c$

η) $F'(x) = f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{2}} = \left(3 \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 6 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)' \Leftrightarrow$

$F(x) = 3 \cdot \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + 6 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^4} + 4\sqrt{x^3} + c = \frac{9}{4} x \sqrt[3]{x} + 4x\sqrt{x} + c$

9. α) $F'(x) = f(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (x)' e^{-x} + x(e^{-x})' \Leftrightarrow F(x) = xe^{-x} + c$

β) $F'(x) = f(x) = (x)' \eta\mu x + x(\eta\mu x)' \Leftrightarrow F(x) = x\eta\mu x + c$

γ) $F'(x) = f(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' \Leftrightarrow F(x) = x\ln x + c$

δ) $F'(x) = f(x) = \frac{(\eta\mu x)' \cdot x + \eta\mu x (x)'}{x^2} = \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)' \Leftrightarrow F(x) = \frac{\eta\mu x}{x} + c$

10. α) $F'(x) = f(x) = 4(x^2 + 4x - 1)^3 (x^2 + 4x - 1)' \Leftrightarrow F(x) = (x^2 + 4x - 1)^4 + c$

β) $F'(x) = f(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu x = \frac{1}{2}(\eta\mu x)' \eta\mu x = \left(\frac{1}{2} \eta\mu^2 x\right)' \Leftrightarrow F(x) = \frac{\eta\mu^2 x}{2} + c$

$$\gamma) F'(x) = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+8}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{6x+6}{\sqrt{3x^2+6x+8}} = \frac{1}{3} \frac{(3x^2+6x+8)'}{2\sqrt{3x^2+6x+8}} \Leftrightarrow$$

$$F'(x) = \left(\frac{\sqrt{3x^2+6x+8}}{3} \right)' \Leftrightarrow F(x) = \frac{\sqrt{3x^2+6x+8}}{3} + c$$

$$\delta) F'(x) = f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} = \ln^2 x \cdot (\ln x)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \ln^2 x \cdot (\ln x)' = \left(\frac{1}{3} \ln^3 x \right)' \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \frac{\ln^3 x}{3} + c$$

$$\epsilon) F'(x) = f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' = (e^{\sqrt{x}})' \Leftrightarrow F(x) = e^{\sqrt{x}} + c$$

$$\sigma\tau) F'(x) = f(x) = \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} = (\ln(x^2+4))' \Leftrightarrow F(x) = \ln(x^2+4) + c$$

$$\zeta) F'(x) = f(x) = f(x) = (\alpha x + \beta)' \sin(\alpha x + \beta) = (\eta \mu(\alpha x + \beta))' \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \eta \mu(\alpha x + \beta) + c$$

$$\eta) F'(x) = f(x) = 2^x - \frac{(3x+1)'}{3x+1} = \left(\frac{2^x}{\ln 2} - \ln(3x+1) \right)' \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} - \ln(3x+1) + c$$

$$\theta) F'(x) = f(x) = \sigma \varphi x = \frac{\sigma \eta \mu x}{\eta \mu x} = \frac{(\eta \mu x)'}{\eta \mu x} = (\ln |\eta \mu x|)' \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \ln |\eta \mu x| + c$$

$$\iota) F'(x) = f(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} = (\ln |e^x+1|)' \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \ln(e^x+1) + c$$

11. α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 1 = f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1$ άρα η f είναι συνεχής στο 0 και επειδή είναι συνεχής στα $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω F αρχική της f . Για $x \leq 0$ είναι $F(x) = x^2 + x + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$ ενώ

για $x > 0$ $F(x) = e^x + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Άρα $F(x) = \begin{cases} x^2 + x + c_1, & x \leq 0 \\ e^x + c_2, & x > 0 \end{cases}$ Όμως η F

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \Leftrightarrow$

$$c_1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = c_1 - 1. \text{ Άρα } F(x) = \begin{cases} x^2 + x + c_1, & x \leq 0 \\ e^x - 1 + c_1, & x > 0 \end{cases}, c_1 \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ άρα η f είναι συνεχής στο 0 και επειδή είναι συνεχής στα $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω F αρχική

της f . Για $x \leq 0$ είναι $F'(x) = \eta\mu x + x = \left(-\sin x + \frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow$

$$F(x) = -\sin x + \frac{x^2}{2} + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \text{ ενώ για } x > 0$$

$$F'(x) = \sin x - 1 = (\eta\mu x - x)' \Leftrightarrow F(x) = \eta\mu x - x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \Leftrightarrow -1 + c_1 = c_2.$$

$$\text{Άρα } F(x) = \begin{cases} -\sin x + \frac{x^2}{2} + c_1, & x \leq 0 \\ \eta\mu x - x - 1 + c_1, & x > 0 \end{cases}, c_1 \in \mathbb{R}.$$

γ) Είναι $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x < 2 \\ x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$, οπότε ανάλογα βρίσκουμε

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2x + c_1, & x < 2 \\ \frac{x^2}{2} - 2x + c_1 + 4, & x \geq 2 \end{cases}, c_1 \in \mathbb{R}.$$

δ) Έχουμε $f(x) = |2x(2x^2 + 1)| = 2|x| \cdot (2x^2 + 1)$ οπότε

$$f(x) = \begin{cases} -4x^3 - 2x, & x < 0 \\ 4x^3 + 2x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ και βρίσκουμε } F(x) = \begin{cases} -x^4 - x^2 + c_1, & x < 0 \\ x^4 + x^2 + c_1, & x \geq 0 \end{cases}, c_1 \in \mathbb{R}.$$

12.α) Θα εργαστούμε με την εις άτοπο απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι η f έχει παράγουσα την F . Τότε η F θα είναι παράγουσα της f σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$.

$$\text{Άρα η } F \text{ έχει μορφή } F(x) = \begin{cases} c_1, & x \leq 0 \\ x + c_2, & x > 0 \end{cases} \text{ με } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1^{ος} τρόπος: (Χρήση μόνον της παραγωγισιμότητας)

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο μηδέν άρα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x} - \cancel{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + c_2 - c_1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{c_2 - c_1}{x} \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{c_2 - c_1}{x} \right) = 0 \text{ όμως είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{c_2 - c_1}{x} \right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } c_1 = c_2 \\ +\infty, & \text{αν } c_1 < c_2 \\ -\infty, & \text{αν } c_1 > c_2 \end{cases} \text{ άρα σε καμία περίπτωση δεν είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{c_1 - c}{x} \right) = 0 \text{ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα η } f \text{ δεν έχει παράγουσα.}$$

2^{ος} τρόπος: (Χρήση συνέχειας και παραγωγισιμότητας)

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής.

Αφού F συνεχής στο μηδέν τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + c_2) \Leftrightarrow c_1 = c_2$$

$$\text{Άρα } F(x) = \begin{cases} c_1, & x \leq 0 \\ x + c_1, & x > 0 \end{cases} \text{ και λόγω της παραγωγισιμότητας στο μηδέν θα}$$

$$\text{ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x} - \cancel{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \cancel{x} - \cancel{x}}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \Leftrightarrow 0 = 1 \text{ πράγμα άτοπο}$$

άρα η f δεν έχει παράγουσα.

β) Θα εργαστούμε με την εις άτοπο απαγωγή.

Υποθέτουμε ότι η g έχει παράγουσα την G . Τότε η G θα είναι παράγουσα της g σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $(1, +\infty)$.

$$\text{Άρα η } G \text{ έχει μορφή } G(x) = \begin{cases} x^4 - x + c_1, & x \leq 1 \\ x^2 - x + c_2, & x > 1 \end{cases} \text{ με } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

1^{ος} τρόπος: (Χρήση μόνον της παραγωγισιμότητας)

Η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο $x_0 = 1$ άρα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{G(x) - G(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{G(x) - G(1)}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4 - x + \cancel{c_1} - \cancel{c_1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + c_2 - c_1}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \cancel{(x-1)} (x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x \cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} + \frac{c_1 - c_2}{x-1} \right)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} [x(x^2 + x + 1)] = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + \frac{c_2 - c_1}{x-1} \right) = \begin{cases} 1, & \text{αν } c_1 = c_2 \\ +\infty, & \text{αν } c_1 < c_2 \\ -\infty, & \text{αν } c_1 > c_2 \end{cases} \text{ άρα σε}$$

καμία περίπτωση δεν είναι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + \frac{c_2 - c_1}{x-1} \right) = 3$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα η g δεν έχει παράγονσα.

Αυξημένης δυσκολίας

13. Είναι $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = 1 + \frac{1}{\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^2} \cdot 2 \left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right) \left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)' = 1 + \frac{4\alpha}{x^2 - \alpha^2} = \frac{x^2 - \alpha^2 + 4\alpha}{x^2 - \alpha^2}$$

$$\text{Πρέπει } \frac{x^2 - \alpha^2 + 4\alpha}{x^2 - \alpha^2} = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 9} \Leftrightarrow$$

$$x^4 + (4\alpha - \alpha^2 - 9)x^2 + 9\alpha^2 - 36\alpha = x^4 + (3 - \alpha^2)x^2 - 3\alpha^2, \text{ οπότε}$$

$$\begin{cases} 4\alpha - \alpha^2 - 9 = 3 - \alpha^2 \\ 9\alpha^2 - 36\alpha = -3\alpha^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ 12\alpha^2 - 36\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ 12\alpha(\alpha - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \alpha = 0 \text{ ή } 3 \end{cases}$$

Άρα $\alpha = 3$.

14. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει $F'(x) = f(x)$. Είναι

$$F'(x) = 2(\alpha x + \beta)e^{2x} + e^{2x}\alpha = e^{2x}(2\alpha x + 2\beta + \alpha)$$

$$\text{Οπότε } e^{2x}(2\alpha x + 2\beta + \alpha) = e^{2x}(2x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2 \\ 2\beta + \alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Αρχική συνάρτηση και γραφική παράσταση

15.α) Έστω ότι η C παριστάνει την f τότε $M(x_1, y_1) \equiv M(x_1, 1)$ αφού

$$f(x_1) = 1 \text{ και η } (\varepsilon) \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσης } \lambda_\varepsilon = \frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{x_1}.$$

Άρα $f'(x_1) = \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow G''(x_1) = \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow x_1 G''(x_1) = 1$ πράγμα άτοπο.

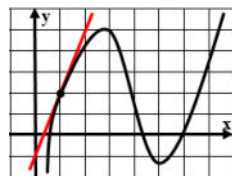
Άρα η C παριστάνει την G άρα η (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_e = G'(x_1) = f(x_1) = 1$ και επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι (ε): $y = x$. Επομένως $M(x_1, y_1) \equiv M(x_1, x_1)$ άρα $G(x_1) = x_1$, άρα η εξίσωση $G(x) = x$ έχει ρίζα.

β) Έστω ότι η C_f έχει εφαπτομένη την (ε), δηλαδή ότι οι f και G έχουν κοινή εφαπτομένη την (ε) σε κοινό τους σημείο έστω $N(x_0, x_0)$ αφού είναι και σημείο της (ε). Θα ισχύει ότι $G'(x_0) = f'(x_0) = 1$ και $G(x_0) = f(x_0) = x_0$. Όμως $G'(x_0) = f(x_0)$ και $G''(x_0) = f'(x_0)$ άρα $G'(x_0) = G''(x_0) = f(x_0) = f'(x_0) = 1 = x_0$ και τότε για $x = x_0 = 1$ στην αρχική σχέση έχουμε $x_0 G''(x_0) \neq 1 \Leftrightarrow 1 \cdot 1 \neq 1$ πράγμα άτοπο.

16. Αν F είναι μία αρχική της f τότε όλες οι αρχικές της f είναι της μορφής $F(x) + c$ με $c \in \mathbb{R}$. Άρα οι γραφικές τους παραστάσεις προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση μεταξύ τους και δεν έχουν κοινά σημεία. Το μόνο ζευγάρι που προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση μεταξύ τους είναι για τις C_1 , C_2 . Επίσης θα είναι $-f(x) = (-F(x))'$ άρα οι αρχικές της $-f$ είναι της μορφής $-F(x) + c$ με $c \in \mathbb{R}$, επομένως είναι η F συμμετρική ως προς τον $x'x$ άξονα και μετατοπισμένη κατακόρυφα κατά c. Μόνον η C_3 το ικανοποιεί.

17. Μία πιθανή λύση του μαθητή είναι να σχεδιάσει την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της αρχικής στο 1 όπως στο διπλανό σχήμα. Παρατήρησε ότι εκτός από το σημείο A(1,2) διέρχεται και από το

σημείο B(2,5) άρα έχει κλίση $\lambda_e = \frac{5-2}{2-1} = 3$ άρα η



παράγωγος της αρχικής στο 1, δηλαδή το $f'(1)$ ισούται με 3. Η λύση του μαθητή είναι τυχαία και δεν θα μπορούσε να βγαίνει σωστή πάντα, καθώς η σχεδίαση της εφαπτομένης δεν μπορεί να γίνει με ακρίβεια. Δεν θα μπορούσε να γνωρίζει ότι διέρχεται από το B(2,5).

18. Έστω ότι η f έχει παράγουσα F, τότε θα είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $F'(x) = f(x)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} F'(x) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F'(x) = 1 = F'(1).$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1^+} F'(x) = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 1^-} F'(x) = 0 \text{ άρα η } F \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } 1, \\ \text{πράγμα άτοπο}$$

Θεωρητικές ασκήσεις

19. Είναι $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = g(x)$ οπότε

$$\Phi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - g(x) = h(x)$$

$$\textbf{20.} \text{ Γνωρίζουμε ότι } \left. \begin{aligned} f(-x) &= f(x) \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned} \right\} \text{ οπότε } F'(-x) = f(-x) \quad (2)$$

Στην (1) θέτουμε όπου $x \rightarrow -x$ οπότε $F'(-x) = f(-x)$ (3)

Από (2), (3): $F'(-x) = F'(x) \Leftrightarrow F(-x) = -F(x) + c$. Είναι $F(0) = 0$ άρα $c = 0$

Αυξημένης δυσκολίας

21.α) Στην (1) $f(x) \cdot F(1-x) = e$ θέτουμε $x = 0$ οπότε

$$f(0) \cdot F(1) = e \Rightarrow 1 \cdot F(1) = e \Leftrightarrow F(1) = e$$

β) $g'(x) = F'(x)F(1-x) - F(x)F'(1-x) =$

$$f(x)F(1-x) - F(x)f(1-x) = e - e = 0$$

Γιατί αν στην (1) θέσω $x \rightarrow 1-x$ έχουμε $f(1-x)F(x) = e$

$$\text{Άρα } g(x) = c \Leftrightarrow F(x) \cdot F(1-x) = c \text{ και για } x = 0$$

$$F(0) \cdot F(1) = c \Leftrightarrow 1 \cdot e = c \Leftrightarrow c = e. \text{ Άρα } g(x) = e \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Από την (1) προκύπτει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού f συνεχής, διατηρεί πρόσημο. Επειδή $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $F'(x) = f(x) > 0$ οπότε $F \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

δ) Είναι $f(x) \cdot F(1-x) = e$ (2).

$$F(x)F(1-x) = e \quad (3) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ άρα } F(1-x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

από (2), (3) προκύπτει $F(x) = f(x)$ και παραγωγίζοντας $f'(x) = f(x)$. Άρα

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= c \cdot e^x \\ f(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 1, \text{ άρα } f(x) = e^x.$$

22.α) Στη σχέση $4aF(x^2) \geq 4a^2 + F^2(x)$ θέτουμε $x = 0$ και προκύπτει

$$(F(0) - 2\alpha)^2 \leq 0 \Leftrightarrow F(0) = 2\alpha, \text{ για } x = 1 \text{ και προκύπτει}$$

$$(F(1) - 2\alpha)^2 \leq 0 \Leftrightarrow F(1) = 2\alpha. \text{ Άρα } F(0) = F(1) = 2\alpha$$

β) Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την F στο $[0, 1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$:

$F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$ άρα η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο με τετμημένη $x_0 = \xi$.

$$\gamma) 4\alpha F(x^2) \geq 4\alpha^2 + F^2(x) \Leftrightarrow 4\alpha^2 + F^2(x) - 4\alpha F(x^2) \leq 0 \quad (1)$$

Έστω $g(x) = 4\alpha^2 + F^2(x) - 4\alpha F(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g(0) = g(1) = 0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x) \leq g(0)$ και $g(x) \leq g(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η g έχει μέγιστο στα $x = 0$ και $x = 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2F(x)f(x) - 8\alpha x f(x^2)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow 2F(0)f(0) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ και}$$

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow 2F(1)f(1) - 8\alpha f(1) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha f(1) - 8\alpha f(1) = 0 \Leftrightarrow -4\alpha f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0. \text{ Επομένως η } f \text{ έχει τουλάχιστον 3 ρίζες.}$$

23. Είναι $F(x)F(1-x) = F(x^2)$. Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$F'(x)F(1-x) - F(x)F'(1-x) = F'(x^2)2x \Leftrightarrow$$

$$f(x)F(1-x) - F(x)f(1-x) = 2xf(x^2) \quad (1) \text{ και για } x = 0 :$$

$$f(0)F(1) - F(0)f(1) = 0 \Leftrightarrow f(0)F(1) = F(0)f(1) \quad (2) \text{ και για } x = 1 :$$

$$f(1)F(0) - F(1)f(0) = 2f(1) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 0 = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0$$

24. Είναι $f(x) = e^{x^2}$ και $F'(x) = f(x)$. Επειδή

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} \geq e^0 \Leftrightarrow e^{x^2} \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq 1.$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την F στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$:

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow F(x) = xf(\xi) + F(0)$$

Επειδή $f(\xi) \geq 1$ τότε $xf(\xi) \geq x$ και $xf(\xi) + F(0) \geq x + F(0)$ όμως

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + F(0)) = +\infty \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(\xi) + F(0)) = +\infty \text{ δηλ. } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

25. Στην $F(x)G(x) = e^{-2x}$ για $x = 0$ έχουμε $F(0)G(0) = 1 \Leftrightarrow G(0) = 1$. Είναι

$$(F(x)G(x))' = (e^{-2x})' \Leftrightarrow f(x)G(x) + F(x)g(x) = -2e^{-2x} \quad (1). \text{ Όμως}$$

$$f(x)g(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^{-2x}}{g(x)} \text{ και } F(x)G(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow F(x) = \frac{e^{-2x}}{G(x)},$$

$$\text{οπότε η (1) γίνεται: } \frac{e^{-2x}}{g(x)} G(x) + \frac{e^{-2x}}{G(x)} g(x) = -2e^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$G^2(x) + g^2(x) + 2g(x)G(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(g(x) + G(x))^2 = 0 \Leftrightarrow g(x) + G(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x G'(x) + e^x G(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x G(x))' = 0 \Leftrightarrow e^x G(x) = c. \text{ Είναι } G(0) = 1, \text{ άρα } G(x) = e^{-x} \text{ και } g(x) = G'(x) = -e^{-x}. \text{ Τότε } -e^{-x} f(x) = e^{-2x} \Leftrightarrow f(x) = -e^{-x}.$$

$$\mathbf{26.α)} \Theta. \text{ Rolle για την } g(x) = F(x) - x^2 \text{ στο } [0,1] \text{ είναι } \left. \begin{array}{l} g(0) = F(0) \\ g(1) = F(1) - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$g(0) = g(1) \text{ και } g'(x) = F'(x) - 2x = f(x) - 2x \text{ οπότε υπάρχει λόγω του}$$

$$\Theta. \text{ Rolle υπάρχει } \xi_1 \in (0,1) : g'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_1) = 2\xi_1.$$

$$\mathbf{\beta)} \text{ Για } x \in (0,1) \text{ είναι } f(x) = \frac{F(1) - 1 - F(x)}{x - 1} \Leftrightarrow$$

$$F'(x)(x-1) + F(x) - F(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (F(x)(x-1) - xF(1) + x)' = 0$$

$$\Theta. \text{ Rolle για την } h(x) = F(x)(x-1) - F(0) \cdot x + x \text{ στο } [0,1].$$

$$\text{Είναι } h(0) = -F(0), \quad h(1) = -F(1) + 1 = -F(0) \text{ άρα } h(0) = h(1) \text{ και}$$

$$h'(x) = f(x)(x-1) + F(x) - (F(1) - 1) \text{ άρα υπάρχει } \xi_2 \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_2)(\xi_2 - 1) + F(\xi_2) = F(1) - 1 \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{F(1) - 1 - F(\xi_2)}{\xi_2 - 1}.$$

$$\mathbf{27.α)} \text{ Είναι } g'(x) = F'(x) - 4 = f(x) - 4 = \frac{4e^x + 3}{e^x + 4} - 4 = \frac{-13}{e^x + 4} < 0 \text{ άρα } g \searrow$$

$$\mathbf{\beta)} \text{ Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση } h(x) = f(x) - 4x \text{ ότι είναι γνησίως μονότονη οπότε η εξίσωση } h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4x \text{ θα έχει το πολύ μία ρίζα.}$$

$$\text{Είναι } h'(x) = f'(x) - 4 = \dots = \frac{-4e^{2x} - 19e^x - 64}{(e^x + 4)^2} < 0 \text{ οπότε η } h \text{ είναι } \searrow.$$

$$\mathbf{\gamma)} \text{ Εφαρμόζουμε } \Theta. \text{ M. T. για } F \text{ στο } [x, x+1] \text{ οπότε υπάρχει } \xi \in (x, x+1) :$$

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow (1) f(\xi) = F(x+1) - F(x). \text{ Είναι}$$

$$F'(x) = f(x) \text{ και } F''(x) = f'(x) = \frac{13e^x}{(e^x + 4)^2} > 0 \Rightarrow F' \nearrow \mathbb{R}^+. \text{Είναι}$$

$$x < \xi < x+1 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(\xi) < f(x+1) \Leftrightarrow f(x) < F(x+1) - F(x) < f(x+1)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x + 3}{e^x + 4} = 4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) \stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = 4 \text{ οπότε και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x+1) - F(x)] = 4$$

$$28. \text{Είναι } f\left(\frac{1}{x}\right)F(x) = 4x \quad (1)$$

α) Αφού $x > 0$ τότε $f\left(\frac{1}{x}\right)F(x) = 4x > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε $F(x) \neq 0$ και αφού F συνεχής και $F(1) = 2 > 0$ τότε $F(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

β) Στην (1) θέτω x το $\frac{1}{x}$ και προκύπτει $f(x)F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x}$ (2). Έστω

$$g(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)F(x) \text{ τότε } g'(x) = F'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)F(x) + F'\left(\frac{1}{x}\right)F(x) =$$

$$-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)F(x) + f(x)F\left(\frac{1}{x}\right) \stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{x^2}4x + \frac{4}{x} = 0 \text{ άρα } g(x) = c \Leftrightarrow F\left(\frac{1}{x}\right)F(x) = c$$

και για $x = 1$ είναι $c = F^2(1) = 4$ οπότε $F\left(\frac{1}{x}\right) \cdot F(x) = 4$ (3)

γ) Από (3) είναι $F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{F(x)}$ (4). Οπότε από (2) και (4) έχουμε

$$f(x) \frac{4}{F(x)} = \frac{4}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{F(x)}{x} \Leftrightarrow xF'(x) - F(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{xF'(x) - F(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{F(x)}{x}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} = c_1 \text{ για } x = 1 \text{ προκύπτει } c_1 = 2$$

άρα $F(x) = 2x$ οπότε $F'(x) = 2$ άρα $f(x) = 2, x > 0$.

29. α) Είναι $f(-x)F(x) = 4 > 0 \Rightarrow F(x) \neq 0$ και αφού F συνεχής και $F(1) = 2 > 0$ τότε $F(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^+$.

β) Είναι $f(-x)F(x) = 4$ και αντικαθιστώντας όπου x το $-x$ προκύπτει $f(x)F(-x) = 4$ (1), άρα $f(x)F(-x) = f(-x)F(x) \Leftrightarrow$

$$F'(x)F(-x) + (F(-x))' F(x) = 0 \Leftrightarrow (F(-x)F(x))' = 0 \Leftrightarrow F(-x)F(x) = c .$$

$$\text{Είναι } F(0) = 2 \Leftrightarrow c = 4 \text{ άρα } F(-x)F(x) = 4$$

$$\gamma) F(-x)F(x) = 4 \Leftrightarrow F(-x) = \frac{4}{F(x)} . \text{ Τότε η (1) γίνεται:}$$

$$f(x) \frac{4}{F(x)} = 4 \Leftrightarrow F(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = F'(x) \Leftrightarrow F(x) = c_1 e^x .$$

$$F(0) = 2 \Leftrightarrow c_1 = 2 \text{ άρα } F(x) = 2e^x \text{ και } f(x) = F'(x) = 2e^x .$$

Προβλήματα

$$30. \alpha) K'(x) = 3x^2 + 6x \text{ ανά προϊόν οπότε είναι}$$

$$\left. \begin{array}{l} K(x) = x^3 + 3x^2 + c \\ K(0) = 30.000 \end{array} \right\} \Leftrightarrow c = 30.000 , \text{ οπότε } K(x) = x^3 + 3x^2 + 30.000$$

$$\beta) K(10) = 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 30.000 = 31.300 \text{ €}$$

$$31. \text{Είναι } P'(t) = \frac{1}{5} e^{\frac{t}{5}} = \left(e^{\frac{t}{5}} \right)' \Leftrightarrow P(t) = e^{\frac{t}{5}} + c, c \in \mathbb{R} .$$

$$P(0) = 8000 \Leftrightarrow 1 + c = 8000 \Leftrightarrow c = 7999 . \text{ Άρα } P(t) = e^{\frac{t}{5}} + 7999 .$$

$$32. \text{Είναι } f'(t) = 350 + \frac{2}{5}t \text{ άρα } f(t) = 350t + \frac{1}{5}t^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0 \text{ οπότε } c = 0 \text{ και } f(t) = 350t + \frac{1}{5}t^2 . \text{ Η μέση ημερήσια παραγωγή}$$

$$\text{είναι } \bar{f} = \frac{f(300) - f(0)}{300 - 0} = \frac{350 \cdot 300 + 300 \cdot 60}{300} = 410 \text{ βιβλία.}$$

$$33. \text{Έστω } M(x(t), y(t)) \text{ με } x(1) = 2, x'(t) = 1 \text{ και}$$

$$y(t) = f(x(t)) = (x(t) - 2) \left(4(x(t) - 1)^2 - 3(x(t) - 1) + 1 \right) .$$

$$\text{Είναι } x'(t) = 1 \Leftrightarrow x'(t) = (t)' \Leftrightarrow x(t) = t + c \text{ και για } t = 1 \text{ είναι } c = 1 \text{ άρα}$$

$$x(t) = t + 1 \text{ άρα } y(t) = (t - 1)(4t^2 - 3t + 1) = 4t^3 - 7t^2 + 4t - 1$$

$$\text{Είναι } y'(t) = 12t^2 - 14t + 4 = 4(6t^2 - 7t + 2) \text{ άρα } y'(t) > 0 \text{ για κάθε}$$

$$t \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty \right) \text{ και } y'(t) < 0 \text{ για κάθε } t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right) . \text{ Άρα είναι}$$

$y(t) \nearrow \left[0, \frac{1}{2}\right], y(t) \searrow \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ και $y(t) \nearrow \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ άρα η $y(t)$ παρουσιάζει

τοπικό ελάχιστο για $t=0$ το $y(0)=-1$ και για $t=\frac{2}{3}$ το

$$y\left(\frac{2}{3}\right)=4\frac{8}{27}-7\frac{4}{9}+4\frac{2}{3}-1=\frac{32}{27}-\frac{28}{9}+\frac{8}{3}-1=\frac{32-84+72-27}{27}=-\frac{7}{27}.$$

Είναι $\frac{7}{27} < 1 \Leftrightarrow -1 < -\frac{7}{27} \Leftrightarrow y(0) < y\left(\frac{2}{3}\right)$ άρα η y παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $t=0$. Άρα το κινητό έχει την ελάχιστη τεταγμένη του για $t=0$.

34. Έστω $P(t)$ η τιμή του υπολογιστή. Επειδή η αξία του μειώνεται με ρυθμό ανάλογο της τιμής του είναι $P'(t) = -\alpha P(t)$, $\Leftrightarrow P'(t) + \alpha P(t) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^{\alpha t} P'(t) + \alpha e^{\alpha t} P(t) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\alpha t} P(t)\right)' = 0.$$

Άρα $e^{\alpha t} P(t) = c$. Αφού $P(0) = 1312$ τότε: $e^0 P(0) = c \Leftrightarrow c = 1312$

Άρα $e^{\alpha t} P(t) = 1312$, επίσης $P(2) = 820$, άρα

$$e^{2\alpha} P(2) = 1312 \Leftrightarrow e^{2\alpha} 820 = 1312 \Leftrightarrow e^{2\alpha} = 1,6 \Leftrightarrow 2\alpha = \ln 1,6 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln 1,6 \Leftrightarrow \alpha = \frac{0,47}{2} = 0,235. \text{Οπότε } e^{0,235t} P(t) = 1312 \Leftrightarrow P(t) = 1312 e^{-0,235t}$$

35. Είναι $Q'(t) = \kappa Q(t)$, $\kappa > 0$, τότε: $Q'(t) - \kappa Q(t) = 0 \Leftrightarrow$

$$Q'(t) e^{-\kappa t} - \kappa e^{-\kappa t} Q(t) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-\kappa t} Q(t)\right)' = 0. \text{ Άρα } e^{-\kappa t} Q(t) = c \Leftrightarrow Q(t) = c e^{\kappa t}.$$

$$\text{Είναι } Q(5) = 2Q(0) \Leftrightarrow c e^{5\kappa} = 2c \Leftrightarrow e^{5\kappa} = 2 \Leftrightarrow 5\kappa = \ln 2 \Leftrightarrow \kappa = \frac{1}{5} \ln 2 \quad (1).$$

Θέλουμε να βρούμε το χρόνο t όπου

$$Q(t) = 5Q(0) \Leftrightarrow c e^{\kappa t} = 5c \Leftrightarrow e^{\kappa t} = 5 \Leftrightarrow \kappa t = \overset{(1)}{\ln 5} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{5} \ln 2\right) t = \ln 5 \Leftrightarrow t = 5 \frac{\ln 5}{\ln 2} \Leftrightarrow t = 5 \cdot 2,32 = 11,6 \text{ h}.$$

Συνδυαστικές ασκήσεις

36.α) Είναι $f'(x)(f(x)+1) = e^{-f(x)} > 0$ άρα τα $f'(x)$ και $f(x)+1$ είναι

ομόσημοι. Επειδή η f έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ είναι

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)+1 \geq 1 > 0$, οπότε και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\beta) f'(x)f(x) + f'(x) = e^{-f(x)} \Leftrightarrow$$

$$f(x)f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^{f(x)})' = (x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{f(x)} = x + c, c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } f(0)e^{f(0)} = c \Leftrightarrow c=0, \text{ άρα}$$

$$f(x)e^{f(x)} = x \Leftrightarrow f(x) = xe^{-f(x)}, x \geq 0.$$

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y, y \in [0, +\infty)$, τότε $ye^y = x, f^{-1}(y) = ye^y, y \in [0, +\infty)$ άρα

$$f^{-1}(x) = xe^x, x \geq 0.$$

δ) Είναι $f'(x) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)+1}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως σύνθεση και

πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f''(x) = \frac{(e^{-f(x)})'(f(x)+1) - e^{-f(x)}f'(x)}{(f(x)+1)^2} = \frac{-e^{-f(x)}f'(x)(f(x)+1) - e^{-f(x)}f'(x)}{(f(x)+1)^2}$$

Επειδή $e^{-f(x)} > 0, f(x)+1 > 0, f'(x) > 0$, είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.

$$\epsilon) f^{-1}(x) \geq 2\alpha ex - 2\alpha e + e \Leftrightarrow xe^x - 2\alpha ex + 2\alpha e - e \geq 0 \quad (1)$$

Έστω $h(x) = xe^x - 2\alpha ex + 2\alpha e - e, x \geq 0$, τότε η (1) γίνεται $h(x) \geq h(1)$, άρα η

h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με

$h'(x) = e^x + xe^x - 2\alpha e$ και το $x=1$ βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού

της g, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι:

$$h'(1) = 0 \Leftrightarrow e + e - 2\alpha e = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

στ) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = [0, +\infty)$ έχει σύνολο

τιμών το $f(\Delta) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$, όμως η f έχει σύνολο τιμών

το $[0, +\infty)$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-f(x)}}{f(x)+1} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{e^{-u}}{u+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(e^{-u} \frac{1}{u+1} \right) = 0, \text{ οπότε η}$$

C_g έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=0$ δηλαδή τον άξονα $x'x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{1} = f'(0) = 1 \text{ άρα η } C_g \text{ δεν έχει κατακόρυφες}$$

ασύμπτωτες.

Τέλος επειδή η C_g έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ζ) Αρχικά θα εξετάσουμε αν η ευθεία $y = \frac{x+e}{2e} = \frac{1}{2e}x + \frac{1}{2}$ είναι εφαπτομένη της

$$C_f. \text{ Είναι } f'(x_0) = \frac{1}{2e} \Rightarrow \frac{1}{2e}(f(x_0)+1) = e^{-f(x_0)} \Leftrightarrow 2e^{1-f(x_0)} - f(x_0) - 1 = 0 \quad (3)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = 2e^{1-x} - x - 1, x \geq 0$. Είναι

$$\varphi'(x) = -2e^{1-x} - 1 < 0 \Rightarrow \varphi \searrow [0, +\infty). \text{ Η (3) γίνεται:}$$

$\varphi(f(x_0)) = \varphi(1) \Leftrightarrow f(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 = f^{-1}(1) = e$ Η εφαπτομένη της A_f στο $x_0 = e$ είναι η ευθεία:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2e}(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{x - e}{2e} + 1 = \frac{x + e}{2e}$$

Επειδή η f είναι κοίλη, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \leq \frac{x+e}{2e}$ για κάθε $x \geq 0$.

η) Αν $x = 0$ είναι $F(0+f(0)) - F(0) \geq f^2(0) \Leftrightarrow 0 \geq 0$ και ισχύει η ισότητα.

Αν $x > 0$ τότε λόγω του Θ.Μ.Τ. για την F στο διάστημα $[x, x+f(x)]$, υπάρχει

$\xi \in (x, x+f(x))$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x+f(x)) - F(x)}{x+f(x) - x} = \frac{F(x+f(x)) - F(x)}{f(x)}$$

Είναι $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x) > 0$ άρα η F' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε για $x < \xi < x+f(x)$ είναι

$$F'(\xi) > F'(x) \Leftrightarrow \frac{F(x+f(x)) - F(x)}{f(x)} > f(x) \Leftrightarrow F(x+f(x)) - F(x) > f^2(x).$$

$$37. \alpha) F'(x) + xf'(x) = e^x + 2e - 2 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = e^x + 2e - 2 \Leftrightarrow$$

$$(xf(x))' = (e^x + (2e - 2)x)' \Leftrightarrow xf(x) = e^x + (2e - 2)x + c \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + 2e - 2 + \frac{c}{x}, x > 0, c \in \mathbb{R}. f(1) = 3e - 2 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + 2e - 2, x > 0$$

$$\beta) e^x + 2ex = (\alpha + 2)x \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} + 2e = \alpha + 2 \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

Είναι $f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x (x-1)}{x^2}$. Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 3e - 2$, άρα $f(x) \geq 3e - 2 > 4$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ με $\alpha < 4$ είναι αδύνατη.

γ) Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x F(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x) + x f(x)}{1} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) + e^x + (2e-2)x) \Leftrightarrow \lambda = +\infty \text{ αδύνατο. Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \pm\infty.$$

Έστω $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ αδύνατο.

δ) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την F υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = F(2) - F(1) \Leftrightarrow f(\xi) = F(2) - F(1). \text{ Είναι } F(2) + 2 > 3e + F(1) \Leftrightarrow$$

$$F(2) - F(1) > 3e - 2 \Leftrightarrow f(\xi) > f(1) \stackrel{f \nearrow [1, +\infty)}{\Leftrightarrow} \xi > 1 \text{ που ισχύει.}$$

$$38. \alpha) x^2 f'(x) = (1 - \ln x) f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow (\ln f(x))' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 1 \text{ είναι } \ln f(1) = \frac{\ln 1}{1} + c \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα}$$

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x = \ln x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

β) Είναι $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e. \text{ Για κάθε}$$

$x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Η f έχει μέγιστο το $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow$

$$f(x) \leq e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt[x]{e}.$$

$$\gamma) \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f(x) \leq e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln x^{\frac{1}{x}} \leq \ln e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e \ln x \leq x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow x^e \leq e^x$$

$$\delta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{\substack{\frac{\ln x}{x} = u \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} u = -\infty}}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty \text{ άρα η ευθεία } x=0 \text{ δηλαδή ο}$$

άξονα y'y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f . Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{\substack{\frac{\ln x}{x} = u \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u = 0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ άρα η ευθεία } y=1 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f.$$

Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

ε) Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει

$$\text{αντίστοιχο σύνολο τιμών το } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] = \left(0, e^{\frac{1}{e}} \right]. \text{ Στο διάστημα}$$

$\Delta_2 = (e, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο

$$\text{σύνολο τιμών το } f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right) = \left(0, e^{\frac{1}{e}} \right).$$

$$\text{Είναι } f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \left(0, e^{\frac{1}{e}} \right) \neq \emptyset \text{ άρα υπάρχουν } x_1, x_2 \in (0, +\infty) \text{ με } x_1 \neq x_2$$

τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$ και η f δεν είναι 1-1. Επειδή η f είναι συνεχής στο

$[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$ και παραγωγίσμη στα (x_1, x_2) ή (x_2, x_1) , εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$.

$$\sigma\tau) \alpha^x - x = 0 \Leftrightarrow \alpha^x = x \Leftrightarrow x \ln \alpha = \ln x \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{x} \ln x \Leftrightarrow \ln \alpha = \ln x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{1}{x}} = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha. \text{ Είναι } f(\Delta_1) = \left(0, e^{\frac{1}{e}} \right] \text{ και } f(\Delta_2) = \left(0, e^{\frac{1}{e}} \right) \text{ από}$$

προηγούμενο ερώτημα.

Αν $\alpha \leq 0$ τότε το α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.

- Αν $\alpha \in (0, 1]$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο Δ_1 .
- Αν $\alpha \in \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right)$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2 .
- Τέλος αν $\alpha \in \left[e^{\frac{1}{e}}, +\infty\right)$ τότε το $\alpha \in f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο Δ_1 και συγκεκριμένα είναι η $x = e$.

ζ) i. Είναι $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x) < 0$ για κάθε $x > e$, οπότε η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Για την F εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής σε

καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ οπότε υπάρχουν

$$\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ και } \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοια, ώστε}$$

$$F'(\xi_1) = \frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \text{ και}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{F' \searrow} F'(\xi_1) > F'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Leftrightarrow$$

$$F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha) > F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > F(\alpha) + F(\beta) \text{ για κάθε } e < \alpha < \beta.$$

ii. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο $x = e$ έχει εξίσωση:

$$y - F(e) = F'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - 1 = e^{\frac{1}{e}}(x - e) \Leftrightarrow y = x^{\sqrt[e]{e}} - e^{\frac{1}{e}+1} + 1 = x^{\sqrt[e]{e}} - e^{\frac{e+1}{e}} + 1$$

Επειδή $F''(x) = f'(x) < 0$ για κάθε $x > e$, η F είναι κοίλη στο διάστημα $[e, +\infty)$, οπότε βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του

σημείου επαφής, δηλαδή $F(x) < x\sqrt[e]{e} + 1 - e^{\frac{e+1}{e}}$ για κάθε $x > e$ και για $x = e$ είναι $F(e) = e \cdot \sqrt[e]{e} + 1 - e^{\frac{e+1}{e}}$. Οπότε η εξίσωση $F(x) = x\sqrt[e]{e} + 1 - e^{\frac{e+1}{e}}$ έχει μοναδική ρίζα την $x = e$ στο διάστημα $[e, +\infty)$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τότε

$$F'(x) = \alpha \ln x + \beta + x \frac{\alpha}{x} = \alpha \ln x + \beta + \alpha. \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι}$$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \alpha \ln x + \beta + \alpha = -\ln x \Leftrightarrow (\alpha + 1) \ln x = -\alpha - \beta \quad (1)$$

$$\text{Αν } \alpha \neq -1 \text{ τότε η (1) γίνεται } \ln x = \frac{-\alpha - \beta}{\alpha + 1} \Leftrightarrow x = e^{\frac{-\alpha - \beta}{\alpha + 1}} \text{ απορρίπτεται γιατί}$$

αληθεύει για μία μόνο τιμή του x και όχι για κάθε $x > 0$.

Αν $\alpha = -1$ η (1) γίνεται $0 = 1 - \beta \Leftrightarrow \beta = 1$. **Σωστή απάντηση Γ.**

$$2. \text{ Είναι } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2}}{(\sqrt{x-3})^2 - (\sqrt{x+2})^2} \Leftrightarrow$$

$$F'(x) = \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2}}{-5} = -\frac{1}{5}(x-3)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{5}(x+2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Οπότε } F(x) = \frac{1}{5} \frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} \frac{(x-3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{15} \sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{15} \sqrt{(x-3)^3}$$

Σωστή απάντηση Α.

3. Στη σχέση $f(x)F(x) = -e^{-2x}$ (1) για $x = 0$ έχουμε

$$f(0)F(0) = -1 \Leftrightarrow F(0) = -1. \text{ Από την (1) } \Leftrightarrow F'(x)F(x) = -e^{-2x} \Leftrightarrow$$

$$2F'(x)F(x) = -2e^{-2x} \Leftrightarrow (F^2(x))' = (e^{-2x})' \Leftrightarrow F^2(x) = e^{-2x} + c, \text{ για } x = 0 \text{ είναι}$$

$$F^2(0) = 1 + c \Leftrightarrow c = 0, \text{ συνεπώς } F^2(x) = e^{-2x} \quad (2).$$

Είναι $e^{-2x} \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως $F^2(x) \neq 0 \Leftrightarrow F(x) \neq 0$, αφού η F είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $F(0) = -1 < 0$ άρα από (2)

$$F(x) = -e^{-x}, \text{ οπότε } F'(x) = (-e^{-x})' \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}. \text{ **Σωστή απάντηση Β.**}$$

4. Είναι $f(x) = e^{x-F(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{e^{F(x)}} \Leftrightarrow e^{F(x)} f(x) = e^x \Leftrightarrow$

$(e^{F(x)})' = (e^x)' \Leftrightarrow e^{F(x)} = e^x + c$ (2). Στη σχέση $f(x) = e^{x-F(x)}$ για $x=1$ έχουμε $f(1) = e^{1-F(1)} \Leftrightarrow 1 = e^{1-F(1)} \Leftrightarrow 1-F(1)=0 \Leftrightarrow F(1)=1$.

Στην (2) για $x=1$ έχουμε $e^{F(1)} = e + c \Leftrightarrow c = 0$. Άρα $e^{F(x)} = e^x \Leftrightarrow F(x) = x$ συνεπώς $F'(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$. **Σωστή απάντηση Γ.**

5. Είναι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(1) = 2$ και $f(1) = 0$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F'(x)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Σωστή απάντηση Δ.

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	2. Λ	3. Σ	4. Σ	5. Σ	6. Λ	7. Λ	8. Σ	9. Λ
10. Λ	11. Λ	12. Λ	13. Σ	14. Λ	15. Σ	16. Σ	17. Σ	18. Σ
19. Λ								

36

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

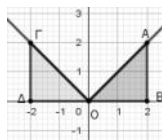
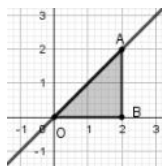
26. Σχεδιάζουμε την ευθεία $y = x$, τότε

$$\int_0^2 x dx = (\text{OAB}) = \frac{1}{2}(\text{OB})(\text{OA}) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2. \text{ Σχεδιάζουμε τη}$$

γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$, τότε

$$\int_{-2}^2 |x| dx = \int_{-2}^0 |x| dx + \int_0^2 |x| dx = (\text{ΟΓΔ}) + (\text{ΟΑΒ}) = 2 + 2 = 4.$$

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων



27. α) $\int_7^3 f(x) dx = -\int_3^7 f(x) dx = -8.$

β) $\int_7^9 f(x) dx = \int_7^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx = -8 + 9 = 1.$

γ) $\int_3^5 f(x) dx = \int_3^7 f(x) dx + \int_7^5 f(x) dx = 8 - 4 = 4.$

δ) $\int_5^9 f(x) dx = \int_5^3 f(x) dx + \int_3^9 f(x) dx = -4 + 9 = 5.$

28. $\int_0^3 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^2 \cancel{f(x)} dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_2^4 \cancel{f(x)} dx = \int_0^2 \cancel{f(x)} dx + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^4 \cancel{f(x)} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx.$$

29. $\int_1^5 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 \cancel{f(x)} dx + \int_3^5 f(x) dx > \int_2^3 \cancel{f(x)} dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx > 0 \text{ ισχύει γιατί } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$\int_1^2 f(x) dx > 0, \int_3^5 f(x) dx > 0.$$

30. $\int_1^2 (f(x) - 2g(x)) dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx - 2\int_1^2 g(x) dx = 1 \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f(x) dx = 2\int_1^2 g(x) dx + 1 \quad (1).$$

$$\int_2^1 (2f(x) + g(x)) dx = -7 \Leftrightarrow -\int_1^2 (2f(x) + g(x)) dx = -7 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 (2f(x) + g(x)) dx = 7 \Leftrightarrow 2\int_1^2 f(x) dx + \int_1^2 g(x) dx = 7 \Leftrightarrow$$

$$2\left(2\int_1^2 g(x) dx + 1\right) + \int_1^2 g(x) dx = 7 \Leftrightarrow$$

$$4\int_1^2 g(x) dx + 2 + \int_1^2 g(x) dx = 7 \Leftrightarrow 5\int_1^2 g(x) dx = 5 \Leftrightarrow \int_1^2 g(x) dx = 1$$

και από τη σχέση (1) $\Rightarrow \int_1^2 f(x) dx = 3.$

Τότε $\int_1^2 (3f(x) - 4g(x))dx = 3\int_1^2 f(x)dx - 4\int_1^2 g(x)dx = 9 - 4 = 5$.

$$\begin{aligned} 31. \text{Είναι } \int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} \frac{4x^2-3x-5}{x^2+4} dx + \int_{\lambda^2+1}^{\lambda+3} \frac{3x^2-3x-9}{x^2+4} dx &= \int_{-1}^1 2dx \Leftrightarrow \\ \int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} \left(\frac{4x^2-3x-5}{x^2+4} - \frac{3x^2-3x-9}{x^2+4} \right) dx &= 2(1+1) \Leftrightarrow \int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} \frac{x^2+4}{x^2+4} dx = 4 \Leftrightarrow \\ \int_{\lambda+3}^{\lambda^2+1} 1dx &= 4 \Leftrightarrow \lambda^2+1-\lambda-3=4 \Leftrightarrow \lambda^2-\lambda-6=0 \Leftrightarrow \lambda=3 \quad \text{ή} \quad \lambda=-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 32. A &= \int_3^6 \frac{2-x^2-4x}{x^3-1} dx + \int_3^6 \frac{x}{x-1} dx + \int_3^6 \frac{3}{x^2+x+1} dx \Leftrightarrow \\ A &= \int_3^6 \left(\frac{2-x^2-4x}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^{x^2+x+1}}{x-1} + \frac{\frac{x-1}{3}}{x^2+x+1} \right) dx \Leftrightarrow \\ A &= \int_3^6 \frac{2-x^2-4x+x^3+x^2+x+3x-3}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \int_3^6 \frac{x^3-1}{x^3-1} dx = \int_3^6 1dx = 6-3=3. \end{aligned}$$

Αυξημένης δυσκολίας

$$\begin{aligned} 33. \text{Έχουμε } \int_3^9 \frac{\ln x - 2x^2 + 5}{x^2 + x + 3} dx - \int_4^5 x dt - \int_1^3 \lambda dx &= \int_9^3 \frac{x^2 + x - \ln x - 2}{x^2 + x + 3} dx - x \Leftrightarrow \\ \int_3^9 \frac{\ln x - 2x^2 + 5}{x^2 + x + 3} dx - x &= \int_4^5 1dt - \int_1^3 \lambda dx = -\int_3^9 \frac{3x^2 + x - \ln x - 2}{x^2 + x + 3} dx - x \Leftrightarrow \\ \int_3^9 \left(\frac{\ln x - 2x^2 + 5}{x^2 + x + 3} + \frac{3x^2 + x - \ln x - 2}{x^2 + x + 3} \right) dx &- x(5-4) - \lambda(3-1) = -x \Leftrightarrow \\ \int_3^9 \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x + 3} dx - x - 2\lambda &= -x \Leftrightarrow \int_3^9 1dx - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \\ 9-3-2\lambda &= 0 \Leftrightarrow 6=2\lambda \Leftrightarrow \lambda=3. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

34.α) Το τραπέζιο ΟΑΒΔ έχει εμβαδό: $(\text{ΟΑΒΔ}) = \frac{((\text{ΟΑ}) + (\text{ΒΔ})) \cdot (\text{ΟΔ})}{2} = 9$,

άρα $\int_0^3 f(x)dx = 9 \Leftrightarrow F(3) - F(0) = 9 \Leftrightarrow F(3) - 1 = 9 \Leftrightarrow F(3) = 10$.

β) Είναι $(\text{ΒΔΓ}) = \frac{(\Delta\Gamma)(\text{ΒΔ})}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$, άρα

$\int_3^6 f(x)dx = 6 \Leftrightarrow F(6) - F(3) = 6 \Leftrightarrow F(6) - 10 = 6 \Leftrightarrow F(6) = 16$.

Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

$$\begin{aligned}
 35. \int_1^5 f(x) dx \int_3^6 f(x) dx - \int_1^6 f(x) dx \int_3^5 f(x) dx &= \\
 = \left[\int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \right] \cdot \int_3^6 f(x) dx - \int_1^6 f(x) dx \cdot \int_3^5 f(x) dx &= \\
 = \int_1^3 f(x) dx \cdot \int_3^6 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \cdot \int_3^6 f(x) dx - \int_1^6 f(x) dx \cdot \int_3^5 f(x) dx &= \\
 = \int_1^3 f(x) dx \int_3^6 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \left(\int_3^6 f(x) dx - \int_1^6 f(x) dx \right) &= \\
 = \int_1^3 f(x) dx \int_3^6 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \left(\int_3^6 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx \right) &= \\
 = \int_1^3 f(x) dx \int_3^6 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx \int_1^3 f(x) dx &= \\
 \int_1^3 f(x) dx \left(\int_3^6 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx \right) &= \\
 = \int_1^3 f(x) dx \cdot \left(\int_3^5 f(x) dx + \int_5^6 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx \right) = \int_1^3 f(x) dx \int_5^6 f(x) dx .
 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος: Έστω F αρχική της f .

$$\begin{aligned}
 \text{Τότε : } \int_1^5 f(x) dx \int_3^6 f(x) dx - \int_1^6 f(x) dx \int_3^5 f(x) dx &= \\
 (F(5) - F(1))(F(6) - F(3)) - (F(6) - F(1))(F(5) - F(3)) &= \\
 \cancel{F(5)F(6)} - F(5)F(3) - F(1)F(6) + \cancel{F(3)F(1)} - \cancel{F(5)F(6)} + F(3)F(6) + & \\
 F(1)F(5) - \cancel{F(1)F(3)} = -F(5)F(3) - F(1)F(6) + F(3)F(6) + F(1)F(5) = & \\
 F(3)(F(6) - F(5)) - F(1)(F(6) - F(5)) &= \\
 (F(3) - F(1))(F(6) - F(5)) = \int_1^3 f(x) dx \cdot \int_5^6 f(x) dx .
 \end{aligned}$$

$$36. I = \frac{1}{2} \int_0^3 \left([f'(x)]^2 \right)' dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[[f'(x)]^2 \right]_0^3 = \frac{1}{2} (f'(3))^2 - \frac{1}{2} (f'(0))^2 = \frac{e^{18}}{10\sqrt[3]{5}} - \frac{1}{16\sqrt[3]{4}} .$$

$$37. \text{Είναι } \int_{-a}^a f'(x) f^{2\kappa}(x) dx = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f^{2\kappa+1}(x)}{2\kappa+1} \right]_{-a}^a = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f^{2\kappa+1}(a) - f^{2\kappa+1}(-a)}{2\kappa+1} = 0 \Leftrightarrow f^{2\kappa+1}(a) = f^{2\kappa+1}(-a) \Leftrightarrow f(a) = f(-a) .$$

Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-a, a]$ τότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (-a, a)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

$$38.α) f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$β) I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]' dx = \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Αυξημένης δυσκολίας

$$39. Έχουμε $\int_0^a 2xe^x dx = \int_a^0 x^2 e^x dx + 9e^a \Leftrightarrow \int_0^a 2xe^x dx - \int_0^a x^2 e^x dx = 9e^a \Leftrightarrow$
 $\int_0^a (2xe^x + x^2 e^x) dx = 9e^a \Leftrightarrow \int_0^a (x^2 e^x)' dx = 9e^a \Leftrightarrow [x^2 e^x]_0^a = 9e^a \Leftrightarrow$
 $a^2 e^a = 9e^a \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm 3.$$$

$$40.α) \text{ Είναι } \int_2^3 f(t) dt = \int_2^3 G'(t) dt = [G(t)]_2^3 = G(3) - G(2) = 4 \text{ άρα}$$

$$\int_{-1}^2 \left(\int_2^3 f(t) dt \right) dx = \int_{-1}^2 4 dx = 4(2+1) = 12.$$

$$\text{Είναι } \int_0^2 G(t) f(t) dt = \int_0^2 G(t) G'(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (G^2(t))' dt =$$

$$= [G^2(t)]_0^2 = G^2(2) - G^2(0) = 0 \text{ άρα } \int_2^1 \left(\int_0^2 G(t) f(t) dt \right) dx = \int_2^1 0 dx = 0.$$

Άρα $A = 12 + 0 = 12.$

$$β) B = \int_0^{-1} f(x) dx - \int_1^{-2} f'(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx + f(2) - f(1) \int_a^{a+1} dx =$$

$$= \int_0^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx - [f(x)]_1^{-2} + f(2) - f(1)(\alpha + 1 - \alpha) =$$

$$= \int_0^3 f(x) dx - \cancel{f(2)} + \cancel{f(1)} + \cancel{f(2)} - \cancel{f(1)} = [G(t)]_0^3 = G(3) - G(0) = 4$$

$$γ) \Gamma = \int_{-1}^2 f(G(x)) f(x) dx + \int_1^2 \frac{f(x)}{G(x) - 1} dx = \int_{-1}^2 G'(G(x)) G'(x) dx +$$

$$\int_1^2 \frac{(G(x) - 1)'}{G(x) - 1} dx = \int_{-1}^2 [G(G(x))]' dx + \int_1^2 (\ln |G(x) - 1|)' dx =$$

$$= [G(G(x))]_{-1}^2 + [\ln(1 - G(x))]_{-1}^2 = (G(2)) - G(G(-1)) + \ln(1 - G(2)) -$$

$$\ln(1 - G(-1)) = G(0) - G(2) + \ln 1 - \ln(1 + 2) = -\ln 3 \text{ γιατί για κάθε } x \in [1, 2]$$

είναι $G(x) \leq 0 \Leftrightarrow G(x) - 1 \leq -1 < 0.$

$$41. \text{Είναι } \int_a^\beta \frac{4f(x)f'(x)}{f(\beta) - f(\alpha)} dx = \frac{2}{f(\beta) - f(\alpha)} \int_a^\beta 2f(x)f'(x) dx =$$

$$\frac{2}{f(\beta) - f(\alpha)} [f^2(x)]_{\alpha}^{\beta} = \frac{2(f^2(\beta) - f^2(\alpha))}{f(\beta) - f(\alpha)} = 2(f(\beta) + f(\alpha)).$$

$$\begin{aligned} 42. \int_0^2 xf'(x) dx - \int_2^0 f(x) dx &= 2 \Leftrightarrow \int_0^2 xf'(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = 2 \Leftrightarrow \\ \int_0^2 (xf'(x) + f(x)) dx &= 2 \Leftrightarrow \int_0^2 (xf(x))' dx = 2 \Leftrightarrow [xf(x)]_0^2 = 2 \Leftrightarrow \\ 2f(2) &= 2 \Leftrightarrow f(2) = 1. \end{aligned}$$

$$\int_2^3 \left(\frac{f'(x)}{x} + \frac{1}{6} \right) dx = \int_2^3 \frac{f(x)}{x^2} dx \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{f'(x)}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{6} dx - \int_2^3 \frac{f(x)}{x^2} dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 \left[\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \right] dx + \frac{1}{6}(3-2) = 0 \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} dx = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]_2^3 = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{f(3)}{3} - \frac{f(2)}{2} = -\frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(3)}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{f(3)}{3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(3) = 1.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$, παραγωγίσιμη στο $(2, 3)$ και $f(2) = f(3)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2, 3)$.

$$43. \int_a^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^{\beta} [\ln(f(x))]' dx = 0 \Leftrightarrow [\ln(f(x))]_a^{\beta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(f(\beta)) - \ln(f(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow \ln(f(\beta)) = \ln(f(\alpha)) \Leftrightarrow f(\beta) = f(\alpha).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) και $f(a) = f(\beta)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2, 3)$, δηλαδή η f έχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο στο (a, β) .

$$44. \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx - \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 \left(\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} \right) dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{f(x)}{x} \right]_1^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{2} - f(1) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 2f(1) = 2.$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1, 2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1$. Επειδή η ευθεία $y = x$ έχει κλίση $\lambda = 1$, είναι $f'(\xi) = \lambda$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο $x = \xi$ είναι παράλληλη στην $y = x$.

45. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε αφού η f είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) > 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ άτοπο. Αν $f(x) < 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$ άτοπο οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

2ος τρόπος: Έστω F αρχική της f , τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow F(\beta) - F(\alpha) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) = F(\alpha)$. Για την F ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 0$.

46. Έστω F, G αρχικές συναρτήσεις των f, g αντίστοιχα στο $[\alpha, \beta]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = F(x) - G(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \Leftrightarrow F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha) \Leftrightarrow$$

$F(\beta) - G(\beta) = F(\alpha) - G(\alpha) \Leftrightarrow h(\beta) = h(\alpha)$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $h'(x) = f(x) - g(x)$, λόγω του Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$.

47. Έστω F αρχική της f . Είναι $f(x_1) + f(x_2) = 2 \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx}{\beta - \alpha} = 2 \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ., οπότε υπάρχουν $x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ και

$$x_2 \in \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοια, ώστε } F'(x_1) = \frac{F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f(x_1) = 2 \frac{F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \text{ και } F'(x_2) = \frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}} \Leftrightarrow$$

$$f(x_2) = 2 \frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\beta - \alpha}. \text{ Είναι}$$

$$f(x_1) + f(x_2) = 2 \frac{F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} + 2 \frac{F(\beta) - F\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \alpha} = 2 \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

$$48. \alpha) \int_2^4 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx = \int_6^4 f(x) dx + \int_{10}^8 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_2^4 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx = -\int_4^6 f(x) dx - \int_8^{10} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_2^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_2^{10} f(x) dx = 0.$$

β) 1ος τρόπος: Έστω ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [2, 10]$, τότε επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, 10]$ τότε $\int_2^{10} f(x) dx > 0$ που είναι άτοπο και

αν $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [2, 10]$ τότε $\int_2^{10} f(x) dx < 0$ που είναι επίσης άτοπο.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[2, 10]$.

2ος τρόπος: Έστω F αρχική της f στο $[2, 10]$, τότε

$$\int_2^{10} f(x) dx = 0 \Leftrightarrow F(10) - F(2) = 0 \Leftrightarrow F(10) = F(2).$$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[2, 10]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 10)$ με

$F'(x) = f(x)$. Επειδή $F(10) = F(2)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος

Rolle, οπότε, η εξίσωση $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(2, 10)$ άρα και στο $[2, 10]$.

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

49. Έστω $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Επειδή η f είναι περιττή θα ισχύει

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε}$$

$$a(-x)^3 + b(-x)^2 + c(-x) + d = -(ax^3 + bx^2 + cx + d) \Leftrightarrow$$

$$-ax^3 + bx^2 - cx + d = -ax^3 - bx^2 - cx - d \text{ οπότε } b = -b \Leftrightarrow b = 0 \text{ και}$$

$$d = -d \Leftrightarrow d = 0. \text{ Οπότε } f(x) = ax^3 + cx \text{ και } f'(x) = 3ax^2 + c.$$

$$\text{Επειδή } f'(1) = 4 \Leftrightarrow 3a + c = 4 \quad (1) \text{ και } \int_0^1 f(x) dx = -3 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (ax^3 + cx) dx = -3 \Leftrightarrow a \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + c \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -3 \Leftrightarrow \frac{a}{4} + \frac{c}{2} = -3 \Leftrightarrow$$

$$a + 2c = -12 \quad (2). \text{ Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3a + c = 4 \\ a + 2c = -12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow a = 4, \quad c = -8 \text{ άρα } f(x) = 4x^3 - 8x.$$

50. Έστω $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, $\alpha \neq 0$. Αφού η f είναι άρτια τότε ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$\begin{aligned} \alpha(-x)^4 + \beta(-x)^3 + \gamma(-x)^2 + \delta(-x) + \varepsilon &= \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \Leftrightarrow \\ \alpha x^4 - \beta x^3 + \gamma x^2 - \delta x + \varepsilon &= \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \text{ πρέπει } -\beta = \beta \Leftrightarrow \beta = 0 \text{ και} \\ -\delta = \delta \Leftrightarrow \delta = 0. \text{ Τότε } f(x) &= \alpha x^4 + \gamma x^2 + \varepsilon \text{ και } f'(x) = 4\alpha x^3 + 2\gamma x. \text{ Είναι} \\ \left\{ \begin{array}{l} f(2) = -6 \Leftrightarrow 16\alpha + 4\gamma + \varepsilon = -6 \\ f'(2) = 0 \Leftrightarrow 32\alpha + 4\gamma = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 16\alpha - 32\alpha + \varepsilon = -6 \\ 4\gamma = -32\alpha \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 16\alpha - 6 \quad (1) \\ \gamma = -8\alpha \quad (2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης } \int_0^1 f(x) dx = \frac{113}{15} \Leftrightarrow \int_0^1 (\alpha x^4 + \gamma x^2 + \varepsilon) dx = \frac{113}{15} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 + \gamma \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \varepsilon [x]_0^1 = \frac{113}{15} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{5} + \frac{\gamma}{3} + \varepsilon = \frac{113}{15} \Leftrightarrow 3\alpha + 5\gamma + 15\varepsilon = 113 \Leftrightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$3\alpha + 5(-8\alpha) + 15(16\alpha - 6) = 113 \Leftrightarrow -37\alpha + 240\alpha - 90 = 113.$$

$$203\alpha = 203 \Leftrightarrow \alpha = 1, \text{ άρα } \gamma = -8, \varepsilon = 10 \text{ και } f(x) = x^4 - 8x^2 + 10.$$

$$\mathbf{51. \alpha)} e^x - e^{f(x)} = e^{x+f(x)} \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{f(x)}}{e^{x+f(x)}} = 1 \Leftrightarrow e^{-f(x)} - e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-f(x)} = 1 + e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$-f(x) = \ln(1 + e^{-x}) \Leftrightarrow f(x) = -\ln(1 + e^{-x}) =$$

$$= -\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = -\ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = \ln \frac{e^x}{1 + e^x} \Leftrightarrow f(x) = \ln \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

$$\mathbf{\beta)} I = \int_0^1 e^{f(x)-x} dx = \int_0^1 \frac{e^{f(x)}}{e^x} dx = \int_0^1 \frac{1 + e^x}{e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(1 + e^x)} dx.$$

Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$. Άρα

$$I = \int_1^e \frac{du}{u(1+u)} = \int_1^e \frac{1}{u} du - \int_1^e \frac{1}{1+u} du = [\ln|u|]_1^e - [\ln|1+u|]_1^e =$$

$$= 1 - \ln(e+1) + \ln 2 = \ln 2 + \ln \frac{e}{e+1}.$$

x	0	1
u	1	e

$$\mathbf{52. \alpha)} \int_0^1 (x^3 - 6x^2 + 4) dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - 2 \left[x^3 \right]_0^1 + 4 \left[x \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 2 + 4 = \frac{9}{4}.$$

$$\mathbf{\beta)} \int_{-1}^1 (4x^3 - 2x + 1) dx = \left[x^4 \right]_{-1}^1 - \left[x^2 \right]_{-1}^1 + \left[x \right]_{-1}^1 = 1 - 1 - (1 - 1) + 1 + 1 = 2$$

$$\gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x) dx = -2[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 3[\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$-2(0-1) - 3(1-0) = 2 - 3 = -1.$$

$$\delta) \int_0^{\pi} (4e^x - 3\sigma\upsilon\nu x + 1) dx = 4[e^x]_0^{\pi} - 3[\eta\mu x]_0^{\pi} + [x]_0^{\pi} =$$

$$= 4(e^{\pi} - 1) - 3(0 - 0) + \pi = 4e^{\pi} + \pi - 4.$$

$$\epsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 4x) dx = -\frac{1}{2}[\sigma\upsilon\nu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}[\eta\mu 4x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$-\frac{1}{2}(-1-1) + \frac{1}{4}(0-0) = 1.$$

$$\sigma\tau) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \eta\mu x \right) dx = [\epsilon\phi x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\zeta) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{\eta\mu^2 x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx = -3[\sigma\phi x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} + [\epsilon\phi x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} = 2.$$

$$\eta) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1}{\eta\mu^2 x} \right) dx =$$

$$[\epsilon\phi x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + [\sigma\phi x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + 1 - \sqrt{3} = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\theta) \int_1^2 \frac{x e^x + 2}{x} dx = \int_1^2 \left(e^x + \frac{2}{x} \right) dx = [e^x]_1^2 + 2[\ln|x|]_1^2 = e^2 - e + 2 \ln 2.$$

$$\iota) \int_0^{\pi} (4\eta\mu 2x - 2\sigma\upsilon\nu 2x) dx = -2[\sigma\upsilon\nu 2x]_0^{\pi} - [\eta\mu 2x]_0^{\pi} = 0$$

$$\kappa) \int_1^2 \frac{6x^3 - 8x^2 + 5x + 2}{x} dx = \int_1^2 \left(6x^2 - 8x + 5 + \frac{2}{x} \right) dx =$$

$$2[x^3]_1^2 - 4[x^2]_1^2 + 5[x]_1^2 + 2[\ln|x|]_1^2 = 7 + 2 \ln 2.$$

$$\lambda) \int_1^4 x \sqrt{x} dx = \int_1^4 x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \frac{62}{5}.$$

$$53. \int_0^1 (3x^2 - 8\lambda x + \lambda^2) dx < -2 \Leftrightarrow [x^3 - 4\lambda x^2 + \lambda^2 x]_0^1 < -2 \Leftrightarrow$$

$1 - 4\lambda + \lambda^2 < -2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < \lambda < 3$ και επειδή ο λ είναι ακέραιος είναι $\lambda = 2$.

54.α) Αρχικά εξετάζουμε την συνέχεια της $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 2x^2 + 1, & x < 0 \\ 2e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$ στο

$x_0 = 0$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (4x^3 - 2x^2 + 1) = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2e^x - 1) = 1 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ οπότε

είναι συνεχής και στο $[-2, 2]$, άρα

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 (4x^3 - 2x^2 + 1) dx + \int_0^2 (2e^x - 1) dx =$$

$$\left[x^4 \right]_{-2}^0 - \frac{2}{3} \left[x^3 \right]_{-2}^0 + 2 + 2 \left[e^x \right]_0^2 - 2 = 2e^2 - \frac{70}{3}.$$

$$\beta) \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx = 1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$\gamma) \int_0^1 \sqrt{x^2 - 8x + 16} dx = \int_0^1 \sqrt{(x-4)^2} dx = \int_0^1 |x-4| dx =$$

$$= -\int_0^1 (x-4) dx = -\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 4[x]_0^1 = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}.$$

55. Επειδή η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 3]$, θα είναι και συνεχής στο $[0, 3]$, άρα θα είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + \beta\sqrt{x}) = 1 + \beta = f(1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\alpha x + \beta) = \alpha + \beta,$$

οπότε $1 + \beta = \alpha + \beta \Leftrightarrow \alpha = 1$.

$$\text{Επίσης } I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 + \beta\sqrt{x}) dx + \int_1^3 (\alpha x + \beta) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 + \frac{2\beta}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_0^1 + \alpha \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 + \beta [x]_1^3 = \frac{1}{4} + \frac{2\beta}{3} + 4\alpha + 2\beta =$$

$$\frac{49}{4} \Leftrightarrow \frac{2\beta}{3} + 4 + 2\beta = \frac{48}{4} \Leftrightarrow \frac{8\beta}{3} = 8 \Leftrightarrow \beta = 3.$$

Αυξημένης δυσκολίας

$$\mathbf{56.α)} \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 1}{x - 1} dx = \int_{-1}^0 \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} dx = \int_{-1}^0 (x^2 + x + 1) dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + [x]_{-1}^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}.$$

$$\beta) \int_2^3 \frac{2x^3 - x^2 + x - 2}{x-1} dx = \int_2^3 \frac{\cancel{(x-1)}(2x^2 + x + 2)}{\cancel{x-1}} dx = \int_2^3 (2x^2 + x + 2) dx =$$

$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 + 2[x]_2^3 = \frac{38}{3} + \frac{5}{2} + 6 = \frac{103}{6}.$$

$$\gamma) \int_4^9 (\sqrt{x} - 2) dx = \int_4^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - 2 \right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_4^9 - 2[x]_4^9 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_4^9 - 2(9-4) = \frac{8}{3}.$$

$$\delta) \int_1^9 5\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2 dx = \int_1^9 5\sqrt{x}(1-2\sqrt{x}+x) dx = \int_1^9 \left(5x^{\frac{1}{2}} - 10x + 5x^{\frac{3}{2}} \right) dx$$

$$= 5 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^9 - 10 \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^9 + 5 \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^9 = \frac{10}{3} (9\sqrt{9} - 1) - 10 \frac{81-1}{2} + 2(9^2\sqrt{9} - 1) = \frac{512}{3}$$

$$\epsilon) \int_0^{16} (4\sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x}) dx = 4 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{16} - 5 \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_0^{16} = \frac{8}{3} 16\sqrt{16} - \frac{15}{4} \sqrt[3]{16^4} = \frac{512}{3} - 120\sqrt[3]{2}.$$

$$\sigma\tau) \int_8^{64} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x^3} dx = \int_8^{64} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^3} \right) dx = - \left[\frac{1}{x} \right]_8^{64} - \int_8^{64} x^{-\frac{8}{3}} dx =$$

$$= - \left(\frac{1}{64} - \frac{1}{8} \right) - \left[\frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} \right]_8^{64} = \frac{7}{64} + \frac{3}{5} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \right]_8^{64} = \frac{467}{5120}.$$

$$\zeta) \int_0^4 (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) dx = \int_0^4 (x - \sqrt{x} - 2) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 - \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - 2[x]_0^4 = -\frac{16}{3}.$$

$$\eta) \int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 - 2 \left[\sqrt{x} \right]_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) - 2(\sqrt{2} - 1) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2}.$$

$$\theta) \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{x^3} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2 x^3} dx = \int_0^1 \sqrt[4]{x^5} dx = \int_0^1 x^{\frac{5}{4}} dx = \left[\frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} \right]_0^1 = \frac{4}{9}(1-0) = \frac{4}{9}.$$

$$\iota) \int_1^2 \left(\frac{3}{3x+4} + \frac{2}{2x-1} \right) dx = [\ln|3x+4|]_1^2 + [\ln|2x-1|]_1^2 = \ln 10 - \ln 7 + \ln 3 = \ln \frac{30}{7}.$$

$$\kappa) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \varepsilon \varphi^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx = [\varepsilon \varphi x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

$$\lambda) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 2\eta \mu x \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta \mu^2 x + \sin x + 2\eta \mu x \sin x} dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\eta \mu x + \sin x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\eta \mu x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu x + \sin x) dx =$$

$$-[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -(0-1) + (1-0) = 2.$$

$$57. \alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x \eta \mu x + x^2 \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \eta \mu x)' dx = [x^2 \eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\beta) \int_1^e (2x \ln x + x) dx = \int_1^e (x^2 \ln x)' dx = [x^2 \ln x]_1^e = e^2.$$

$$\gamma) \int_1^e (1 + \ln x) dx = \int_1^e (x \ln x)' dx = [x \ln x]_1^e = e.$$

$$\delta) \int_1^2 \frac{(x-1)e^x}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{xe^x - e^x}{x^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{e^x}{x} \right)' dx = \left[\frac{e^x}{x} \right]_1^2 = \frac{e^2}{2} - e = \frac{e^2 - 2e}{2}.$$

$$\epsilon) \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} \right)' dx = \left[\frac{\ln x}{x} \right]_1^e = \frac{1}{e}.$$

$$\sigma) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x (\eta \mu x - \sin x)}{\eta \mu^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^x}{\eta \mu x} \right)' dx = \left[\frac{e^x}{\eta \mu x} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} - 2e^{\frac{\pi}{6}}.$$

$$\zeta) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + x \eta \mu x}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{x}{\sin x} \right)' dx = \left[\frac{x}{\sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$58. \alpha) I_1 = \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx \text{ Θέτουμε } u = \ln x \text{ οπότε } du = \frac{1}{x} dx.$$

$$I_1 = \int_0^1 2u du = [u^2]_0^1 = 1.$$

x	1	e
u	0	1

$$\beta) I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \text{ Θέτουμε } u = \ln x \text{ οπότε } du = \frac{1}{x} dx.$$

x	e	e ²
u	1	2

$$I_2 = \int_1^2 \frac{1}{u} du = [\ln |u|]_1^2 = \ln 2.$$

γ) $I_3 = \int_{-1}^0 (3x^2 - 2x) e^{x^3 - x^2} dx$ Θέτουμε $u = x^3 - x^2$ οπότε

$$du = (3x^2 - 2x) dx. \quad I_3 = \int_{-2}^0 e^u du = [e^u]_{-2}^0 = 1 - e^{-2}.$$

x	-1	0
u	-2	0

δ) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x dx$ Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε

$$du = \sigma\upsilon\nu x dx, \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad I_4 = \int_0^1 3u^2 du = [u^3]_0^1 = 1.$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

ε) $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sigma\upsilon\nu^3 x \eta\mu x dx$ Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu x$ οπότε

$$du = -\eta\mu x dx \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad I_5 = -\int_1^0 4u^3 du = \int_0^1 4u^3 du = [u^4]_0^1 = 1.$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

στ) $I_6 = \int_0^1 \frac{e^x + 2x}{e^x + x^2} dx$ Θέτουμε $u = e^x + x^2$ οπότε

$$du = (e^x + 2x) dx \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad I_6 = \int_1^{e+1} \frac{du}{u} = [\ln |u|]_1^{e+1} = \ln(e+1).$$

x	0	1
u	1	e+1

ζ) $I_7 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu(\sigma\phi x)}{\eta\mu^2 x} dx$ Θέτουμε $u = \sigma\phi x$ οπότε $du = -\frac{1}{\eta\mu^2 x} dx$ άρα

$$I_7 = \int_1^0 \eta\mu u (-du) = \int_0^1 \eta\mu u du = -[\sigma\upsilon\nu u]_0^1 = -\sigma\upsilon\nu 1 + 1.$$

η) $I_8 = \int_0^1 10(2x-1)^4 dx$ Θέτουμε $u = 2x-1$ οπότε $du = 2dx$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad I_8 = \int_{-1}^1 5u^4 du = [u^5]_{-1}^1 = 1 + 1 = 2.$$

x	0	1
u	-1	1

θ) $I_9 = \int_1^2 \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^4} dx$ Θέτουμε $u = x^2 - x + 1$ οπότε

$$du = (2x-1) dx \quad \acute{\alpha}\rho\alpha$$

$$I_9 = \int_1^3 \frac{du}{u^4} = \int_1^3 u^{-4} du = \left[\frac{u^{-3}}{-3} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{u^3} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{27} - 1 \right) = \frac{26}{81}.$$

x	1	2
u	1	3

ι) $I_{10} = \int_0^1 (3x^2 - 2)(x^3 - 2x)^4 dx$ Θέτουμε $u = x^3 - 2x$ οπότε

$$du = (3x^2 - 2) dx \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad I_{10} = \int_0^{-1} u^4 du = \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^{-1} = -\frac{1}{5}.$$

x	0	1
u	0	-1

κ) $I_{11} = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln |e^x + 1|]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2 = \ln \frac{e+1}{2}.$

x	0	$\pi/2$
u	0	1

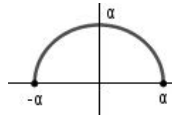
λ) $I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x e^{\eta\mu x} dx$ Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε $du = \sigma\upsilon\nu x dx$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \quad I_{12} = \int_0^1 e^u du = [e^u]_0^1 = e - 1.$$

59.α) $\sqrt{a^2 - x^2} = y \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow a^2 = x^2 + y^2$

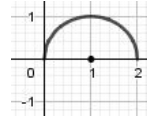
Πρόκειται για το εμβαδόν του ημικυκλίου του διπλανού

σχήματος, άρα $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{2}$.



β) $\sqrt{2x - x^2} = y \geq 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow$

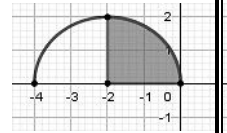
$(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Πρόκειται για το εμβαδόν του ημικυκλίου του



διπλανού σχήματος, άρα $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx = \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

γ) $\sqrt{-x^2 - 4x} = y \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4$. Πρόκειται για το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου του διπλανού σχήματος, άρα

$\int_{-2}^0 \sqrt{-x^2 - 4x} dx = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$.



60.α) Έστω $f(x) = x - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Είναι

$f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Για κάθε $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{\pi}{2} - 1 > 0$.

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |x - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3\pi^2}{8}$.

β) Έστω $h(x) = e^x - xe$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = e^x - e$ Η h έχει ελάχιστο στο $x = 1$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \geq h(1) \Leftrightarrow e^x - xe \geq 0$ άρα $h(x) \geq 0$ οπότε

$\int_0^1 |e^x - xe| dx = \int_0^1 (e^x - xe) dx = \left[e^x \right]_0^1 - e \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e - 1 - \frac{e}{2} = \frac{e - 2}{2}$.

Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης

61.α) $\int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx =$

$\left[x \right]_0^{e-1} - \left[\ln|x+1| \right]_0^{e-1} = e - 2$.

β) $\int_2^3 \frac{x+2}{x-1} dx = \int_2^3 \frac{x-1+3}{x-1} dx = \int_2^3 \left(1 + \frac{3}{x-1} \right) dx = 1 + 3 \left[\ln|x-1| \right]_2^3 = 1 + 3 \ln 2$.

γ) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x-2} dx = \int_0^1 \frac{2x-4+5}{x-2} dx = \int_0^1 \frac{2(x-2)+5}{x-2} dx =$

$$\int_0^1 \left(2 + \frac{5}{x-2} \right) dx = [2x + 5 \ln|x-2|]_0^1 = 2 - 5 \ln 2.$$

$$\delta) I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x-4}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 + \frac{-5}{2x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{5}{2} \ln|2x+1| \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \ln 3.$$

$$\epsilon) \int_0^1 \frac{6x+7}{3x+2} dx = \int_0^1 \frac{6x+4+3}{3x+2} dx = \int_0^1 \frac{2(3x+2)+3}{3x+2} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{3}{3x+2} \right) dx = 2[x]_0^1 + [\ln|3x+2|]_0^1 = 2 + \ln \frac{5}{2}.$$

~~3x²~~ + x + 1	x + 2
~~-3x²~~ - 6x	3x - 5
-5x + 1	
+5x + 10	
11	

$$\sigma\tau) I = \int_0^1 \frac{3x^2 + x + 1}{x+2} dx = \int_0^1 (3x-5) dx + \int_0^1 \frac{11}{x+2} dx$$

$$= 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - 5[x]_0^1 + 11 [\ln|x+2|]_0^1 =$$

$$\frac{3}{2} - 5 + 11 \ln \frac{3}{2}$$

$$\zeta) I = \int_0^1 \frac{4x^3 + 7x^2 + 5x + 2}{x^2 + x + 1} dx =$$

$$\int_0^1 (4x+3) dx + \int_0^1 \frac{-2x-1}{x^2+x+1} dx =$$

$$= 2[x^2]_0^1 + 3 - \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = 2 + 3 - [\ln|x^2+x+1|]_0^1 = 5 - \ln 3.$$

$$\eta) I = \int_2^3 \frac{x^3 - 2x - 2}{x-1} dx$$

$$I = \int_2^3 (x^2 + x - 1) dx + \int_2^3 \frac{-3}{x-1} dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^3 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 - 1 - 3 [\ln|x-1|]_2^3 = \frac{47}{6} - 3 \ln 2.$$

~~4x³~~ + 7x ² + 5x + 2	x ² + x + 1
~~-4x³~~ - 4x ² - 4x	4x + 3
3x ² + x + 2	
~~-3x²~~ - 3x - 3	
-2x - 1	

~~x³~~ - 2x - 2	x - 1
~~-x³~~ + x ²	x ² + x -
~~x²~~ - 2x - 2	
-x ² + x	
-x ² - 2	
+x ² - 1	
-3	

$$62.a) I = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+3x+2} dx. \text{ Είναι}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow 2x+1 = A(x+2) + B(x+1) \Leftrightarrow$$

$$2x+1 = (A+B)x + 2A+B, \text{ οπότε } \begin{cases} A+B=2 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \end{cases}$$

$$I = \int_2^3 \frac{-1}{x+1} dx + \int_2^3 \frac{3}{x+2} dx = -[\ln|x+1|]_2^3 + 3[\ln|x+2|]_2^3 = 3 \ln 5 + \ln 3 - 4 \ln 4.$$

$$\beta) \int_0^1 \frac{4x-1}{2x^2-x+3} dx = \int_0^1 \frac{(2x^2-x+3)'}{2x^2-x+3} dx = \left[\ln|2x^2-x+3| \right]_0^1 = \ln \frac{4}{3}.$$

$$\gamma) I = \int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x^2-4x+3} dx. \text{ Είναι}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \Leftrightarrow 2x+1 = A(x-3) + B(x-1) \Leftrightarrow$$

$$2x+1 = (A+B)x + (-3A-B) \text{ οπότε } \begin{cases} A+B=2 \\ -3A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{3}{2} \\ B = \frac{7}{2} \end{cases}, \text{ άρα}$$

$$I = \int_{-1}^0 \frac{-\frac{3}{2}}{x-1} dx + \int_{-1}^0 \frac{\frac{7}{2}}{x-3} dx = -\frac{3}{2} [\ln|x-1|]_{-1}^0 + \frac{7}{2} [\ln|x-3|]_{-1}^0 = \frac{7\ln 3 - 11\ln 2}{2}.$$

$$\delta) I = \int_1^2 \frac{x+2}{x^2+x} dx. \text{ Είναι } \frac{x+2}{x^2+x} = \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$x+2 = A(x+1) + Bx \Leftrightarrow x+2 = (A+B)x + A \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \end{cases} \text{ οπότε}$$

$$I = \int_1^2 \frac{2}{x} dx + \int_1^2 \frac{-1}{x+1} dx = 2 [\ln|x|]_1^2 - [\ln|x+1|]_1^2 = 2\ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 3\ln 2 - \ln 3$$

$$\epsilon) I = \frac{5x-13}{x^2-5x+6} dx. \text{ Είναι}$$

$$\frac{5x-13}{x^2-5x+6} = \frac{5x-13}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \Leftrightarrow 5x-13 = A(x-3) + B(x-2) \Leftrightarrow$$

$$5x-13 = (A+B)x - 3A - 2B \text{ οπότε } \begin{cases} A+B=5 \\ -3A-2B=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=2 \end{cases} \text{ άρα}$$

$$I = \int_0^1 \frac{3}{x-2} dx + \int_0^1 \frac{2}{x-3} dx = 3 [\ln|x-2|]_0^1 + 2 [\ln|x-3|]_0^1 = -\ln 18$$

$$\sigma\tau) I = \int_2^3 \frac{4}{x^2-1} dx. \text{ Είναι } \frac{4}{x^2-1} = \frac{4}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$4 = A(x+1) + B(x-1) \Leftrightarrow 4 = (A+B)x + A - B \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \end{cases} \text{ οπότε}$$

$$I = \int_2^3 \frac{2}{x-1} dx + \int_2^3 \frac{-2}{x+1} dx = 2 [\ln|x-1|]_2^3 - 2 [\ln|x+1|]_2^3 = 2 \ln \frac{3}{2}.$$

Αυξημένης δυσκολίας

$$63.α) I = \int_2^3 \frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 - 1} dx =$$

$$\int_2^3 x dx + \int_2^3 \frac{3x + 5}{x^2 - 1} dx .$$

$$\frac{3x + 5}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \Leftrightarrow$$

$$3x + 5 = A(x + 1) + B(x - 1) \Leftrightarrow 3x + 5 = (A + B)x + A - B \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 3 \\ A - B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} A = 4 \\ B = -1 \end{matrix} \text{ οπότε } I = \int_2^3 x dx + \int_2^3 \frac{4}{x - 1} dx + \int_2^3 \frac{-1}{x + 1} dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_2^3 + 4 \left[\ln |x - 1| \right]_2^3 - \left[\ln |x + 1| \right]_2^3 = \frac{5}{2} + 4 \ln 2 - \ln 4 + \ln 3 = \frac{5}{2} + \ln 12 .$$

$$β) I = \int_0^1 \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx \text{ οπότε}$$

$$I = \int_0^1 (x - 3) dx + \int_0^1 \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2} dx \text{ είναι}$$

$$\frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} \Leftrightarrow$$

$$5x + 6 = A(x + 1) + B(x + 2) \Leftrightarrow 5x + 6 = (A + B)x + A + 2B \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 5 \\ A + 2B = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} A = 4 \\ B = 1 \end{matrix} \text{ άρα } I = \int_0^1 (x - 3) dx + \int_0^1 \frac{4}{x + 2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x + 1} dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - 3 + 4 \left[\ln |x + 2| \right]_0^1 + \left[\ln |x + 1| \right]_0^1 = -\frac{5}{2} + 4 \ln 3 - 3 \ln 2 .$$

$$64.α) I = \int_{-2}^{-1} \frac{4 - x}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx \text{ είναι}$$

$$\frac{4 - x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{4 - x}{x(x - 1)(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{\Gamma}{x - 2} \Leftrightarrow$$

$$4 - x = A(x - 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + \Gamma x(x - 1) \Leftrightarrow$$

$$-x + 4 = (A + B + \Gamma)x^2 + (-3A - 2B - \Gamma)x + 2A \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + \Gamma = 0 \\ -3A - 2B - \Gamma = -1 \\ 2A = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x^3} + 2x + 5 \quad | \quad x^2 - 1 \\ \underline{\cancel{x^3} + x} \quad \quad \quad x \\ 3x + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x^3} - 2x \quad | \quad x^2 + 3x + 2 \\ \underline{\cancel{x^3} - 3x^2 - 2x} \quad \quad x - 3 \\ \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad \cancel{-3x^2} - 4x} \quad \quad \quad \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{\quad \quad \quad + 3x^2 + 9x + 6} \quad \quad 5x + 6 \end{array}$$

$$A = 2, B = -3, \Gamma = 1 \text{ οπότε } I = \int_{-2}^{-1} \frac{2}{x} dx + \int_{-2}^{-1} \frac{-3}{x-1} dx + \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x-2} dx =$$

$$-2[\ln|x|]_{-2}^{-1} - 3[\ln|x-1|]_{-2}^{-1} + [\ln|x-2|]_{-2}^{-1} = 4\ln 3 - 3\ln 2.$$

β) $I = \int_2^3 \frac{6x^2 + x - 3}{x^3 - x^2} dx$. Είναι $\frac{6x^2 + x - 3}{x^3 - x^2} = \frac{6x^2 + x - 3}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x-1} \Leftrightarrow$

$$6x^2 + x - 3 = Ax(x-1) + B(x-1) + \Gamma x^2 \Leftrightarrow$$

$$6x^2 + x - 3 = (A + \Gamma)x^2 + (-A + B)x - B \Leftrightarrow \begin{cases} A + \Gamma = 6 \\ -A + B = 1 \\ -B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \\ \Gamma = 4 \end{cases} \text{ οπότε}$$

$$\int_2^3 \frac{2}{x} dx + \int_2^3 \frac{3}{x^2} dx + \int_2^3 \frac{4}{x-1} dx = 2[\ln|x|]_2^3 - 3\left[\frac{1}{x}\right]_2^3 + 4[\ln|x-1|]_2^3 =$$

$$= 2\ln 3 - 2\ln 2 - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + 4\ln 2 = 2\ln 6 + \frac{1}{2}.$$

γ) $I = \int_2^3 \frac{4x^2 + 7x - 20}{(x+2)^2(x-1)} dx$. Είναι $\frac{4x^2 + 7x - 20}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{\Gamma}{x-1} \Leftrightarrow$

$$4x^2 + 7x - 20 = A(x+2)(x-1) + B(x-1) + \Gamma(x+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 7x - 20 = (A + \Gamma)x^2 + (A + B + 4\Gamma)x + (-2A - B + 4\Gamma)$$

$$\begin{cases} A + \Gamma = 4 & A = 5 \\ A + B + 4\Gamma = 7 & \Leftrightarrow B = 6 \text{ οπότε } I = \int_2^3 \frac{5}{x+2} dx + \int_2^3 \frac{6}{(x+2)^2} dx - \\ -2A - B + 4\Gamma = -20 & \Gamma = -1 \end{cases}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = 5[\ln|x+2|]_2^3 - 6\left[\frac{1}{x+2}\right]_2^3 - [\ln|x-1|]_2^3 = 5\ln\frac{4}{5} + \frac{3}{10} - \ln 2.$$

δ) $I = \int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2} dx$, είναι $\frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\Gamma}{x-1} \Leftrightarrow$

$$x^2 + 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + \Gamma x^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = (A + \Gamma)x^2 + (-A + B)x - B \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A + \Gamma = 1 & A = -1 \\ -A + B = 0 & \Leftrightarrow B = -1 \text{ οπότε } I = \int_2^3 \frac{-1}{x} dx + \int_2^3 \frac{-1}{x^2} dx + \int_2^3 \frac{2}{x-1} dx = \\ -B = 1 & \Gamma = 2 \end{cases}$$

$$-[\ln|x|]_2^3 + \left[\frac{1}{x}\right]_2^3 + 2[\ln|x-1|]_2^3 = 3\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6}.$$

ε) $I = \int_2^3 \frac{x-3}{x^3 - x} dx$. Είναι $\frac{x-3}{x(x^2-1)} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+1} \Leftrightarrow$

$$x-3 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + \Gamma x(x-1) \Leftrightarrow$$

$$x-3=(A+B+\Gamma)x^2+(B-\Gamma)x-A \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+\Gamma=0 \\ B-\Gamma=1 \\ -A=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-1 \\ \Gamma=-2 \end{cases}$$

$$\text{οπότε } I = \int_2^3 \frac{3}{x} dx + \int_2^3 \frac{-1}{x-1} dx + \int_2^3 \frac{-2}{x+1} dx =$$

$$3[\ln|x|]_2^3 - [\ln|x-1|]_2^3 - 2[\ln|x+1|]_2^3 = 5\ln 3 - 8\ln 2$$

$$\text{στ) } I = \int_{-3}^{-2} \frac{x^3-3}{x^3-x} dx = \int_{-3}^{-2} 1 dx + \int_{-3}^{-2} \frac{-x-3}{x^3-x} dx$$

$$\text{είναι } \frac{-x-3}{x^3-x} = \frac{-x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{x+1} \Leftrightarrow \frac{\cancel{x^3}-3}{\cancel{x^3}-x} \Bigg| \frac{x^3-x}{1}$$

$$-x-3=A(x^2-1)+Bx(x+1)+\Gamma x(x-1) \Leftrightarrow$$

$$-x-3=(A+B+\Gamma)x^2+(B-\Gamma)x-A \Leftrightarrow \begin{cases} -A=-3 & A=3 \\ A+B+\Gamma=0 & \Leftrightarrow B=-2 \text{ οπότε} \\ B-\Gamma=-1 & \Gamma=-1 \end{cases}$$

$$I = \int_{-3}^{-2} 1 dx + \int_{-3}^{-2} \frac{3}{x} dx - \int_{-3}^{-2} \frac{2}{x-1} dx - \int_{-3}^{-2} \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= 1 + 3[\ln|x|]_{-3}^{-2} - 2[\ln|x-1|]_{-3}^{-2} - [\ln|x+1|]_{-3}^{-2} = 1 + 8\ln 2 - 6\ln 3$$

$$\mathbf{65. \alpha)} \int_0^6 f(x) dx = 6 \Leftrightarrow \int_0^6 (x^2 + \lambda x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3} + \frac{\lambda}{2} x^2 + x \right]_0^6 = 6 \Leftrightarrow$$

$$72 + 18\lambda + 6 = 6 \Leftrightarrow 18\lambda = -72 \Leftrightarrow \lambda = -4.$$

$$\mathbf{\beta)} \text{ Είναι } f(x) = x^2 - 4x + 1, f'(x) = 2x - 4.$$

$$\int_4^5 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_4^5 [\ln f(x)]' dx = [\ln f(x)]_4^5 = \ln f(5) - \ln f(4) = \ln 6.$$

$$\int_3^4 \frac{f(x)}{f'(x)} dx = \int_3^4 \frac{x^2 - 4x + 1}{2x - 4} dx = \int_3^4 \frac{(2x-4)\left(\frac{1}{2}x-1\right) - 3}{2x-4} dx =$$

$$\int_3^4 \left(\frac{1}{2}x - 1 - \frac{3}{2x-4} \right) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{2}x - 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{4} - x - \frac{3}{2} \ln|x-2| \right]_3^4 = 4 - 4 - \frac{3}{2} \ln 2 - \left(\frac{9}{4} - 3 \right) = -\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{3}{4}$$

$$66.α) \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2-x+1} \Leftrightarrow$$

$$x-1 = A(x^2-x+1) + (Bx+\Gamma)(x+1) \Leftrightarrow$$

$$x-1 = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + \Gamma x + \Gamma \Leftrightarrow$$

$$x-1 = (A+B)x^2 + (-A+B+\Gamma)x + A+\Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+\Gamma=1 \\ A+\Gamma=-1 \end{cases}$$

$$A = -\frac{2}{3}, B = \frac{2}{3}, \Gamma = -\frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} \beta) \int_0^1 \frac{x-1}{x^3+1} dx &= \int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx = \int_0^1 \frac{-\frac{2}{3}}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2-x+1} dx = \\ &= -\frac{2}{3} [\ln|x+1|]_0^1 + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = -\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} [\ln|x^2-x+1|]_0^1 = \\ &= -\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} (\ln 1 - \ln 1) = -\frac{2}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

Παραγοντική ολοκλήρωση

$$67.α) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (-\sigma \nu x)' dx = -[x \sigma \nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu x dx = 0 + [\eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$$\begin{aligned} \beta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \eta \mu 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \left(-\frac{1}{2} \sigma \nu 2x \right)' dx = \\ &= -\frac{1}{2} [(x-1) \sigma \nu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \sigma \nu 2x \right) dx = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \nu 2x dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{4} [\eta \mu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \int_0^1 (x^2+1) e^{2x} dx &= \int_0^1 (x^2+1) \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' dx = \frac{1}{2} [e^{2x} (x^2+1)]_0^1 - \int_0^1 2x \frac{1}{2} e^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} (2e^2 - 1) - \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' dx = e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \\ &= e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{4} [e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\delta) \int_0^1 (x-3) e^{-x} dx = \int_0^1 (x-3) (-e^{-x})' dx = -[(x-3) e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx =$$

$$= \frac{2}{e} - 3 + \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{2}{e} - 3 - [e^{-x}]_0^1 = \frac{2}{e} - 3 - \frac{1}{e} + 1 = \frac{1}{e} - 2.$$

$$\begin{aligned} \epsilon) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 \sigma\upsilon\nu 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x^2 \left(\frac{1}{2} \eta\mu 2x \right)' dx = \left[\frac{3}{2} x^2 \eta\mu 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6x \cdot \frac{1}{2} \eta\mu 2x dx \\ &= -3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta\mu 2x dx = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\sigma\upsilon\nu 2x)' dx = \\ &= \frac{3}{2} [x \sigma\upsilon\nu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu 2x dx = -\frac{3\pi}{4} - \frac{3}{4} [\eta\mu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\tau) \int_1^e x^3 \ln x dx &= \int_1^e \left(\frac{x^4}{4} \right)' \ln x dx = \left[\frac{x^4}{4} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{e^4}{4} \ln e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx &= - \int_1^2 \ln x \left(\frac{1}{x} \right)' dx = - \left[\frac{\ln x}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 - \ln 2}{2}. \end{aligned}$$

$$\eta) \int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e \ln e - (e - 1) = e - e + 1 = 1$$

$$\theta) \int_1^{e^2} \ln^2 x dx = \int_1^{e^2} (x)' \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \cdot 2 \frac{\ln x}{x} dx =$$

$$e - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx = e - 2 [x \ln x]_1^e + 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 2e + 2e - 2 = e - 2.$$

$$\iota) \int_0^1 \frac{x-2}{e^x} dx = \int_0^1 (x-2) e^{-x} dx = \int_0^1 (x-2) (-e^{-x})' dx =$$

$$- [(x-2)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = \frac{1}{e} - 2 - [e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{e} - 2 - \frac{1}{e} + 1 = -1.$$

$$\kappa) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3x + 1) \eta\mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3x + 1) (-\sigma\upsilon\nu x)' dx =$$

$$= - \left[(x^2 - 3x + 1) \sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 3) \sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$= - (0 - 1) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 3) (\eta\mu x)' dx = 1 + [(2x - 3) \eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \eta\mu x dx = 1 +$$

$$= 1 + \left(2 \frac{\pi}{2} - 3 \right) + 2 [\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2 - 2 = \pi - 4$$

$$\begin{aligned} \lambda) \int_1^e (x^2 - 2x) \ln x \, dx &= \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right)' \ln x \, dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \ln x \right]_1^e - \\ &\int_1^e \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} - e^2 - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} - x \right) \, dx = \frac{e^3}{3} - e^2 - \frac{1}{9} [x^3]_1^e + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \\ &= \frac{e^3}{3} - e^2 - \frac{e^3 - 1}{9} + \frac{e^2 - 1}{2} = \frac{4e^3 - 9e^2 - 7}{18}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68. \alpha) I_1 &= \int_0^1 e^x \sin x \, dx = \int_0^1 e^x (\eta \mu x)' \, dx = [e^x \eta \mu x]_0^1 - \int_0^1 e^x \eta \mu x \, dx = \\ &= e \eta \mu 1 - \int_0^1 e^x (-\sigma \upsilon \nu x)' \, dx = e \eta \mu 1 + [e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^1 - \int_0^1 e^x \sigma \upsilon \nu x \, dx \Leftrightarrow \\ I_1 &= e \eta \mu 1 + e \sigma \upsilon \nu 1 - 1 - I_1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{e(\eta \mu 1 + \sigma \upsilon \nu 1) - 1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) I_2 &= \int_0^\pi e^x \eta \mu 4x \, dx = \int_0^\pi (e^x)' \eta \mu 4x \, dx = [e^x \eta \mu 4x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x 4 \sigma \upsilon \nu 4x \, dx = \\ &= -4 \int_0^\pi (e^x)' \sigma \upsilon \nu 4x \, dx = -4 [e^x \sigma \upsilon \nu 4x]_0^\pi + 4 \int_0^\pi e^x (-4 \eta \mu 4x) \, dx = \\ &= -4e^\pi + 4 - 16 \int_0^1 e^x \eta \mu 4x \, dx \Leftrightarrow I_2 = -4e^\pi + 4 - 16I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{-4e^\pi + 4}{17}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sigma \upsilon \nu 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' \sigma \upsilon \nu 2x \, dx = \\ &\left[\frac{1}{2} e^{2x} \sigma \upsilon \nu 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{2x} (-2 \eta \mu 2x) \, dx = -\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \eta \mu 2x \, dx = \\ &= -\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' \eta \mu 2x \, dx = -\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2} e^{2x} \eta \mu 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{2x} 2 \sigma \upsilon \nu 2x \, dx \Leftrightarrow I_3 = -\frac{e^\pi}{2} - \frac{1}{2} + 0 - I_3 \Leftrightarrow I_3 = \frac{-e^\pi - 1}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) I_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta \mu 3x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x})' \eta \mu 3x \, dx = \\ &= -[e^{-x} \eta \mu 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} (3 \sigma \upsilon \nu 3x) \, dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x})' \sigma \upsilon \nu 3x \, dx = \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}} - 3 [e^{-x} \sigma \upsilon \nu 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x}) (-3 \eta \mu 3x) \, dx = \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}} - 3(0 - 1) - 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \eta \mu 3x \, dx \Leftrightarrow I_4 = e^{-\frac{\pi}{2}} + 3 - 9I_4 \Leftrightarrow I_4 = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + 3}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon) \quad I_5 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \sin 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right)' \sin 3x dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \left[e^{-2x} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) (-3 \eta \mu 3x) dx = -\frac{1}{2} (0-1) - \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \eta \mu 3x dx = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right)' \eta \mu 3x dx = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \eta \mu 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) 3 \cdot \sin 3x dx = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} e^{-\pi} - \frac{9}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \sin 3x dx \Leftrightarrow \\
 I_5 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^{-\pi} - \frac{9}{4} I_5 \Leftrightarrow 4I_5 = 2 - 3e^{-\pi} - 9I_5 \Leftrightarrow I_5 = \frac{2-3e^{-\pi}}{13}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma\tau) \quad I_6 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x} \eta \mu 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right)' \eta \mu 3x dx \\
 &= -\frac{1}{3} \left[e^{-3x} \eta \mu 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) (3 \sin 3x) dx = \\
 &= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x} \sin 3x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right)' \sin 3x dx = \\
 &= -\frac{1}{3} \left[e^{-3x} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} \right) (-3 \eta \mu 3x) dx = \\
 &= -\frac{1}{3} (-e^{-\pi} - 1) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{-3x} \eta \mu 3x dx \Leftrightarrow I_6 = \frac{e^{\pi}+1}{3} - I_6 \Leftrightarrow I_6 = \frac{e^{\pi}+1}{6}.
 \end{aligned}$$

69. Το λάθος είναι στο ότι $[1]_1^2 = 1$ ενώ είναι $[1]_1^2 = 1 - 1 = 0$.

Αυξημένης δυσκολίας

$$70. \int_0^1 x f''(x) dx = [x f'(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x) dx = f'(1) - [f(x)]_0^1 = f'(1).$$

$$71. \text{Είναι } \int_{\alpha}^{\beta} x f''(x) dx = [x f'(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = \\ \beta f'(\beta) - \alpha f'(\alpha) - [f(x)]_{\alpha}^{\beta} = \beta \alpha - \alpha \beta - [f(\beta) - f(\alpha)] = 0.$$

$$72. \int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \sin x dx = 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \sin x dx = 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + [f'(x) \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) (\sin x)' dx = 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx + f'(\pi) \sin \pi - f'(0) \sin 0 + \int_0^{\pi} f'(x) \eta \mu dx = 2\pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx - f'(\pi) - f'(0) + [f(x) \eta \mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = 2\pi \Leftrightarrow \\ \pi - f'(0) = 2\pi \Leftrightarrow f'(0) = -\pi.$$

$$73. \text{Είναι } \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + \int_0^{\pi} (f'(x))' \eta \mu x dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + [f'(x) \eta \mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x) \sin x dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx + 0 - [f(x) \sin x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x) (-\eta \mu x) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx - f(\pi)(-1) + f(0) - \int_0^{\pi} f(x) \eta \mu x dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\pi) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(\pi) = -f(0) \quad (1)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και $f(0) \cdot f(\pi) = -f^2(0) \leq 0$

• Αν $f(0) \cdot f(\pi) < 0$ τότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

• Αν $f(0) \cdot f(\pi) = 0 \Leftrightarrow f^2(0) = 0$ άρα $f(0) = 0$ και από την (1) θα είναι και $f(\pi) = 0$ οπότε $x_0 = 0$ ή $x_0 = \pi$ θα είναι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Τελικά υπάρχει $x_0 \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

74. Επειδή η f είναι άρτια στο $[-3, 3]$ ισχύει $f(-x) = f(x)$ (1)

Παραγωγίζοντας την (1) έχουμε $-f'(-x) = f'(x)$ (2) και

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^3 [xf''(x) - f'(x)] dx = \int_{-3}^3 x[f'(x)]' dx - \int_{-3}^3 f'(x) dx = \\ &= [xf'(x)]_{-3}^3 - \int_{-3}^3 f'(x) dx - \int_{-3}^3 f'(x) dx = 3f'(3) + 3f'(-3) - 2 \int_{-3}^3 f'(x) dx = \\ &= 3(f'(3) + f'(-3)) - 2(f(3) - f(-3)) \end{aligned}$$

Από (1) για $x=3$ προκύπτει $f(-3) = f(3) \Leftrightarrow f(3) - f(-3) = 0$ (3) και

στην (2) για $x=3$ έχουμε $-f'(-3) = f'(3) \Leftrightarrow f'(3) + f'(-3) = 0$ (4)

Άρα από τις σχέσεις (3) και (4) προκύπτει ότι $I = 0$.

Αναγωγικοί τύποι ολοκληρωμάτων

75.α) $I_v + I_{v+1} = \int_0^2 \frac{e^{vx}}{1+e^x} dx + \int_0^2 \frac{e^{(v+1)x}}{1+e^x} dx = \int_0^2 \frac{e^{vx} + e^{vx}e^x}{1+e^x} dx =$

$$\int_0^2 \frac{e^{vx}(1+e^x)}{1+e^x} dx = \int_0^2 e^{vx} dx = \frac{1}{v} [e^{vx}]_0^2 = \frac{1}{v} (e^{2v} - 1).$$

β) Για $v=1$ είναι $I_1 + I_2 = e^2 - 1 \Leftrightarrow I_2 = e^2 - 1 - I_1 \Leftrightarrow I_2 = e^2 - 1 - \int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x} dx =$
 $= e^2 - 1 - [\ln(1+e^x)]_0^2 = e^2 - 1 - \ln(1+e^2) + \ln 2 = e^2 - 1 - \ln \frac{1+e^2}{2}$

76.α) $I_v + I_{v+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^{v+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varepsilon \varphi^v x + \varepsilon \varphi^{v+2} x) dx =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x (1 + \varepsilon \varphi^2 x) dx \text{ Θέτω } u = \varepsilon \varphi x \text{ οπότε } du = \frac{1}{\sin^2 x} dx = (1 + \varepsilon \varphi^2 x) dx \text{ και}$$

$$I_v + I_{v+2} = \int_0^1 u^v du = \left[\frac{u^{v+1}}{v+1} \right]_0^1 = \frac{1}{v+1}.$$

β) Για $v=2$ θα έχουμε $I_2 + I_4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^2 x dx =$

$$= \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \frac{1}{3} - [\varepsilon \varphi x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

77.α) $I_v = \int_1^e \ln^v x dx = \int_1^e (x)' \ln^v x dx = [x \ln^v x]_1^e - \int_1^e x v \ln^{v-1} x \frac{1}{x} dx =$

$$= e - 0 - v \int_1^e \ln^{v-1} x dx \Leftrightarrow I_v = e - v I_{v-1} \quad (1).$$

β) Για $v=3$ στην (1) έχουμε $I_3 = e - 3I_2$ (2) και για $v=2$ στην (1) έχουμε

$$I_2 = e - 2I_1 \quad (3). \text{ Άρα από (2) και (3): } I_3 = e - 3(e - 2I_1) = 6I_1 - 2e =$$

$$6 \int_1^e \ln x dx - 2e = 6 \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} dx \right) - 2e = 6 - 2e$$

Μέθοδος αντικατάστασης

78.α) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{(1+2\sigma \nu x)} dx.$

Θέτουμε $u = 1 + 2\sigma \nu x$ οπότε $du = -2\eta \mu x dx$ και

$$\text{άρα } I_1 = \int_3^1 \frac{-\frac{1}{2} du}{u^2} = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{u} \right]_1^3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{1}{3}$$

β) $I_2 = \int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$ οπότε $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$\text{οπότε } I_2 = \int_1^2 e^u 2du = 2[e^u]_1^2 = 2(e^2 - e).$$

γ) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \mu x)^4 \sigma \nu x dx$ Θέτουμε $u = 1 - \eta \mu x$ οπότε

$$du = -\sigma \nu x dx \text{ και } I_3 = \int_1^0 u^4 (-du) = \int_0^1 u^4 du = \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

δ) $I_4 = 7 \int_0^2 (x^2 - 3x)^6 (2x - 3) dx.$

Θέτουμε $u = x^2 - 3x$ οπότε $du = (2x - 3) dx$

$$\text{οπότε } I_4 = 7 \int_0^{-2} u^6 du = \left[\frac{u^7}{7} \right]_0^{-2} = (-2)^7 = -128.$$

ε) $I_5 = 12 \int_0^1 (3x + 1)^3 dx$. Θέτουμε $u = 3x + 1$ και

$$du = 3dx \text{ οπότε } I_5 = 4 \int_1^4 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^4 = (4^4 - 1) = 255.$$

στ) $I = \int_0^1 (2x + 1) e^{x^2 + x} dx$. Θέτουμε $u = x^2 + x$ οπότε

$$du = (2x + 1) dx \text{ και } I = \int_0^2 e^u du = e^2 - 1.$$

ζ) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\eta \mu^3 x \sigma \nu x dx$. Θέτουμε $u = \eta \mu x$ οπότε

$$du = \sigma \nu x dx \text{ και } I = \int_0^1 4u^3 du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = 1.$$

x	0	$\pi/2$
u	3	1

x	1	4
u	1	2

x	0	$\pi/2$
u	1	0

x	0	2
u	0	-2

x	0	1
u	1	4

x	0	1
u	0	2

x	0	$\pi/2$
u	0	1

$$\eta) I = \int_0^1 e^{2x+1} dx.$$

Θέτουμε $u = 2x+1$ οπότε $du = 2dx$ και

$$I = \frac{1}{2} \int_1^3 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_1^3 = \frac{1}{2} (e^3 - e).$$

x	0	1
u	1	3

$$\theta) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx. \text{ Θέτουμε } u = 2x \text{ οπότε}$$

$$du = 2dx \text{ και } I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du = \frac{1}{2} [\eta\mu u]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

x	0	$\pi/4$
u	0	$\pi/2$

$$\iota) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x 2^{\eta\mu x} dx. \text{ Θέτουμε } u = \eta\mu x \text{ οπότε } du = \cos x dx \text{ και}$$

$$I = \int_0^1 2^u du = \left[\frac{2^u}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

$$\kappa) I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx. \text{ Θέτουμε } u = \ln x \text{ οπότε } du = \frac{1}{x} dx \text{ και}$$

$$I = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

x	1	e
u	0	1

$$\lambda) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos(\eta\mu x) dx \text{ Θέτουμε } u = \eta\mu x \text{ οπότε}$$

$$du = \cos x dx \text{ και } I = \int_0^1 \sin u du = [\eta\mu u]_0^1 = \eta\mu 1.$$

x	0	$\pi/2$
u	0	1

$$79. \alpha) I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x \sin x}{1 + \eta\mu^2 x} dx \text{ Θέτουμε } u = 1 + \eta\mu^2 x \text{ οπότε}$$

$$du = 2\eta\mu x \cos x dx \text{ και}$$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} [\ln |u|]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$$

x	0	$\pi/2$
u	1	2

$$\beta) I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2x - \eta\mu x}{x^2 + \sin x} dx$$

$$\text{Θέτουμε } u = x^2 + \sin x \text{ οπότε } du = (2x - \eta\mu x) dx$$

$$\text{και } I_2 = \int_1^{\frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{2}} \frac{du}{u} = [\ln |u|]_1^{\frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{2}} = \ln \left(\frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{2} \right)$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{\pi^2}{9} + \frac{1}{2}$

$$\gamma) I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\phi x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sin x} dx.$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$

Θέτουμε $u = \sin x$ οπότε $du = (-\cos x)dx$ και

$$I_3 = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u} dx = -[\ln|u|]_1^{\frac{1}{2}} = \ln 2.$$

u	1	$\frac{1}{2}$

δ) $I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} dx.$

Θέτουμε $u = \cos x$ οπότε $du = -\sin x dx$ και

$$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{u} dx = [\ln|u|]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2.$$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2}$	1

Αυξημένης δυσκολίας

80.α) $I_1 = \int_e^{e^2} \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx$. Θέτουμε $u = \ln x$ οπότε

x	e	e^2
u	1	2

$$du = \frac{1}{x} dx \text{ και } I_1 = \int_1^2 \frac{u+1}{u} du = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{u}\right) du = [u]_1^2 + [\ln|u|]_1^2 = 1 + \ln 2.$$

β) $I_2 = \int_1^2 \frac{6x^5}{(x^6+1)\ln(x^6+1)} dx$. Θέτουμε

x	1	2
u	$\ln 2$	$\ln 65$

$$u = \ln(x^6+1) \text{ οπότε } du = \frac{6x^5}{x^6+1} dx \text{ και}$$

$$I_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 65} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_{\ln 2}^{\ln 65} = \ln \frac{\ln 65}{\ln 2}.$$

γ) $I_3 = \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+2)\ln(e^x+2)} dx$. Θέτουμε

x	0	1
u	$\ln 3$	$\ln(e+2)$

$$u = \ln(e^x+2) \text{ οπότε } du = \frac{e^x}{e^x+2} dx \text{ και}$$

$$I_3 = \int_{\ln 3}^{\ln(e+2)} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_{\ln 3}^{\ln(e+2)} = \ln \frac{\ln(e+2)}{\ln 3}.$$

δ) $I_4 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \ln(\cos x) dx$. Θέτουμε $u = \cos x$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
u	$-\ln 2$	0

$$\text{οπότε } du = -\sin x dx = \sin x dx \text{ και } I_4 = \int_{-\ln 2}^0 u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{-\ln 2}^0 = -\frac{\ln^2 2}{2}.$$

81.α) $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x \cdot e^x}{1+e^x} dx$. Θέτουμε $u = 1+e^x$

x	0	1
u	2	$1+e$

$$\text{οπότε } e^x = u-1 \text{ και } du = e^x dx,$$

$$\begin{aligned} \text{άρα } I_1 &= \int_2^{1+e} \frac{(u-1)du}{u} = \int_2^{1+e} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \\ &= [u]_2^{1+e} - [\ln|u|]_2^{1+e} = 1+e-2 - (\ln(1+e) - \ln 2) = e-1 - \ln \frac{1+e}{2}. \end{aligned}$$

β) $I_2 = \int_0^1 \frac{2x-3}{(4x-7)^3} dx$. Θέτουμε $u = 4x-7$ οπότε

x	0	1
u	-7	-3

$$du = 4dx \text{ και } x = \frac{u+7}{4}.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-7}^{-3} \frac{2 \frac{u+7}{4} - 3}{u^3} \frac{1}{4} du = \int_{-7}^{-3} \frac{u+1}{8u^3} du = \frac{1}{8} \int_{-7}^{-3} (u^{-2} + u^{-3}) du = \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{u^{-1}}{-1} \right]_{-7}^{-3} + \frac{1}{8} \left[\frac{u^{-2}}{-2} \right]_{-7}^{-3} = \frac{-1}{8} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{49} \right) = \frac{1}{42} - \frac{5}{882} = \frac{10}{441}. \end{aligned}$$

γ) $I_3 = \int_0^1 x^2 (x+1)^u dx$. Θέτουμε $u = x+1$ οπότε

x	0	1
u	1	2

$$x = u-1 \text{ και } dx = du \text{ άρα}$$

$$I_3 = \int_1^2 (u-1)^2 u^u du = \int_1^2 (u^6 - 2u^5 + u^4) du =$$

$$\left[\frac{u^7}{7} \right]_1^2 - 2 \left[\frac{u^6}{6} \right]_1^2 + \left[\frac{u^5}{5} \right]_1^2 = \frac{127}{7} - \frac{63}{3} + \frac{31}{5} = \frac{1351}{105}.$$

δ) $I_4 = \int_1^2 5(2x-3)(x-1)^4 dx$. Θέτουμε $u = x-1$ οπότε

x	1	2
u	0	1

$$du = dx \text{ και } x = u+1 \text{ οπότε}$$

$$I_4 = \int_0^1 5[2(u+1)-3]u^4 du = \int_0^1 5(2u-1)u^4 du =$$

$$= \int_0^1 (10u^5 - 5u^4) du = 10 \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 - [u^5]_0^1 = \frac{10}{6} - 1 = \frac{2}{3}.$$

ε) Θέτουμε $\sqrt{x} = u \Leftrightarrow x = u^2$ και $dx = 2udu$. Για $x = 0$ είναι $u=0$ και για $x=1$

είναι $u=1$. Τότε $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} dx = \int_0^1 \frac{u+2}{u+1} \cdot 2udu = \int_0^1 \frac{2u^2+4u}{u+1} du =$

$$\int_0^1 \left(\frac{2(u+1)^2-2}{u+1} \right) du = \int_0^1 2(u+1) du - \int_0^1 \frac{2}{u+1} du = \left[(u+1)^2 \right]_0^1 - [2 \ln(u+1)]_0^1 =$$

$$4-1-2 \ln 2 = 3-2 \ln 2.$$

στ) $I = \int_0^4 \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x} \Leftrightarrow u^2 = x$ οπότε $2udu = dx$. Για $x=0$

είναι $u=0$ και για $x=4$ είναι $u=2$, οπότε: $I = \int_0^2 \frac{u+2}{u+3} 2u du = \int_0^2 \frac{2u^2 + 4u}{u+3} du \Leftrightarrow$

$$I = \int_0^2 (2u-2) du + \int_0^2 \frac{6}{u+3} du$$

$$= [u^2]_0^2 - 2[u]_0^2 + 6[\ln|u+3|]_0^2 = 6\ln\frac{5}{3}.$$

$2u^2 + 4u$	$u+3$
$-2u^2 - 6u$	$2u-2$
$-2u$	
$2u+6$	
6	

ζ) $I = \int_0^4 \frac{x-2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x}$, οπότε

$$u^2 = x, 2u du = dx \text{ άρα}$$

$$I = \int_0^2 \frac{u^2 - 2u + 2}{u+1} 2u du =$$

$$\int_0^2 \frac{2u^3 - 4u^2 + 4u}{u+1} du$$

$$\text{άρα } I = \int_0^2 (2u^2 - 6u + 10) du - \int_0^2 \frac{10}{u+1} du =$$

$$2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^2 - 3[u^2]_0^2 + 20 - 10[\ln|u+1|]_0^2 = \frac{40}{3} - 10\ln 3.$$

x	0	4
u	0	2

$2u^3 - 4u^2 + 4u$	$u+1$
$-2u^3 - 2u^2$	$2u^2 - 6u + 10$
$-6u^2 + 4u$	
$+6u^2 + 6u$	
$10u$	
$-10u - 10$	
-10	

x	0	1
u	1	e

η) $I = \int_0^1 \frac{e^x - 2}{e^x + 3} dx = \int_0^1 \frac{(e^x - 2)e^x}{e^x(e^x + 3)} dx$. Θέτουμε $u = e^x + 3$ οπότε $du = e^x dx$

$$\text{άρα } I = \int_1^e \frac{u-2}{u(u+3)} du \text{ και είναι } \frac{u-2}{u(u+3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+3} \Leftrightarrow$$

$$u-2 = A(u+3) + Bu \Leftrightarrow u-2 = (A+B)u + 3A \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 3A=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$A = -\frac{2}{3}, B = \frac{5}{3} \text{ οπότε}$$

$$I = \int_1^e \frac{-2}{3u} du + \int_1^e \frac{5}{3(u+3)} du = -\frac{2}{3}[\ln|u|]_1^e + \frac{5}{3}[\ln|u+3|]_1^e = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\ln(e+3) - \frac{5}{3}\ln 4.$$

82.α) $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$. Θέτουμε $u = e^x + 1$ οπότε

$$du = e^x dx \text{ και}$$

$$I_1 = \int_2^{e+1} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2[\sqrt{u}]_2^{e+1} = 2(\sqrt{e+1} - \sqrt{2}).$$

x	0	1
u	2	$e+1$

β) $I_2 = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$. Θέτουμε $u = x^2 + 5$ οπότε

x	0	2
u	5	9

$du = 2x dx$ άρα $I_2 = \int_5^9 \frac{du}{2\sqrt{u}} = \left[\sqrt{u} \right]_5^9 = 3 - \sqrt{5}$.

γ) $I_3 = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} dx$. Θέτουμε $u = x^2 + 16$ οπότε

x	0	3
u	16	25

$du = 2x dx$ οπότε $I_3 = \int_{16}^{25} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \left[\sqrt{u} \right]_{16}^{25} = 5 - 4 = 1$.

δ) $I_4 = \int_2^6 \frac{4x+3}{\sqrt{2x+4}} dx$. Θέτουμε $u = 2x+4$ οπότε

x	2	6
u	8	16

$du = 2dx$, $x = \frac{u-4}{2}$ και

$$I_4 = \int_8^{16} \frac{4 \frac{u-4}{2} + 3}{\sqrt{u}} \frac{du}{2} = \int_8^{16} \frac{2u-5}{2\sqrt{u}} du = \int_8^{16} \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du - 5 \int_8^{16} \frac{1}{2\sqrt{u}} du =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_8^{16} - 5 \left[\sqrt{u} \right]_8^{16} = \frac{2}{3} (64 - 16\sqrt{2}) - 5(4 - 2\sqrt{2}) = \frac{68}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

ε) $I_5 = \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} dx$. Θέτουμε $u = 4-x^2$ άρα

x	0	2
u	4	0

$-2x dx = du$ και

$$I_5 = \int_4^0 \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2} du \right) = -\frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = -\frac{1}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_0^4 = -\frac{8}{3}.$$

στ) $I_6 = \int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$. Θέτουμε $u = x+1$ οπότε $du = dx$,

x	0	3
u	1	4

$x = u-1$ και $I_6 = \int_1^4 (u-1)\sqrt{u} du = \int_1^4 u^{\frac{3}{2}} du - \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du =$

$$\frac{2}{5} \left[\sqrt{u^5} \right]_1^4 - \frac{2}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_1^4 = \frac{2}{5} (32-1) - \frac{2}{3} (8-1) = \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \frac{116}{15}.$$

ζ) $I_7 = \int_2^5 x^2\sqrt{x-1} dx$. Θέτουμε $u = x-1$ οπότε $du = dx$,

x	2	5
u	1	4

$x = u+1$ οπότε

$$I_7 = \int_1^4 (u+1)^2 \sqrt{u} du = \int_1^4 (u^2 \sqrt{u} + 2u\sqrt{u} + \sqrt{u}) du =$$

$$= \int_1^4 \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{2}{7} \left[\sqrt{u^7} \right]_1^4 + 2 \frac{2}{5} \left[\sqrt{u^5} \right]_1^4 + \frac{2}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_1^4 = \frac{6904}{105}.$$

η) $I_8 = \int_3^{11} \frac{x+2}{\sqrt{x-2}} dx$. Θέτουμε $u = x-2$ οπότε $du = dx$,

x	3	11
u	1	9

$x = u+2$ οπότε $I_8 = \int_1^9 \frac{u+4}{\sqrt{u}} du = \int_1^9 \left(\sqrt{u} + \frac{4}{\sqrt{u}} \right) du =$

$\frac{2}{3} \left[\sqrt{u^3} \right]_1^9 + 8 \left[\sqrt{u} \right]_1^9 = \frac{52}{3} + 16 = \frac{100}{3}.$

θ) $\int_1^{64} \frac{3x + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{64} \left(\frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^{64} \left(3x^{1/2} + x^{-1/6} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx =$
 $= 3 \frac{2}{3} \left[\sqrt{x^3} \right]_1^{64} + \frac{6}{5} \left[\sqrt[5]{x^5} \right]_1^{64} + 2 \left[\sqrt{x} \right]_1^{64} = 2(512-1) + \frac{6}{5}(32-1) + 2(8-1) =$
 $= 1036 + \frac{186}{5} = \frac{5366}{5}$

ι) $I = \int_0^{63} \frac{x - \sqrt{x+1} - 3}{\sqrt[3]{x+1}} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow x = u^3 - 1$,

$dx = 3u^2 du$ οπότε $I_{12} = \int_1^2 \frac{u^6 - 1 - u^3 - 3}{u^2} du = \int_1^2 \left(u^4 - \frac{4}{u^2} - u \right) du$

$\left[\frac{u^5}{5} \right]_1^2 + \left[\frac{4}{u} \right]_1^2 - \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^2 = \frac{31}{5} - 2 - \frac{3}{2} = \frac{27}{10}.$

x	0	63
u	1	2

83.α) Ο μαθητής κάνει λάθος που εμφανίζει τον όρο $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ στο αρχικό ολοκλήρωμα ο οποίος δεν ορίζεται για $x = -1$.

β) Θέτουμε $\sqrt{x+1} = u \Leftrightarrow x+1 = u^2 \Leftrightarrow x-1 = u^2 - 2$ άρα $dx = 2u du$. Για $x = -1$ είναι $u = 0$ και για $x = 3$ είναι $u = 2$.

Άρα $I = \int_0^2 ((u^2 - 2)u \cdot 2u) du = 2 \int_0^2 (u^2 - 2)u^2 du = 2 \left[\frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} \right]_0^2 =$
 $= 2 \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} \right) = 2 \frac{96-80}{15} = 2 \frac{16}{15} = \frac{32}{15}.$

84.α) $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6}{e^x + 2} dx = \int_0^1 \frac{(e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6)e^x}{e^x(e^x + 2)} dx$

x	0	1
u	1	e

Θέτουμε $u = e^x$ άρα $du = e^x dx$ οπότε $I_1 = \int_1^e \frac{u^3 - 2u^2 - 5u + 6}{u(u+2)} du =$

$$\int_1^e \frac{u^3 - 2u^2 - 5u + 6}{u^2 + 2u} du \Leftrightarrow$$

$$I_1 = \int_1^e (u-4) du + \int_1^e \frac{3u+6}{u^2+2u} du =$$

$$= \int_1^e (u-4) du + \int_1^e \frac{3(u+2)}{u(u+2)} du =$$

$$= \left[\frac{u^2}{2} \right]_1^e - 4(e-1) + 3[\ln|u|]_1^e = \frac{e^2-1}{2} - 4(e-1) + 3 = \frac{e^2-8e+9}{2}$$

$u^3 - 2u^2 - 5u + 6$	$u^2 + 2u$
$-u^3 - 2u^2$	$u - 4$
$-4u^2 - 5u + 6$	
$+4u^2 + 8u$	
	$3u + 6$

β) $I_2 = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{2x} + 4e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{(e^x + 4)e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx .$

Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$ άρα $I_2 = \int_3^4 \frac{u+4}{u^2-3u+2} du$

x	$\ln 3$	$\ln 4$
u	3	4

$$\frac{u+4}{(u-1)(u-2)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-2} \Leftrightarrow u+4 = A(u-2) + B(u-1) \Leftrightarrow$$

$$u+4 = (A+B)u - 2A - B \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-5 \\ B=6 \end{cases} \text{ συνεπώς}$$

$$I_2 = \int_3^4 \frac{-5}{u-1} du + \int_3^4 \frac{6}{u-2} du = -5[\ln|u-1|]_3^4 + 6[\ln|u-2|]_3^4 =$$

x	0	1
u	1	e

$$11\ln 2 - 5\ln 3 .$$

γ) $I_3 = \int_0^1 \frac{e^{4x} - e^x}{e^x + 3} dx = \int_0^1 \frac{(e^{3x} - 1)e^x}{e^x + 3} dx .$

u^3	-1	$u+3$
$-u^3 - 3u^2$		$u^2 - 3u + 9$
$-3u^2 - 1$		
$+3u^2 + 9u$		
$8u - 1$		
$-8u - 27$		
		-28

Θέτουμε $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$ άρα

$$I_3 = \int_1^e \frac{u^3 - 1}{u+3} du$$

$$I_3 = \int_1^e (u^2 - 3u + 9) du - \int_1^e \frac{28}{u+3} du =$$

$$\left[\frac{u^3}{3} \right]_1^e - \frac{3}{2} [u^2]_1^e + 9(e-1) - 28[\ln|u+3|]_1^e =$$

$$= \frac{e^3-1}{3} - \frac{3}{2}(e^2-1) + 9(e-1) - 28\ln \frac{e+3}{4} .$$

δ) $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x - 7\eta\mu x + 10} dx$. Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε

$du = \sigma\upsilon\nu x dx$ και $I_4 = \int_0^1 \frac{3}{u^2 - 7u + 10} du$.

$\frac{3}{u^2 - 7u + 10} = \frac{A}{u - 2} + \frac{B}{u - 5} \Leftrightarrow 3 = Au - 5A + Bu - 2B \Leftrightarrow$

$3 = (A + B)u + (-5A - 2B) \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -5A - 2B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \end{cases}$

άρα $I_4 = \int_0^1 \frac{-1}{u - 2} du + \int_0^1 \frac{1}{u - 5} du = -[\ln|u - 2|]_0^1 + [\ln|u - 5|]_0^1 = 3\ln 2 - \ln 5$

ε) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{\frac{e^x + 1}{e^x}} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx =$

$\int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$

στ) $I_6 = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{e^x + 4}}$. Θέτουμε $u = \sqrt{e^x + 4} \Leftrightarrow u^2 - 4 = e^x$ και $e^x dx = 2udu$

άρα $I_6 = \int_3^4 \frac{2udu}{(u^2 - 4) \cdot u} = \int_3^4 \frac{2}{u^2 - 4} du = \int_3^4 \frac{\frac{1}{2}}{u - 2} du - \int_3^4 \frac{\frac{1}{2}}{u + 2} du =$

$= \frac{1}{2} [\ln|u - 2|]_3^4 - \frac{1}{2} [\ln|u + 2|]_3^4 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}$.

85.α) $I_3 = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2$ οπότε

$dx = 2udu$. Άρα

$I_3 = \int_1^2 e^u 2udu = [2ue^u]_1^2 - \int_1^2 2e^u du = 4e^2 - 2e - 2(e^2 - 1) = 2e^2 - 2e + 2$.

β) $I_4 = \int_0^{\ln \pi} e^{2x} \sigma\upsilon\nu(e^x) dx$. Θέτω $e^x = u$ οπότε $e^x dx = du$.

Άρα $I_4 = \int_1^{\pi} u \sigma\upsilon\nu u du = \int_1^{\pi} u (\eta\mu u)' du =$

$= [u\eta\mu u]_1^{\pi} - \int_1^{\pi} \eta\mu u du = -\eta\mu 1 + [\sigma\upsilon\nu u]_1^{\pi} = -\eta\mu 1 - 1 - \sigma\upsilon\nu 1$.

γ) $I_5 = \int_1^{e^{\pi}} \eta\mu(\ln x) dx$. Θέτουμε $u = \ln x \Leftrightarrow x = e^u$ και $dx = e^u du$

οπότε $I_5 = \int_0^{\pi} \eta\mu u \cdot e^u du = [e^u \eta\mu u]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu u \cdot e^u du =$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	1

x	1	4
u	1	2

x	0	$\ln \pi$
u	1	π

x	1	e^{π}
u	0	π

$$0 - \left[e^u \sin u \right]_0^\pi + \int_0^\pi (-\eta \mu u) \cdot e^u du = -(-e^\pi - 1) - \int_0^\pi \eta \mu u \cdot e^u du \Leftrightarrow$$

$$I_5 = e^\pi + 1 - I_5 \Leftrightarrow I_5 = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

δ) $I_6 = \int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$. Θέτουμε $u = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = u^2$ και

$$dx = 2u du \text{ οπότε } I_6 = \int_0^\pi \sin u \cdot 2u du = \int_0^\pi (\eta \mu u)' 2u du =$$

$$[2u \eta \mu u]_0^\pi - \int_0^\pi 2 \eta \mu u du = 0 + 2[\sin u]_0^\pi = 2(-2) = -4.$$

x	0	π^2
u	0	π

86.α) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2\eta \mu x - x \sin x}{x^3} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{2x \eta \mu x - x^2 \sin x}{x^4} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{\eta \mu x}{x^2} \right)' dx =$

$$\left[\frac{\eta \mu x}{x^2} \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi^2}{36}} = -\frac{14}{\pi^2}$$

β) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{2\eta \mu x \sin x + 1} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2\eta \mu x \sin x + \eta \mu^2 x + \sin^2 x} dx =$

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{(\eta \mu x + \sin x)^2} dx = \int_0^{\pi/4} (\eta \mu x + \sin x) dx = [-\sin x + \eta \mu x]_0^{\pi/4} = 1.$$

γ) $I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sin x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{1 - \eta \mu^2 x} dx.$

Θέτουμε $u = \eta \mu x$

οπότε $du = \sin x dx$ άρα

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{1-u^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{1-u} du + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{1+u} du =$$

$$= \frac{1}{2} [-\ln|1-u|]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2} [\ln|1+u|]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

δ) $I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{1+\eta \mu x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1-\eta \mu x}{1-\eta \mu^2 x} dx = \int_0^{\pi/3} \frac{1-\eta \mu x}{\sin^2 x} dx =$

x	0	$\pi/3$
u	1	$1/2$

$$= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int_0^{\pi/3} \frac{\eta \mu x}{\sin^2 x} dx = [\epsilon \phi x]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \frac{\eta \mu x}{\sin^2 x} dx. \text{ Θέτουμε } u = \sin x$$

οπότε $du = \eta \mu x dx$ άρα $I = \sqrt{3} + \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^2} = \sqrt{3} - \left[\frac{1}{u} \right]_1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} - (2-1) = \sqrt{3} - 1$

$$\begin{aligned} \epsilon) I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\eta\mu^2 x} dx = \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta\mu^2 x} dx = -[\sigma\phi x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta\mu^2 x} dx \end{aligned}$$

x	$\pi/6$	$\pi/2$
u	1/2	1

Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε $du = -\sin x dx$ άρα

$$I = -(0 - \sqrt{3}) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{du}{u^2} = \sqrt{3} - \left[\frac{1}{u} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \sqrt{3} - (1 - 2) = \sqrt{3} + 1.$$

$$87. \alpha) I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \cdot \eta\mu x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \eta\mu x dx$$

Θέτουμε $u = \sin x$ οπότε $du = -\eta\mu x dx$.

x	0	$\pi/2$
u	1	0

Για $x=0$ είναι $u=1$ και για $x=\pi/2$ είναι $u=0$.

$$I_1 = \int_1^0 (1 - u^2)(-du) = \int_0^1 (1 - u^2) du = 1 - \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\beta) I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \eta\mu x dx. \text{ Θέτουμε } u = \sin x \text{ οπότε } du = -\eta\mu x dx \text{ άρα}$$

$$I_2 = \int_1^0 u^3 (-du) = \int_0^1 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\gamma) I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \eta\mu x dx$$

Θέτουμε $u = \sin x$ οπότε $du = -\eta\mu x dx$ άρα

x	0	$\pi/2$
u	1	0

$$I_3 = \int_1^0 (1 - u^2) u^2 (-du) = \int_0^1 (u^2 - u^4) du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

$$\delta) I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta\mu^2 x)^2 \sin x dx.$$

Θέτουμε $u = \eta\mu x$ οπότε $du = \sin x dx$. Άρα

$$I_4 = \int_0^1 (1 - u^2)^2 du = \int_0^1 (1 - 2u^2 + u^4) du = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

x	0	$\pi/2$
u	0	1

$$\epsilon) I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} dx. \text{ Θέτουμε } u = \sin x \text{ οπότε}$$

$$du = -\eta\mu x dx \text{ άρα } I_5 = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-du}{u^2} = \left[\frac{1}{u} \right]_1^{\frac{1}{2}} = 2 - 1 = 1$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$
u	1	$\frac{1}{2}$

$$\sigma\tau) I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x \sin^5 x \eta\mu x dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^5 x \eta \mu x dx .$$

Θέτουμε $u = \sin x$ οπότε $du = -\eta \mu x dx$ άρα

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	1	0

$$I_6 = \int_1^0 (1 - u^2) u^5 (-du) = \int_0^1 (u^5 - u^7) du = \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 - \left[\frac{u^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{24} .$$

$$\zeta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} [\eta \mu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} .$$

$$\eta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\eta \mu^2 x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \sin 2x}{2} \right)^2 dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x}{4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} [\eta \mu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{32} [\eta \mu 4x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{3\pi}{16} .$$

$$\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^2 x \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \sin 2x}{2} \right)^2 dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin 2x}{2} \cdot \frac{1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x}{4} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x - \sin 2x - 2\sin^2 2x - \sin^3 2x}{8} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} dx + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{16} [\eta \mu 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x \sin 2x dx =$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x dx - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \mu^2 2x) \sin 2x dx =$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{\pi}{32} - \frac{1}{64} [\eta \mu 4x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \mu^2 2x) 2 \sin 2x dx =$$

$$\frac{\pi}{32} - \frac{1}{16} \int_0^0 (1 - u^2) du = \frac{\pi}{32}$$

Θέτουμε $u = \eta \mu 2x$ οπότε $du = 2 \sin 2x dx$ άρα

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	0	0

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta \mu^2 2x) 2 \sin 2x dx = \int_0^0 (1 - u^2) du = 0 .)$$

88.α) Για το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2}} dx$ θέτουμε

$$x = \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon\varphi u, u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και είναι } dx = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du. \text{ Για } x=0 \text{ είναι}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \varepsilon\varphi u = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi u = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ και για } x = \frac{\beta}{\alpha} \text{ είναι}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon\varphi u \Leftrightarrow \varepsilon\varphi u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4}. \text{ Άρα } I_1 = \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2}} dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cancel{\alpha^2} \frac{\beta^2}{\cancel{\alpha^2}} \varepsilon\varphi^2 u + \beta^2}} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 (\varepsilon\varphi^2 u + 1)}} \frac{1}{\sin^2 u} du =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\beta \sqrt{\eta\mu^2 u + 1}} \frac{1}{\sin^2 u} du = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\beta \sqrt{\eta\mu^2 u + \sin^2 u}} \frac{1}{\sin^2 u} du =$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\beta \frac{1}{|\sin u|}} \frac{1}{\sin^2 u} du \stackrel{|\sin u| = \sin u}{=} \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{\sin u}}{\cancel{\beta}} \frac{1}{\sin^2 u} du = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin u} du$$

Το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ είναι το I_2 με $\alpha = \beta = 1$ άρα ισχύει ότι

$$I_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin u} du$$

Άρα είναι $A = I_1 + I_2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1+\alpha}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx$

β) Για το ολοκλήρωμα $\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^2 x^2 + \beta^2} dx$ θέτουμε $x = \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon\varphi u, u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και

είναι $dx = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du$. Για $x=0$ είναι $\frac{\beta}{\alpha} \varepsilon\varphi u = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

και για $x = \frac{\beta}{\alpha}$ είναι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon\varphi u \Leftrightarrow \varepsilon\varphi u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{4}$.

Άρα $\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^2 x^2 + \beta^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cancel{\alpha^2} \frac{\beta^2}{\cancel{\alpha^2}} \varepsilon\varphi^2 u + \beta^2} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\beta^2 (\varepsilon \varphi^2 u + 1)} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du = \frac{1}{\alpha \beta} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{\eta \mu^2 u}{\sin^2 u} + 1 \right)} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du = \\
 &= \frac{1}{\alpha \beta} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{\eta \mu^2 u + \sin^2 u}{\sin^2 u}} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du = \frac{1}{\alpha \beta} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 u}} \cdot \frac{1}{\sin^2 u} du = \\
 &= \frac{1}{\alpha \beta} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 du = \frac{\pi}{4 \alpha \beta}. \text{ Το ολοκλήρωμα } \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \text{ είναι ίδιο με το} \\
 &\int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^2 x^2 + \beta^2} dx \text{ με } \alpha = \beta = 1 \text{ άρα } \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4 \alpha \beta} = \frac{\pi}{4}. \\
 &\text{Άρα } \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^2 x^2 + \beta^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{4 \alpha \beta} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi(1 + \alpha \beta)}{4 \alpha \beta}.
 \end{aligned}$$

Σύνθετες ασκήσεις

89.α) Έχουμε $f'(x)f(-x) = f(x)f'(-x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(-x) - f(x)f'(-x) = 0 \Leftrightarrow$

$$[f(x)f(-x)]' = 0 \text{ οπότε } f(x) \cdot f(-x) = c \text{ και για } x = 0 \text{ είναι}$$

$$f(0) \cdot f(0) = c \Leftrightarrow c = 1 \text{ άρα } f(x) \cdot f(-x) = 1.$$

β) Επειδή $f(x) \cdot f(-x) = 1 \neq 0$ είναι $f(x) \neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής, θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $f(0) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [-2, 2]$.

$$\gamma) \text{ Έστω } I = \int_{-2}^2 \frac{1}{1 + f(x)} dx = \int_{-2}^2 \frac{1}{1 + \frac{1}{f(-x)}} dx = \int_{-2}^2 \frac{f(-x)}{1 + f(-x)} dx.$$

Θέτω $-x = u$ οπότε $dx = -du$ για $x = -2$ είναι $u = 2$ και για $x = 2$ είναι $u = -2$,

$$\text{οπότε } I = \int_{-2}^2 \frac{f(u)}{1 + f(u)} (-du) = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{1 + f(x)} dx = J$$

$$I + J = \int_{-2}^2 \frac{1}{1 + f(x)} dx + \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{1 + f(x)} dx = \int_{-2}^2 \frac{1 + f(x)}{1 + f(x)} dx = \int_{-2}^2 dx = 4$$

αφού $I = J$ τότε $2I = 4 \Leftrightarrow I = 2$.

90.α) Εφαρμόζουμε Θ. Rolle για την $g(x) = f(x) - x$ στο $[1, 2]$ είναι

$$\begin{cases} g(1) = f(1) - 1 = 0 \\ g(2) = f(2) - 2 = 0 \end{cases} \text{ και } g'(x) = f'(x) - 1 \text{ οπότε υπάρχει}$$

$$\xi \in (1, 2) : g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 1.$$

β) Θεωρούμε $h(x) = f(x) - 3 + x$, η οποία είναι συνεχής στο $[1, 2]$,

$h(1) = f(1) - 2 = -1 < 0$ και $h(2) = f(2) - 1 = 1 > 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0 \in (1, 2) : h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3 - x_0$.

γ) Σύμφωνα με το ΘΜΤ στο $[1, x_0], [x_0, 2]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 2)$

$$\text{τέτοια ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(1)}{x_0 - 1} = \frac{3 - x_0 - 1}{x_0 - 1} = \frac{2 - x_0}{x_0 - 1} \quad \text{και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{2 - 3 + x_0}{2 - x_0} = \frac{x_0 - 1}{2 - x_0} \quad \text{οπότε } f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1.$$

$$\delta) \text{ Είναι } \int_1^2 x f''(x) dx = 0 \Leftrightarrow [x f'(x)]_1^2 - \int_1^2 f'(x) dx = 0$$

$$2f'(2) - f'(1) - [f(x)]_1^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2f'(2) - f'(1) - f(2) + f(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 2f'(2) - 1.$$

Θεωρούμε την $\varphi(x) = x f'(x) - x$.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(1) &= f'(1) - 1 = 2f'(2) - 2 \\ \varphi(2) &= 2f'(2) - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(1) = \varphi(2) \text{ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του}$$

θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\rho \in (1, 2) :$

$$\varphi'(\rho) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) + \rho f''(\rho) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(\rho) + \rho f''(\rho) = 1.$$

$$91.a) \text{ Είναι } f(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} = \lambda \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} + \kappa \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x = \lambda(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) + \kappa(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) \Leftrightarrow \eta\mu x = (\kappa - \lambda)\eta\mu x + (\kappa + \lambda)\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \kappa - \lambda &= 1 \\ \kappa + \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{2} \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right. \text{ Οπότε } f(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} + \frac{1}{2}.$$

$$\beta) i. I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \left(-\frac{1}{2} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$-\frac{1}{2} [\ln(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\ln \left(\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right) - \ln(\sigma\upsilon\nu \alpha + \eta\mu \alpha) \right] + \frac{\pi}{4} - \alpha =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\ln(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha) \right] + \frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{4} - \alpha.$$

ii. Η συνάρτηση $I(\alpha) = \frac{\pi}{4} - \alpha$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ με $I'(\alpha) = -1 < 0$

άρα $I(\alpha) \searrow$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $\left[I\left(\frac{\pi}{4}\right), I(0)\right] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

92.α) Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \int_0^1 e^{tx^2} dt = \frac{1}{x^2} \int_0^1 e^{tx^2} \cdot x^2 dt =$

$$= \frac{1}{x^2} \int_0^1 \left[e^{tx^2} \right]' dt = \frac{1}{x^2} \left[e^{tx^2} \right]_0^1 = \frac{1}{x^2} (e^{x^2} - 1) = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}.$$

Για $x=0$ $f(0) = \int_0^1 e^0 dt = [t]_0^1 = 1$. Άρα $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$.

β) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \stackrel{\text{θέτω}}{=} \lim_{x^2=y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \stackrel{0}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y}{1} = 1 = f(0)$, οπότε η f είναι

συνεχής στο $x_0 = 0$ και αφού η f είναι συνεχής για $x \neq 0$ ως πηλίκο συνεχών τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{3x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x}{3} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \right] = 0 \cdot 1 = 0, \text{ οπότε } f'(0) = 0.$$

δ) Είναι $f'(x) = \frac{2xe^{x^2} \cdot x^2 - 2x(e^{x^2} - 1)}{x^4} = \frac{2x(e^{x^2} x^2 - e^{x^2} + 1)}{x^4}$

$$= \frac{2(e^{x^2} x^2 - e^{x^2} + 1)}{x^3} \text{ Έστω } g(x) = e^{x^2} \cdot x^2 - e^{x^2} + 1,$$

$$g'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \cdot x^2 + 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} = 2x^3 e^{x^2}. \text{ Αν } x > 0 \text{ τότε } g'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$g \nearrow [0, +\infty), x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0, \text{ οπότε } f'(x) > 0, \text{ άρα } f \nearrow \text{ στο } [0, +\infty).$$

Αν $x < 0$, $g'(x) < 0$ οπότε $g \searrow$,

$$x < 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0, \text{ όμως } x^3 < 0 \text{ άρα } f'(x) < 0, \text{ άρα } f \searrow \text{ στο } (-\infty, 0].$$

ε) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} - 1}{x^3} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2xe^{x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot x \cdot e^{x^2}}{3} = +\infty \text{ οπότε}$$

δεν έχει πλάγια ή οριζόντια στο $(+\infty)$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ οπότε δεν έχει

ασύμπτωτες η γραφική παράσταση της f .

93.α) Είναι $f^3(x) - f^2(x) + f(x) = 1 - \eta\mu x$ (1). Με παραγώγιση της

σχέσης (1) έχουμε $3f^2(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) + f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$f'(x)(3f^2(x) - 2f(x) + 1) = -\sigma\upsilon\nu x \quad (2).$$

Είναι $3f^2(x) - 2f(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ ($f(x) = \omega$, $\Delta = -8 < 0$) και

$\sigma\upsilon\nu x > 0$ αν $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sigma\upsilon\nu x < 0$ αν $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Άρα η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Στην (1) για $x = 0$

$$\text{προκύπτει } f^3(0) - f^2(0) + f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow (f(0) - 1)(f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Όμοια και $f(\pi) = 1$. Επίσης στην (1) για $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$f^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right] = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Άρα η f έχει μέγιστο το 1 για $x = 0$ ή $x = \pi$ και ελάχιστο το 0 για $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\beta) f([0, \pi]) = [0, 1].$$

γ) Θεώρημα Rolle για την $g(x) = \pi f(x) + 2x$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. ($g(0) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$)

δ) Είναι $f(0) = f(\pi) = 1$ οπότε εφαρμόζουμε Rolle για την f στο $[0, \pi]$ υπάρχει

$x_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$. Οπότε η εφαπτομένη της C_f στο

$(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη με τον $x'x$ άρα και με την $y = 1$.

$$\epsilon) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x) dx = [xf'(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) dx = \frac{\pi}{2} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - [f(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{\pi}{2} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 + 1 = 1 \text{ γιατί από τη σχέση (2) είναι}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

94.α) $x > 0$, $\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e$ άρα $D_f = (e, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{\ln x - 1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x - x}.$$

$$f''(x) = -\frac{(x \ln x - x)'}{(x \ln x - x)^2} = -\frac{\ln x + 1 - 1}{(x \ln x - x)^2} = -\frac{\ln x}{(x \ln x - x)^2} < 0, \text{ όταν } x \in (e, +\infty)$$

άρα η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

β) ΘΜΤ για την f στα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ υπάρχουν $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και

$$\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοια ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}},$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}. \text{ Επειδή } \xi_1 < \xi_2 \text{ και } f' \searrow, \text{ τότε } f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow 2\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right) > \ln(\ln\alpha - 1) + \ln(\ln\beta - 1) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\ln\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right)^2 > \ln[(\ln\alpha - 1)(\ln\beta - 1)] \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right)^2 > (\ln\alpha - 1)(\ln\beta - 1)$$

$$, \text{ οπότε } \ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right) > \sqrt{(\ln\alpha - 1)(\ln\beta - 1)}.$$

$$\gamma) I = \int_{e^2}^{e^3} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln(\ln x - 1)}{x} dx. \text{ Θέτουμε } u = \ln x - 1$$

$\frac{g}{u}$	$\frac{e^2}{1}$	$\frac{e^3}{2}$

$$\text{οπότε } du = \frac{1}{x} dx \text{ άρα}$$

$$I = \int_1^2 \ln u du = \int_1^2 (u)' \ln u du = [u \ln u]_1^2 - \int_1^2 u \frac{1}{u} du = 2 \ln 2 - 1.$$

$$\mathbf{95.α)} f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \text{ οπότε η } f \nearrow \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1, \text{ άρα}$$

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, 1).$$

$$\beta) 1 - f^2(x) = 1 - \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = 2f'(x) \Leftrightarrow f^2(x) + 2f'(x) - 1 = 0.$$

$$\gamma) \text{ Επειδή } f^2(x) = 1 - 2f'(x) \text{ τότε } I = \int_0^1 f^2(x) dx =$$

$$\int_0^1 [1 - 2f'(x)] dx = 1 - 2[f(1) - f(0)] = 1 - 2 \frac{e-1}{e+1} = \frac{3-e}{e+1}$$

$$\text{Επίσης } 1 - f^2(x) = 2f'(x) \text{ οπότε } J = \int_0^1 x[1 - f^2(x)] dx = \int_0^1 x 2f'(x) dx = \\ = [2xf(x)]_0^1 - 2 \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Όμως } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx =$$

$$= [\ln(e^x + 1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(e^x + 1)} dx \stackrel{\substack{u=e^x \\ x=0 \rightarrow u=1, \\ x=1 \rightarrow u=e,}}{=} \ln(e+1) - \ln 2 - \int_1^e \frac{du}{u(u+1)} du =$$

$$= \ln(e+1) - \ln 2 - \int_1^e \frac{1}{u} du + \int_1^e \frac{1}{u+1} du =$$

$$\ln(e+1) - \ln 2 - [\ln|u|]_1^e + [\ln|u+1|]_1^e = \ln \frac{(e+1)^2}{4e}.$$

$$\text{Άρα } J = 2 \frac{e-1}{e+1} - \ln \frac{(e+1)^2}{4e}.$$

δ) Αφού $f \nearrow$ θα είναι και $1-1$, οπότε αντιστρέφεται και έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow e^x y + y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y}, \text{ οπότε}$$

$$\frac{1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow y \in (-1, 1) \text{ και } f^{-1}(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\epsilon) \text{ Είναι } f^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(0) \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\sigma\tau) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x)' \ln \frac{1+x}{1-x} dx =$$

$$\left[x \ln \frac{1+x}{1-x} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{1-x^2} dx = \left(\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 3 \right) + [\ln|x^2 - 1|]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Θετούμε $x^2 = \omega$ οπότε $2x dx = d\omega$, για $x = 0 \Rightarrow \omega = 0$ ενώ για $x = 1 \Rightarrow \omega = 1$. Οπότε

$$I = \int_0^1 x^2 f''(x^2) x dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \omega f''(\omega) d\omega = \frac{1}{2} [\omega f'(\omega)]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2} (f'(1) - 0) - \frac{1}{2} (f(1) - f(0)) = \frac{1}{2} 2 - \frac{1}{2} (2 - 0) = 0. \text{ Σωστή απάντηση Γ.}$$

2. Είναι $\int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{f(x) + e^x} dx = \int_0^1 \frac{f'(x) + e^x - e^x - f(x)}{f(x) + e^x} dx =$

$$= \int_0^1 \frac{(f(x) + e^x)'}{f(x) + e^x} dx - 1 = [\ln(f(x) + e^x)]_0^1 - 1 = \ln(f(1) + e) - \ln(f(0) + 1) - 1 =$$

$$\ln(1 + e) - \ln e = \ln \frac{1+e}{e}. \text{ Σωστή απάντηση Δ.}$$

3. Είναι $f'(x) = f^2(x) \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)}{f(x)} = f(x)$ άρα

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln|f(x)|]_a^\beta = \ln|f(\beta)| - \ln|f(\alpha)| = \ln \frac{|f(\beta)|}{|f(\alpha)|} = \ln 2.$$

Σωστή απάντηση Γ.

4. Είναι $\int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 (f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}) dx =$

$$= \int_0^1 (f(x)e^{-x})' dx = [f(x)e^{-x}]_0^1 = f(1)\frac{1}{e} - f(0) = 0. \text{ Σωστή απάντηση Β.}$$

5. Είναι $\kappa = \int_\pi^{2\pi} \ln x \cdot \sin x dx = \int_\pi^{2\pi} \ln x \cdot (\eta\mu x)' dx \Leftrightarrow$

$$\kappa = [\ln x \cdot \eta\mu x]_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x} \cdot \eta\mu x dx \Leftrightarrow \kappa = 0 - \int_\pi^{2\pi} \frac{\eta\mu x}{x} dx \Leftrightarrow \int_\pi^{2\pi} \frac{\eta\mu x}{x} dx = -\kappa$$

Σωστή απάντηση Α.

Ερωτήσεις Σωστό – Λάθος

1. Σ	2. Σ	3. Σ	4. Σ	5. Σ	6. Λ	7. Λ	8. Σ	9. Λ
10. Λ	11. Λ	12. Λ	13. Σ	14. Λ	15. Σ	16. Λ	17. Σ	18. Σ
19. Λ	20. Λ	21. Λ	22. Σ	23. Λ	24. Σ	25. Λ	26. Σ	27. Λ
28. Λ	29. Σ	30. Σ	31. Λ	32. Λ	33. Σ	34. Σ	35. Σ	36. Σ
37. Σ								

37

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ως αριθμός

12. Έστω $\int_2^3 f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$. Είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [2, 3]$ οπότε $\int_2^3 f(x) dx < 0$. Η σχέση $\int_2^3 f(x) \left(\int_2^3 f(x) dx \right) dx = 16$ γίνεται $\int_2^3 f(x) \cdot \lambda \cdot dx = 16 \Leftrightarrow \lambda \int_2^3 f(x) dx = 16 \Leftrightarrow \lambda \cdot \lambda = 16 \Leftrightarrow \lambda^2 = 16 \Rightarrow \lambda = -4$ (αφού $\lambda < 0$).

13. Είναι $\int_a^\beta \left(\int_a^x (1+t) dz \right) dx = \int_a^\beta \left((1+t) \int_a^x dz \right) dx = \int_a^\beta (1+t)(x-\alpha) dx = (1+t) \int_a^\beta (x-\alpha) dx = (1+t) \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_a^\beta - \alpha [x]_a^\beta \right) = (1+t) \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} - \alpha(\beta - \alpha) \right) = (1+t)(\beta - \alpha) \left(\frac{\beta + \alpha}{2} - \alpha \right) = (1+t)(\beta - \alpha) \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{(1+t)(\beta - \alpha)^2}{2}$.

14. Αφού $f(x) > 0$ τότε $\int_{-a}^a f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$. Τότε η σχέση $\int_{-a}^a \left[\int_{-a}^a f(x) f(t) dx \right] dt = \int_{-a}^a f(x) dx$ γίνεται $\int_{-a}^a \left[f(t) \int_{-a}^a f(x) dx \right] dt = \lambda \Leftrightarrow \int_{-a}^a [f(t) \cdot \lambda] dt = \lambda \Leftrightarrow \lambda \int_{-a}^a f(t) dt = \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0)$ (απορρίπτεται) ή $(\lambda = 1)$.

15. Έστω $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = c \in \mathbb{R}$. Τότε η σχέση (1) $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x$ γίνεται $c = f(x) + e^x \Leftrightarrow f(x) = c - e^x$ (2).

Άρα (1) $\Rightarrow \int_0^1 e^{1-x} (c - e^x) dx = c \Leftrightarrow \int_0^1 c e^{1-x} dx - \int_0^1 e^{1-x} \cdot e^x dx = c \Leftrightarrow -c [e^{1-x}]_0^1 - e = c \Leftrightarrow -c(1-e) - e = c \Leftrightarrow ce - 2c = e \Leftrightarrow c = \frac{e}{e-2}$. Άρα $f(x) = \frac{e}{e-2} - e^x$.

16. Είναι $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu x f(x) dx = c \in \mathbb{R}$ οπότε η σχέση (1)

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu x f(x) dx = f(x) + \sigma \nu \nu x$ γίνεται $c = f(x) + \sigma \nu \nu x \Rightarrow f(x) = c - \sigma \nu \nu x$.

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } (1) \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x (c - \sigma\upsilon\nu x) dx &= c \Leftrightarrow c \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx = c \Leftrightarrow \\ -c[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{\eta\mu^2 x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} &= c \Leftrightarrow -c\left(\frac{1}{2} - 1\right) - \frac{3}{8} = c \Leftrightarrow \frac{c}{2} - \frac{3}{8} = c \Leftrightarrow \\ 4c - 3 &= 8c \Leftrightarrow c = -\frac{3}{4}. \text{ Άρα } f(x) = -\frac{3}{4} - \sigma\upsilon\nu x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \int_0^1 (x^2 + f(t)) dt &= \int_0^1 (f(t) + 1) x dt \Leftrightarrow \int_0^1 x^2 dt + \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 x f(t) dt + \int_0^1 x dt \Leftrightarrow \\ x^2(1-0) + \int_0^1 f(t) dt &= x \int_0^1 f(t) dt + x(1-0) \Leftrightarrow \\ x^2 + \int_0^1 f(t) dt &= x \int_0^1 f(t) dt + x \Leftrightarrow x^2 - x \left(\int_0^1 f(t) dt + 1 \right) + \int_0^1 f(t) dt = 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Έστω $\int_0^1 f(t) dt = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda &= 0 \Leftrightarrow x^2 - \lambda x - x + \lambda = 0 \Leftrightarrow x(x - \lambda) - (x - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \\ (x - \lambda)(x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \left(x = \lambda = \int_0^1 f(x) dx \right) \text{ ή } (x = 1). \end{aligned}$$

18.α) Έστω $\int_0^1 f(x) dx = \lambda$ (1), τότε $f(x) = 3x^2 + 2\lambda$ και η (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3x^2 + 2\lambda) dx &= \lambda \Leftrightarrow [x^3 + 2\lambda x]_0^1 = \lambda \Leftrightarrow 1 + 2\lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ οπότε} \\ f(x) &= 3x^2 - 2. \end{aligned}$$

β) Έστω $\int_0^1 f(t) dt = \lambda$ (1), τότε: $f(x) = xe^x - \int_0^1 2xf(t) dt = xe^x - 2\lambda x$ και η (1)

$$\begin{aligned} \text{γίνεται: } \int_0^1 (xe^x - 2\lambda x) dx &= \lambda \Leftrightarrow [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - \lambda [x^2]_0^1 = \lambda \Leftrightarrow \\ e - e + 1 - \lambda &= \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ οπότε } f(x) = xe^x - x. \end{aligned}$$

19. Έστω ότι $\int_0^2 f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda x + c, c \in \mathbb{R}. f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } f(x) = \lambda x + 1.$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^2 (\lambda x + 1) dx = \lambda \Leftrightarrow \left[\lambda \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 = \lambda \Leftrightarrow$$

$$2\lambda + 2 = \lambda \Leftrightarrow \lambda = -2, \text{ οπότε } f(x) = -2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma x + \delta) dx$, f άγνωστη

20. Με ολοκλήρωση της σχέσης $2f(x) + 3f(-x) = 30x^2$ έχουμε:

$$2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 f(-x) dx = 30 \int_{-1}^1 x^2 dx. \text{ Θέτουμε } -x = u \text{ οπότε } dx = -du$$

$$\text{και } 2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 f(u)(-du) = 30 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_{-1}^1 f(x) dx + 3 \int_{-1}^1 f(u) du = 10 \cdot 2 \Leftrightarrow 5 \int_{-1}^1 f(x) dx = 20 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 4.$$

21.α) Είναι $f(-x) = -f(x)$ οπότε $I = \int_{-a}^a f(x) dx = - \int_{-a}^a f(-x) dx.$

Θέτουμε $x = -u$ οπότε $dx = -du$ και για $x = -a \Rightarrow u = a$ ενώ για $x = a$ θα είναι $u = -a$, οπότε $I = - \int_a^{-a} f(u)(-du) = - \int_{-a}^a f(u) du \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$

β) Η συνάρτηση $f(x) = x^{1821} \sin x$ είναι περιττή οπότε με βάση το ερώτημα (α) είναι $\int_{-1453}^{1453} x^{1821} \sin x dx = 0.$

22.α) Είναι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-a, a].$

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx. \text{ Θέτουμε } x = -u \text{ και } dx = -du \text{ άρα}$$

$$I = \int_a^0 f(-u)(-du) + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-u) du + \int_0^a f(x) dx = \\ = \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = x^8 \sin x$ είναι άρτια οπότε με βάση το (α) ερώτημα

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^8 \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^8 \sin x dx.$$

$$\gamma) I = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{e^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{e^x + 1} dx. \text{ Θέτω } x = -u \text{ και } dx = -du \text{ και}$$

$$\text{οπότε } I = \int_a^0 \frac{f(-u)}{e^{-u} + 1} (-du) + \int_0^a \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^a \frac{f(u)}{\frac{1}{e^u} + 1} du + \int_0^a \frac{f(x)}{e^x + 1} dx =$$

x	$-a$	0
u	a	0

$$= \int_0^a \frac{f(x) \cdot e^x}{e^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^a \frac{f(x)e^x + f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^a f(x) dx.$$

Αυξημένης δυσκολίας

23.α) Είναι $\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 4dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = 8 \quad (1).$$

Θέτουμε $2-x=u$ οπότε $dx=-du$ και η (1) γίνεται

$$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^0 f(u)(-du) = 8 \Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4.$$

β) Αν η f είναι κοίλη, η f' είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε 1-1 στο $[0, 2]$.

$$\text{Είναι } (f(x) + f(2-x))' = (4)' \Rightarrow f'(x) - f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = f'(2-x).$$

Για $x=0$ είναι $f'(0) = f'(2) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} 0 = 2$ άτοπο. Όμοια αν η f είναι κυρτή.

24.α) $f(1-x) = \ln \frac{e^{1-x} + e}{e^{1-x} + 1} = \ln \frac{e^x + e}{e^x + 1} = \ln \frac{e \frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{e+e^x}{e^x}} = \ln \left(e \frac{1+e^x}{e+e^x} \right) \Leftrightarrow$

$$f(1-x) = \ln e + \ln \frac{1+e^x}{e+e^x} = 1 + \ln \left(\frac{e+e^x}{1+e^x} \right)^{-1} = 1 - \ln \frac{e+e^x}{1+e^x} = 1 - f(x).$$

β) Από τη σχέση $f(1-x) = 1 - f(x)$, προκύπτει:

$$\int_0^1 f(1-x)dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 f(x)dx \quad (1). \text{ Θέτουμε } 1-x=u, \text{ τότε}$$

$$-dx = du \Leftrightarrow dx = -du. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } u=1, \text{ ενώ για } x=1 \text{ είναι } u=0.$$

$$\text{Η σχέση (1) γίνεται: } -\int_1^0 f(u)du = \int_0^1 1dx - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

25.α) $u = -x \Rightarrow du = -dx$. Για $x=a$ είναι $u=-a$ και για $x=-a$ είναι $u=a$.

$$\int_{-a}^a f(-x)dx = -\int_a^{-a} f(u)du = \int_{-a}^a f(x)dx.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = f(x) + f(-x)$, άρα

$$\int_{-a}^a g(x)dx = \int_{-a}^a f(x)dx + \int_{-a}^a f(-x)dx \Leftrightarrow \int_{-a}^a g(x)dx = 2\int_{-a}^a f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a g(x)dx.$$

$$\gamma) \text{ Έστω } f(x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x, x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{(-x)^3 - \eta\mu^5(-x)}{(-x)^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2(-x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x + \frac{-x^3 + \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + 2\sigma\upsilon\nu 2x - \frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x. \text{ Αν θέσουμε } g(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2x \text{ από το β) ερώτημα}$$

$$\text{έχουμε : } \int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a g(x) dx, \text{ άρα}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3 - \eta\mu^5 x}{x^2 + 16} + \sigma\upsilon\nu 2x \right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu 2x dx = \left[\frac{\eta\mu 2x}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$26. \alpha) u = \alpha + \beta - x \Rightarrow du = -dx. \text{ Για } x = \alpha \text{ είναι } u = \beta \text{ και για } x = \beta \text{ είναι } u = \alpha..$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

$$\beta) \text{ Θέτουμε } u = 1 + 0 - x = 1 - x, \text{ οπότε } dx = -du. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } u = 1 \text{ και για}$$

$$x = 1 \text{ είναι } u = 0. \text{ Αν } f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+3) + \ln(4-x)} \text{ τότε}$$

$$f(1-x) = \frac{\ln(1-x+3)}{\ln(1-x+3) + \ln(4-1+x)} = \frac{\ln(4-x)}{\ln(4-x) + \ln(x+3)}.$$

$$\text{Είναι } 2 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \stackrel{a)}{=} \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx =$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+3) + \ln(4-x)} dx + \int_0^1 \frac{\ln(4-x)}{\ln(x+3) + \ln(4-x)} dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+3) + \ln(4-x)}{\ln(x+3) + \ln(4-x)} dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 1 dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+3) + \ln(4-x)} dx = \frac{1}{2}.$$

$$\gamma) \text{ i. } f(x) + f(-x) = \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} + \frac{x^2 + 1}{e^{-x} + 1} = \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} + \frac{x^2 + 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} + \frac{x^2 + 1}{\frac{1 + e^x}{e^x}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} + \frac{e^x (x^2 + 1)}{e^x + 1} = \frac{x^2 + 1 + e^x (x^2 + 1)}{e^x + 1} =$$

$$\frac{(x^2+1)(\cancel{e^x+1})}{\cancel{e^x+1}} = x^2+1.$$

ii. Με ολοκλήρωση της σχέσης του γ) i. έχουμε:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(-x) dx = \int_{-1}^1 (x^2+1) dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_{-1}^1 f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{4}{3}.$$

($u = -x \Rightarrow du = -dx$. Για $x = 1$ είναι $u = -1$ και για $x = -1$ είναι $u = 1$.)

$$\int_{-1}^1 f(-x) dx = - \int_1^{-1} f(u) du = \int_{-1}^1 f(x) dx.)$$

27. Είναι $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$ (1).

α) Έστω $I_1 = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx$. Θέτουμε $x = \alpha + \beta - u$ οπότε $dx = -du$, οπότε

$$I_1 = \int_{\beta}^{\alpha} (\alpha + \beta - u) f(\alpha + \beta - u) (-du) \stackrel{(1)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} (\alpha + \beta - u) f(u) du = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx -$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx \Leftrightarrow I_1 = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - I_1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

β) Έστω $I_2 = \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx$. Θέτουμε $x = \pi - u$ άρα $dx = -du$ οπότε

$$I_2 = \int_{\pi}^0 (\pi - u) f(\eta \mu(\pi - u)) (-du) = \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\eta \mu u) du =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx - \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx - I_2 \Leftrightarrow$$

x	0	π
u	π	0

$$I_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx. \text{ Αν θέσουμε } f(x) = \frac{x}{3+x^2} \text{ τότε}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x} dx = \int_0^{\pi} x f(\eta \mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta \mu x) dx \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\eta \mu x}{3 + \eta \mu^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\eta \mu x}{4 - \sigma \nu^2 x} dx. \text{ Θέτουμε } u = \sigma \nu x \text{ οπότε}$$

$$du = -\eta \mu x dx \text{ άρα } I = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{-1}{4 - u^2} du = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 - 4} du =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{u-2} du - \int_{-1}^1 \frac{1}{u+2} du \right] = \frac{\pi}{8} [\ln|u-2|]_{-1}^1 - \frac{\pi}{8} [\ln|u+2|]_{-1}^1 = -\frac{\pi}{4} \ln 3.$$

28.α) $I_1 = \int_0^1 2f(2x+1)dx$. Θέτουμε $u = 2x+1$ οπότε

x	0	1
u	1	3

$$du = 2dx \text{ οπότε } I_1 = \int_1^3 f(u)du = \int_1^3 f(x)dx .$$

β) $I_2 = \int_2^5 [f(x) + f(x+3)]dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_2^5 f(x+3)dx$.

x	2	5
u	5	8

Θέτουμε $u = x+3$ οπότε $du = dx$ άρα

$$I_2 = \int_2^5 f(x)dx + \int_5^8 f(u)du = \int_2^8 f(x)dx .$$

γ) $I_3 = \int_{\kappa\alpha}^{\kappa\beta} f\left(\frac{x}{\kappa}\right)dx$. Θέτουμε $\frac{x}{\kappa} = \omega \Leftrightarrow x = \kappa\omega$, οπότε

x	κα	κβ
ω	α	β

$$dx = \kappa d\omega \text{ και } I_3 = \int_\alpha^\beta f(\omega)\kappa d\omega = \int_\alpha^\beta \kappa f(x)dx .$$

δ) $I_4 = \int_\alpha^0 f(\alpha-x)dx + \int_0^\beta f(\beta-x)dx$ Θέτουμε $u_1 = \alpha-x$ οπότε $dx = -du_1$ και

$$u_2 = \beta-x \text{ οπότε } dx = -du_2 \text{ και}$$

x	0	β
u ₂	β	0

$$I_4 = \int_0^\alpha f(u_1)(-du_1) + \int_\beta^0 f(u_2)(-du_2) = \int_\alpha^0 f(u_1)du_1 +$$

$$\int_0^\beta f(u_2)du_2 = \int_\alpha^0 f(x)dx + \int_0^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx .$$

x	0	α
u ₁	α	0

29.Είναι $f''(x) + f''(4-x) = 2$ οπότε $f'(x) - f'(4-x) = 2x + c$.

Για $x = 2$ είναι $f'(2) - f'(2) = 4 + c \Leftrightarrow c = -4$. Οπότε

$$f'(x) - f'(4-x) = 2x - 4 \Leftrightarrow f(x) + f(4-x) = x^2 - 4x + c_1 . \text{ Για } x = 2 :$$

$$f(2) + f(2) = 4 - 8 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 6 . \text{ Οπότε } f(x) + f(4-x) = x^2 - 4x + 6 \text{ και}$$

$$\int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 f(4-x)dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 6)dx . \text{ Θέτουμε } 4-x = u \text{ οπότε}$$

$$dx = -du \text{ και } \int_1^3 f(x)dx + \int_3^1 f(u)(-du) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 - 2 \left[x^2 \right]_1^3 + 6 \left[x \right]_1^3 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \frac{26}{3} - 16 + 12 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x)dx = \frac{14}{3} \text{ οπότε}$$

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{7}{3} .$$

30.α) $f''(x) = -4f''(2x-1) \Leftrightarrow f'(x) = -2f'(2x-1) + c_1$. Για $x = 1$ είναι

$$f'(1) = -2f'(1) + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ και } f'(x) = -2f'(2x-1) \Leftrightarrow f(x) = -f(2x-1) + c_2 .$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = -f(1) + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1$, άρα $f(x) + f(2x-1) = 1$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Οπότε και $\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(2x-1) dx = \int_0^1 1 dx = 1$. Θέτουμε

$2x-1 = u \Leftrightarrow x = \frac{u+1}{2}$ και $dx = \frac{1}{2} du$. Για $x=0$ είναι $u=-1$ και για $x=1$

είναι $u=1$, τότε $\int_0^1 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx = 2$.

β) Έστω $g(x) = f(x) + f(2x-1) - e + 2x = 1 - e + 2x$, $x \in [0, 1]$.

$g(0) = 1 - e < 0$, $g(1) = 3 - e > 0$ και g συνεχής στο $[0, 1]$, άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f(2\xi-1) = e - 2\xi$.

31. Επειδή τα $\int_{2\pi}^{4\pi} f(t) dt$, $\int_{-2\pi}^0 f(t) dt$ είναι αριθμοί τότε η g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$. Για να είναι η g σταθερή στο $\mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\int_{2\pi}^{4\pi} f(t) dt = \int_{-2\pi}^0 f(t) dt$.

Επειδή η f είναι άρτια τότε $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για το ολοκλήρωμα $\int_{-2\pi}^0 f(t) dt$ θέτουμε $u = -t$, οπότε $du = -dt$. Για $t = -2\pi$ είναι $u = 2\pi$ ενώ για $t = 0$ είναι $u = 0$. Άρα $\int_{-2\pi}^0 f(t) dt = -\int_{2\pi}^0 f(-u) du = \int_0^{2\pi} f(u) du = \int_0^{2\pi} f(t) dt$.

Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ τότε ισχύει ότι

$f(x) = f(x + 2\pi) = f(x - 2\pi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1^{ος} τρόπος: Θέτουμε λοιπόν $u = t - 2\pi$ και τότε είναι $du = dt$. Επίσης για $t = 2\pi$ είναι $u = 0$ ενώ για $t = 4\pi$ είναι $u = 2\pi$.

Άρα $\int_{2\pi}^{4\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(u + \pi) du = \int_0^{2\pi} f(u) du = \int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_{-2\pi}^0 f(t) dt$.

2^{ος} τρόπος: Θέτουμε $u = t + 2\pi$ οπότε $du = dt$. Επίσης για $t = 0$ είναι $u = 2\pi$ ενώ για $t = 2\pi$ είναι $u = 4\pi$.

Άρα $\int_{-2\pi}^0 f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_{2\pi}^{4\pi} f(u - \pi) du = \int_{2\pi}^{4\pi} f(u) du = \int_{2\pi}^{4\pi} f(t) dt$.

32. Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ τότε είναι

$f(x) = f(x + T) = f(x - T)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) 1^{ος} τρόπος: Για το ολοκλήρωμα $\int_T^{\alpha+T} f(x) dx$ θέτουμε $u = x - T$ άρα $du = dx$ και για $x = T$ είναι $u = 0$ ενώ για $x = \alpha + T$ είναι $u = \alpha$. Άρα $\int_T^{\alpha+T} f(x) dx = \int_0^\alpha f(u + T) du = \int_0^\alpha f(u) du = \int_0^\alpha f(x) dx$.

2^{ος} τρόπος: Για το ολοκλήρωμα $\int_0^a f(x)dx$ θέτουμε $u = x + T$ άρα $du = dx$ και για $x = 0$ είναι $u = T$ ενώ για $x = a$ είναι $u = a + T$. Άρα

$$\int_0^a f(x)dx = \int_T^{a+T} f(u-T)du = \int_T^{a+T} f(u)du = \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

β) Είναι $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \stackrel{\alpha)}{=} =$
 $= \int_a^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^T f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$

Ολοκλήρωμα αντίστροφης

33.α) $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ οπότε $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ άρα

$$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

β) $I = \int_{-3}^0 f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$

Για $x = -3$ είναι $f(u) = -3 = f(0)$ άρα $u = 0$ και για $x = 0$ είναι

$$f(u) = 0 = f(1) \text{ άρα } u = 1 \text{ οπότε } I = \int_0^1 uf'(u)du = \int_0^1 u(5u^4 + 6u^2)du =$$

$$\left[5 \frac{u^6}{6} + 6 \frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

34. $f(x) = e^x - e^{-2x} + 3x - 2$.

α) Είναι $f'(x) = e^x + 2e^{-2x} + 3 > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ άρα $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

β) $I = \int_{-2}^{\frac{e^3+e^2-1}{e^2}} f^{-1}(x)dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$

Για $x = -2$: $f(u) = -2 = f(0)$ άρα $u = 0$.

Για $x = \frac{e^3+e^2-1}{e^2}$ είναι $f(u) = \frac{e^3+e^2-1}{e^2} = f(1)$ άρα $u = 1$, οπότε

$$I = \int_0^1 uf'(u)du = [uf(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - \int_0^1 (e^u - e^{-2u} + 3u - 2)du =$$

$$= \frac{e^3+e^2-1}{e^2} - (e-1) - \frac{1}{2} [e^{-2u}]_0^1 - 3 \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 + 2 = 3 - \frac{3}{2e^2}.$$

35.α) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0 \Rightarrow f \nearrow (-1, +\infty) \Rightarrow f$ 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Η f είναι συνεχής οπότε έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

$$\beta) I = \int_0^2 \ln(x+1) dx = \int_0^2 \ln(x+1)(x+1)' dx =$$

$$= \left[(x+1) \ln(x+1) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{x+1} (x+1) dx = 3 \ln 3 - \int_0^2 dx = 3 \ln 3 - 2.$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$. Για $x=0$ είναι

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0 \text{ και για } x = f(2) \text{ είναι } f(u) = f(2) \Leftrightarrow u = 2.$$

$$\text{Είναι } J = \int_0^{f(2)} f^{-1}(x) dx = \int_0^2 u f'(u) du = \left[u f(u) \right]_0^2 - \int_0^2 f(u) du =$$

$$2f(2) - I = 2 \ln 3 - 3 \ln 3 + 2 = 2 - \ln 3. \text{ Άρα } I + J = 3 \ln 3 - 2 + 2 - \ln 3 = 2 \ln 3.$$

Αυξημένης δυσκολίας

36. Για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4+1} \right)' = \left[(x^4+1)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (x^4+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{3(\sqrt[3]{x^4+1})^2}.$$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4+1) = +\infty, \text{ οπότε και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^4+1} = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$. Άρα

$$A_{f^{-1}} = f(A) = [1, +\infty). \text{ Για κάθε } x \geq 0 \text{ και } y \geq 1 \text{ είναι}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4+1} = y \Leftrightarrow x^4+1 = y^3 \Leftrightarrow x^4 = y^3-1 \Leftrightarrow$$

$$x = \sqrt[4]{y^3-1}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \sqrt[4]{y^3-1}, y \geq 1, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x^3-1}, x \geq 1.$$

$$\beta) \text{ Είναι } I = \int_0^1 \sqrt[3]{x^4+1} dx + \int_1^{\sqrt[3]{2}} \sqrt[4]{x^3-1} dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\sqrt[3]{2}} f^{-1}(x) dx.$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$. Για $x=1$ είναι

$$f(u) = 1 = f(0) \Leftrightarrow u = 0 \text{ και για } x = \sqrt[3]{2} \text{ είναι } f(u) = \sqrt[3]{2} = f(1) \Leftrightarrow u = 1. \text{ Τότε}$$

$$I = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$I = \int_0^1 (f(x) + xf'(x)) dx = \int_0^1 (xf(x))' dx = [xf(x)]_0^1 = f(1) = \sqrt[3]{2}.$$

37.α) Παραγωγίζουμε στη σχέση $(1) \ln f(x) + e^{f(x)} = x$ οπότε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + e^{f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} + e^{f(x)} \right) = 1, \text{ οπότε } f'(x) > 0 \text{ αφού}$$

$$\frac{1}{f(x)} + e^{f(x)} > 0, \text{ άρα } f \nearrow \mathbb{R} \text{ οπότε } 1-1, \text{ συνεπώς αντιστρέφεται. Θέτουμε}$$

$$f(x) = y > 0 \text{ τότε } \ln y + e^y = x, \text{ άρα } f^{-1}(x) = \ln x + e^x, x > 0.$$

β) Είναι $I = \int_1^e f^{-1}(x) dx + \int_e^{e+1} f(x) dx$. Θέτουμε $f(x) = u$ οπότε $x = f^{-1}(u)$

και $dx = (f^{-1}(u))' du$. Για $x = e$: $f^{-1}(u) = e = f^{-1}(1)$ άρα $u = 1$ ενώ για

$$x = e + 1 \quad f^{-1}(u) = e + 1 = f^{-1}(e) \quad \text{άρα } u = e, \text{ συνεπώς}$$

$$I = \int_1^e f^{-1}(x) dx + \int_1^e u (f^{-1}(u))' du = \int_1^e f^{-1}(x) dx + [uf^{-1}(u)]_1^e - \int_1^e f^{-1}(u) du =$$

$$ef^{-1}(e) - 1f^{-1}(1) = e(e+1) - e = e^{e+1}. ((f^{-1})'(x) = \frac{1}{x} + e^x > 0 \text{ οπότε } f^{-1} \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα } 1-1 \text{ οπότε αντιστρέφεται})$$

38. Είναι $8f^3(x) + 4f(x) - x + 10 = 0 \quad (1).$

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $8f^3(x_1) = 8f^3(x_2)$ και

$$4f(x_1) = 4f(x_2), \text{ οπότε } 8f^3(x_1) + 4f(x_1) = 8f^3(x_2) + 4f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} x_1 - 10 = x_2 - 10 \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ οπότε η } f \text{ είναι } 1-1 \text{ άρα αντιστρέφεται. Στην } (1) \text{ θέτω}$$

$$f(x) = y \text{ και } x = f^{-1}(y) \text{ οπότε } 8y^3 + 4y - f^{-1}(y) + 10 \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(y) = 8y^3 + 4y + 10, y \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } f^{-1}(x) = 8x^3 + 4x + 10, x \in \mathbb{R}$$

β) Θέτουμε $f(x) = u$ οπότε $x = f^{-1}(u)$ και $dx = (f^{-1}(u))' du$. Για $x = -2$

$$f^{-1}(u) = -2 = f^{-1}(-1) \text{ άρα } u = -1 \text{ ενώ για } x = 10: f^{-1}(u) = 10 = f^{-1}(0) \text{ άρα}$$

$$u = 0 \text{ οπότε } I = \int_{-1}^0 u (f^{-1}(u))' du = [uf^{-1}(u)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 f^{-1}(u) du =$$

$$f^{-1}(-1) - \int_{-1}^0 (8u^3 + 4u + 10) du = -2 - 2[u^4]_{-1}^0 - 2[u^2]_{-1}^0 - 10[u]_{-1}^0 = -8.$$

$((f^{-1})'(x) = 24x^2 + 4 > 0 \text{ οπότε } f^{-1} \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα } 1-1 \text{ οπότε αντιστρέφεται})$

γ) Είναι $I_1 = \int_{-2}^{10} xf'(x)dx = [xf(x)]_{-2}^{10} - \int_{-2}^{10} f(x)dx = 10f(10) + 2f(-2) - (-8)$

Όμως $f^{-1}(0) = 10 \Leftrightarrow f(10) = 0$ και $f^{-1}(-1) = -2 \Leftrightarrow f(-2) = -1$ άρα

$I_1 = 0 - 2 + 8 = 6$.

39.Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u)$, οπότε $dx = f'(u)du$.

Για $x = \alpha$ είναι $f(u) = \alpha \Leftrightarrow u = f^{-1}(\alpha)$ και για $x = \beta$ είναι

$$f(u) = \beta \Leftrightarrow u = f^{-1}(\beta). \text{ Άρα } \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x)dx = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} uf'(u)du = [uf(u)]_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} -$$

$$\int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(u)du = f^{-1}(\beta)f(f^{-1}(\beta)) - f^{-1}(\alpha)f(f^{-1}(\alpha)) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(u)du =$$

$$= f^{-1}(\beta)\beta - f^{-1}(\alpha)\alpha - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(u)du = \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} f(x)dx.$$

40.α) $I = \int_4^6 \frac{x}{f'(f^{-1}(x))} dx$. Θέτω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$

για $x = 4$ είναι $f(u) = 4 = f(2)$ άρα $u = 2$ ενώ για $x = 6$ είναι

$f(u) = 6 = f(3)$ άρα $u = 3$. Επομένως

$$I = \int_2^3 \frac{f(u) \cdot f'(u)du}{f'(u)} = \int_2^3 f(u)du = \int_2^3 f(x)dx.$$

β) $I_1 = \int_4^6 f^{-1}(x)dx$. Με βάση το (α) ερώτημα και κάνοντας τις ίδιες

αντικαταστάσεις έχουμε: $I_1 = \int_2^3 uf'(u)du = [uf(u)]_2^3 - \int_2^3 f(u)du = 9$.

41. $f^5(x) + 4f(x) = 5x \quad (1)$.

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε $f^5(x_1) = f^5(x_2)$ και

$$4f(x_1) = 4f(x_2) \text{ άρα } f^5(x_1) + 4f(x_1) = f^5(x_2) + 4f(x_2). \text{ Όποτε από την}$$

(1) $\Rightarrow 5x_1 = 5x_2$, άρα $x_1 = x_2$ επομένως η f αντιστρέφεται. Αν $f(x) = y$ τότε

$$x = f^{-1}(y) \text{ άρα από την (1) } y^5 + 4y = 5f^{-1}(y) \text{ άρα } f^{-1}(x) = \frac{x^5 + 4x}{5}, x \in \mathbb{R}.$$

β) Στην (1) για $x = 0$: $f^5(0) + 4f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)[f^4(0) + 4] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

και στην (1) για $x = 1$: $f^5(1) + 4f(1) - 5 = 0$. Θεωρούμε την

$$g(x) = x^5 + 4x - 5 \text{ η οποία είναι } \nearrow \mathbb{R} \text{ και έχει μοναδική ρίζα } x = 1 \text{ άρα}$$

$$f(1) = 1.$$

2ος τρόπος: $f^{-1}(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0, f^{-1}(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$.

γ) $I = \int_0^1 (f(x) + f^{-1}(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f^{-1}(x) dx$. Θετώ $u = f^{-1}(x)$
 $\Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$. Για $x=0$ είναι $u = f^{-1}(0) = 0$ και για $x=1$ είναι
 $u = f^{-1}(1) = 1$, οπότε

$$I = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^1 f(x) dx + [u f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du = f(1) = 1.$$

δ) Έστω $f(x) \leq x$ τότε $f^5(x) \leq x^5$ και $4f(x) \leq 4x$, οπότε

$$f^5(x) + 4f(x) \leq x^5 + 4x \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 5x \leq x^5 + 4x \Leftrightarrow x^5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$$

άτοπο, αφού $x \in (0, 1)$ άρα $f(x) > x$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

42.α) Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$ αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
 $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$.
 Επειδή η f είναι συνεχής τότε $f \nearrow \mathbb{R}$ άρα η f είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{Είναι } x \geq 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) \geq 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) \geq f(\rho) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x) \geq \rho > 0.$$

Άρα ορίζεται το $f'(f^{-1}(x))$ για κάθε $x \geq 0$. Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$
 και $f^{-1}(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$, τότε $f'(f^{-1}(x)) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

β) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(f^{-1}(x)) = x$ (1). Με παραγώγιση της σχέσης (1)

$$\text{κατά μέλη έχουμε } f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1 \stackrel{f'(f^{-1}(x)) > 0}{\Leftrightarrow} (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \Leftrightarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{e^{f^{-1}(x)} - f^{-1}(x) - 1}{e^{f^{-1}(x)}} \Leftrightarrow (f^{-1})'(x) = 1 - \frac{f^{-1}(x) + 1}{e^{f^{-1}(x)}}.$$

$$\text{Άρα } \int_0^a \left(1 - \frac{f^{-1}(x) + 1}{e^{f^{-1}(x)}} \right) dx = \int_0^a (f^{-1})'(x) dx = [f^{-1}(x)]_0^a = f^{-1}(a) - \rho \text{ γιατί}$$

$$f(\rho) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = \rho.$$

Σύνθετες ασκήσεις

43.α) Έστω ότι $\int_0^1 f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\int_0^1 \left(3 \int_0^1 f(x) dx \right) dt = 3 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 3\lambda dt = 3 \Leftrightarrow 3\lambda(1-0) = 3 \Leftrightarrow \lambda = 1, \text{ άρα } \int_0^1 f(x) dx = 1.$$

β) 1ος τρόπος: Έστω ότι $f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, τότε επειδή η συνάρτηση

$g(x) = f(x) - 1$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0, 1]$. Αν

$g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, τότε

$$\int_0^1 g(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - 1) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - (1 - 0) > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx > 1$$

άτοπο. Αν $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, τότε

$$\int_0^1 g(x) dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (f(x) - 1) dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - (1 - 0) < 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx < 1$$

άτοπο. Άρα υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 1$.

2ος τρόπος: Είναι $\int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow F(1) - F(0) = 1$, όπου F αρχική της f .

Η F είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $F'(x) = f(x)$.

Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (0, 1) \subseteq [0, 1]$ τέτοιο, ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f(\xi) = 1.$$

γ) Έστω $h(x) = F(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $h'(x) = F'(x) - 1 = f(x) - 1$.

Για κάθε $x < \xi$ είναι $f(x) < f(\xi) = 1 \Rightarrow h'(x) < 0$ και για κάθε $x > \xi$ είναι

$f(x) > f(\xi) = 1 \Rightarrow h'(x) > 0$. Επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, +\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(\xi) = F(\xi) - \xi$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$h(x) \geq h(\xi) \Leftrightarrow F(x) - x \geq F(\xi) - \xi \Leftrightarrow F(x) - F(\xi) \geq x - \xi$$

$$\delta) \int_0^1 xf'(x) dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - 1.$$

44.α) Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ για τα οποία να ισχύει

$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ τότε } f^3(x_1) \geq f^3(x_2) \text{ και } 2f(x_1) \geq 2f(x_2) \text{ οπότε}$$

$$f^3(x_1) + 2f(x_1) \geq f^3(x_2) + 2f(x_2) \Leftrightarrow x_1 + 3 \geq x_2 + 3 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \text{ άτοπο, άρα για}$$

κάθε $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε $f \nearrow \mathbb{R}$.

β) $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ } 1-1 \Rightarrow f \text{ αντιστρέφεται. Αν } f(x) = y \text{ τότε } x = f^{-1}(y) \text{ και από τη}$
σχέση $f^3(x) + 2f(x) = x + 3$ (1) προκύπτει $f^{-1}(y) = y^3 + 2y - 3$, $y \in \mathbb{R}$ άρα
 $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Αρχικά θα βρούμε τα διαστήματα στα οποία η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την
 $y = x$. Είναι $f^{-1}(x) > x \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 - x > 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 3 > 0$.

Έστω $g(x) = x^3 + x - 3$ είναι $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$ και

$$g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = (-\infty, +\infty), \text{ οπότε υπάρχει μοναδικό } x_1 \in \mathbb{R}$$

τέτοιο, ώστε $g(x_1) = 0$. Για κάθε $x < x_1 \xrightarrow{g'} g(x) < g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) < x$ και λόγω συμμετρίας $f(x) > x$, ενώ για $x > x_1 \xrightarrow{g'} g(x) > g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(x) > x$ και λόγω συμμετρίας $f(x) < x$. Άρα η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) $I = \int_{-3}^0 f(x) dx$. Έστω $f(x) = u$ οπότε $x = f^{-1}(u) \Leftrightarrow x = u^3 + 2u - 3$ και $dx = (3u^2 + 2) du$. Για $x = -3$ είναι $f^{-1}(u) = -3 = f^{-1}(0)$ άρα $u = 0$ ενώ για $x = 0$ είναι $f^{-1}(u) = 0 = f^{-1}(1)$ άρα $u = 1$ οπότε

$$I = \int_0^1 u(3u^2 + 2) du = \left[\frac{3u^4}{4} + u^2 \right]_0^1 = \frac{7}{4}.$$

ε) Έχουμε $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{f^{-1}(x) + x}$. Είναι $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3$ η οποία είναι $\nearrow \mathbb{R}$ και με σύνολο τιμών $f^{-1}(A) = A_f = (-\infty, +\infty)$. Έστω $f(x) = u \Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$ Όταν $x \rightarrow +\infty$ τότε $f(x) \rightarrow +\infty$ άρα $u \rightarrow +\infty$ και

$$L = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{(u^3 + 2u - 3)^3 + 2(u^3 + 2u - 3) - 3 + (u^3 + 2u - 3)} = 0.$$

στ) Παραγωγίζουμε στην (1) και έχουμε: $3f^2(x)f'(x) + 2f'(x) = 1$ (2) και $6f(x)(f'(x))^2 + 3f^2(x)f''(x) + 2f''(x) = 0$.

Για $x = x_0$ έχουμε $6f(x_0)(f'(x_0))^2 = 0$, αφού $f''(x_0) = 0$, οπότε $f(x_0) = 0$ ή $f'(x_0) = 0$, (άτοπο από (2)). Οπότε στην (1) για $x = x_0$ έχουμε $0 = x_0 + 3 \Leftrightarrow x_0 = -3$.

ζ) Η εξίσωση είναι $x^3 + 2x - 3 = e^{1-x} \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 - e^{1-x} = 0$. Έστω $h(x) = x^3 + 2x - 3 - e^{1-x}$. Είναι $h'(x) = 3x^2 + 2 + e^{1-x} > 0$ οπότε η h είναι $\nearrow$.

Είναι $h(1) = -1 < 0$, $h(2) = 9 - \frac{1}{e} > 0$, η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ άρα ισχύουν

οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$, οποία είναι μοναδική αφού η h είναι γνησίως αύξουσα.

45.α) Έστω ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $[1, 3]$.

• Αν ήταν $f(x_0) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$, οπότε $\int_1^3 f(x) dx > 0$ (άτοπο)

• Αν ήταν $f(x_0) < 0$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$, οπότε $\int_1^3 f(x) dx < 0$ (άτοπο). Οπότε η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $[1, 3]$, δηλαδή υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in [1, 3]$ με $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) < 0$ οπότε αφού f συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $\rho \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq [1, 3]$ ώστε $f(\rho) = 0$.

β) Έστω ότι η f'' διατηρεί πρόσημο στο $(1, 3)$ Αν $f''(x) > 0$ τότε $f' \nearrow [1, 3]$ οπότε και 1-1. Επειδή $f(1) = f(3) = f(\rho) = 0$ τότε από Θ. Rolle υπάρχουν $\theta_1 \in (1, \rho)$ και $\theta_2 \in (\rho, 3)$ ώστε $f'(\theta_1) = 0$ και $f'(\theta_2) = 0$, οπότε $f'(\theta_1) = f'(\theta_2) = 0$ και αφού f' είναι 1-1 τότε $\theta_1 = \theta_2$ (άτοπο).

Όμοια αν $f''(x) < 0$. Συνεπώς η f'' δεν διατηρεί πρόσημο στο $(1, 3)$ άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 3)$ με $f''(x_1) \cdot f''(x_2) < 0$.

46.α) i. Στην (1) $f(x+2) = f(x) + 4x$ για $x=0$ προκύπτει $f(0) = f(2)$ οπότε από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$ (3).

ii. Παραγωγίζουμε την (1), οπότε $f'(x+2) = f'(x) + 4$ (4) και για $x=0$: $f'(2) - f'(0) = 4$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για f' στο $[0, 2]$ οπότε υπάρχει

$$x_0 \in (0, 2) \text{ ώστε } f''(x_0) = \frac{f'(2) - f'(0)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{iii. } \int_{\xi}^{\xi+2} x f''(x) dx = [x f'(x)]_{\xi}^{\xi+2} - \int_{\xi}^{\xi+2} f'(x) dx = (\xi+2)f'(\xi+2) - \xi f'(\xi) - [f(\xi+2) - f(\xi)] \stackrel{(1),(3),(4)}{=} = (\xi+2)[f'(\xi) + 4] - 0 - 4\xi = 4\xi + 8 - 4\xi = 8.$$

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε

$$\int_0^2 f(x+2) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 4x dx \quad (5). \text{Θέτω } x+2 = u \text{ οπότε } dx = du. \text{ Για}$$

$x=0$ είναι $u=2$ άρα $u=0$ ενώ για $x=2$ είναι $u=4$ οπότε

$$\text{η (5) γίνεται } \int_2^4 f(u) du = \int_0^2 f(x) dx + [2x^2]_0^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_2^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + 8 \Leftrightarrow -2 \int_0^2 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = -2.$$

47.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, λόγω του θεωρήματος Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο στο διάστημα αυτό.

β) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[0, \pi]$ στο οποίο είναι παραγωγίσιμη. Τότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, οπότε $f'(x_0) = 0$. Είναι $f(x_0) < \eta \mu x_0$, $f'(x_0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $f(x) \leq f(x_0) < 0$.

Αν η f έχει μέγιστο στο 0 ή στο π , τότε επειδή $f(0) < \eta\mu 0 \cdot f'(0) = 0$,
 $f(\pi) < \eta\mu\pi \cdot f'(\pi) = 0$, είναι $f(x) \leq f(0) < 0$ και $f(x) \leq f(\pi) < 0$. Οπότε σε
 κάθε περίπτωση είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) < \eta\mu x f'(x) \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x) dx < \int_0^{\pi/2} \eta\mu x f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx < [\eta\mu x f(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f(x) dx < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (1 + \sigma\upsilon\nu x) f(x) dx < f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

δ) Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, η σχέση $f(x) < \eta\mu x f'(x)$ γίνεται:

$$2f(x)f'(x) > 2\eta\mu x f(x)f'(x) \Leftrightarrow 2f^2(x) > \eta\mu x (f^2(x))' \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx > \int_0^{\pi/2} \eta\mu x (f^2(x))' dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx > [\eta\mu x f^2(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f^2(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx + \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f^2(x) dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} [2f^2(x) + \sigma\upsilon\nu x f^2(x)] dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (2 + \sigma\upsilon\nu x) f^2(x) dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\epsilon) f(x) < \eta\mu x f'(x) \stackrel{f(x)<0, \eta\mu x>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\eta\mu x} > \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx < \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\eta\mu x} dx \quad (1)$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\eta\mu x} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} dx \stackrel{\substack{\sigma\upsilon\nu x = u \\ \eta\mu x dx = -du \\ x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 0}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-du}{1 - u^2} = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du.$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} = \frac{Au + A + Bu - B}{(u - 1)(u + 1)} = \frac{(A + B)u + A - B}{u^2 - 1}.$$

$$\text{Για να ισχύει η ισότητα για κάθε } u \neq \pm 1 \text{ πρέπει: } \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ άρα}$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u + 1}, \text{ οπότε:}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u + 1} \right) du = \left[\frac{1}{2} \ln|u - 1| - \frac{1}{2} \ln|u + 1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln 3$$

και $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu x} dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du = \frac{1}{2} \ln 3$. Η σχέση (1) γίνεται:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx < \frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow [\ln |f(x)|]_{\pi/3}^{\pi/2} < \frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow \ln \left| f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| - \ln \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| < \ln 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \ln \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \sqrt{3} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Έστω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ οπότε $dx = f'(u)du$. Για $x = -4$ είναι $f(u) = -4 = f(0) \Leftrightarrow u = 0$, ενώ για $x = e-3$ είναι $f(u) = e-3 = f(1) \Leftrightarrow u = 1$. Άρα $I = \int_{-4}^{e-3} f^{-1}(x) dx = \int_0^1 u f'(u) du = [u f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du =$
 $= f(1) - \int_0^1 (e^u + 2u - 5) du = e - 3 - [e^u]_0^1 - [u^2]_0^1 + 5[u]_0^1 =$
 $e - 3 - e + 1 - 1 + 5 = 2$. **Σωστή απάντηση Γ.**

2. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας στην σχέση $f^3(x) + f(x) = x$ (1) έχουμε

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 1} > 0 \text{ οπότε η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1, συνεπώς}$$

αντιστρέφεται. Αν $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ και η σχέση (1) γίνεται

$$y^3 + y = f^{-1}(y), \text{ άρα } f^{-1}(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε $dx = (f^{-1}(y))' dy$. Για $x = 0$ είναι $f^{-1}(y) = 0 = f^{-1}(0) \Leftrightarrow y = 0$, ενώ για $x = 2$ είναι $f^{-1}(y) = 2 = f^{-1}(1) \Leftrightarrow y = 1$. Άρα

$$I = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 y (f^{-1}(y))' dy = \int_0^1 y (3y^2 + 1) dy = 3 \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{4}.$$

Σωστή απάντηση Β.

3. Είναι $f''(x) = -f''(2-x) \Leftrightarrow f'(x) = f'(2-x) + c_1$. Για $x = 1$ είναι

$$f'(1) = f'(1) + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ οπότε } f'(x) = f'(2-x) \Leftrightarrow f(x) = -f(2-x) + c_2$$

Για $x = 1$ είναι $f(1) = -f(1) + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 2f(1) = 2$, άρα $f(x) + f(2-x) = 2$.

Οπότε $\int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 2dx$ (1) . Θέτουμε $2-x = \omega$ άρα $dx = -d\omega$, Για $x = 2$ είναι $\omega = 0$, ενώ για $x = 0$ είναι $\omega = 2$. Τότε $\int_0^2 f(2-x)dx = \int_2^0 f(\omega)(-d\omega) = \int_0^2 f(\omega)d\omega$. Συνεπώς η σχέση (1) γίνεται $2\int_0^2 f(x)dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 2$. **Σωστή απάντηση Α.**

4. Αν στη σχέση $f(a+x) + f(a-x) = \beta x^2$ θέσουμε όπου x το $x-\alpha$ τότε έχουμε: $f(a+(x-\alpha)) + f(a-(x-\alpha)) = \beta(x-\alpha)^2 \Leftrightarrow$

$f(x) + f(2\alpha-x) = \beta(x-\alpha)^2$ οπότε

$\int_0^{2\alpha} f(x)dx + \int_0^{2\alpha} f(2\alpha-x)dx = \int_0^{2\alpha} \beta(x-\alpha)^2 dx$ (1) .Είναι

$\int_0^{2\alpha} f(2\alpha-x)dx \stackrel{2\alpha-x=\omega}{=} \int_{2\alpha}^0 f(\omega)(-d\omega) = \int_0^{2\alpha} f(\omega)d\omega$ οπότε η σχέση (1) γίνεται

$$2\int_0^{2\alpha} f(x)dx = \beta \left[\frac{(x-\alpha)^3}{3} \right]_0^{2\alpha} = \beta \left(\frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^3}{3} \right) \Leftrightarrow$$

$$2\int_0^{2\alpha} f(x)dx = \frac{2\beta\alpha^3}{3} \Leftrightarrow \int_0^{2\alpha} f(x)dx = \frac{\beta\alpha^3}{3} . \textbf{Σωστή απάντηση Δ.}$$

$$\textbf{5. } 3\int_0^2 f^2(x)dx + 32 = 12\int_0^2 xf(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(x)dx + \frac{32}{3} = 4\int_0^2 xf(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(x)dx - \int_0^2 4xf(x)dx + \int_0^2 4x^2dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 (f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2)dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 (f(x) - 2x)^2 dx = 0 . \text{ Είναι } (f(x) - 2x)^2 \geq 0 \text{ οπότε αν υπάρχει } x_0 \in [0, 2]$$

τέτοιο, ώστε $f(x_0) - 2x_0 \neq 0$ θα ήταν $\int_0^2 (f(x) - 2x)^2 dx > 0$ (άτοπο) . Άρα

$$(f(x) - 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x . \textbf{Σωστή απάντηση Γ.}$$

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Λ	2. Σ	3. Σ	4. Σ	5. Σ	6. Λ	7. Σ	8. Λ	9. Σ

14

Ανισοτικές σχέσεις ολοκληρωμάτων

$$\int_a^b f(x)dx > \gamma \quad \text{ή} \quad \int_a^b f(x)dx < \delta$$

18.α) Έστω $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$, $x > 0$. $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$

Η f είναι $\nearrow(0, e]$ και $\searrow[e, +\infty)$ και έχει μέγιστο το $f(e)$. Άρα για κάθε $x > 0$

είναι $f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x=e$, είναι

$$\int_e^{2e} x^{\frac{1}{x}} dx < \int_e^{2e} e^{\frac{1}{e}} dx = e^{\frac{1}{e}} \cdot e = e^{\frac{1}{e}+1} = e^{\frac{e+1}{e}}.$$

β) Έστω $g(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$. $g'(x) = \frac{x \sigma \nu \eta x - \eta \mu x}{x^2} < 0$ για κάθε

$$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \text{ οπότε } g \searrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]. \text{ Για } x \geq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\eta \mu x}{x} \leq \frac{2}{\pi} \text{ και}$$

$$\text{επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για } x = \frac{\pi}{2} : \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\eta \mu x}{x} dx < \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 1.$$

γ) Έστω $h(x) = \eta \mu^{1821} x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ είναι $h'(x) = 1821 \eta \mu^{1820} x \cdot \sigma \nu \eta x > 0$ όταν

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ οπότε } h \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2} \right]. \text{ Για } x \leq \frac{\pi}{2} \text{ είναι } h(x) \leq h\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \eta \mu^{1821} x \leq 1$$

$$\text{και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για } x = \frac{\pi}{2} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^{1821} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$$

19. Για $x \geq \alpha$ θα είναι $f(x) \geq f(\alpha)$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \alpha$

$$\text{είναι: } \int_a^b f(x) dx > \int_a^b f(\alpha) dx \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx > f(\alpha)(b - a).$$

20.α) Έστω $g(x) = f(x) - x^4$, $x \geq 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$(0, +\infty)$ με $g'(x) = f'(x) - 4x^3$. Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\text{Για κάθε } x \geq 0 \stackrel{g'}{\Leftrightarrow} g(x) \geq g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq x^4.$$

β) $\int_0^1 \eta \mu x f(t) dt = 1 - x \Leftrightarrow \eta \mu x \int_0^1 f(t) dt - 1 + x = 0.$

Έστω $h(x) = \eta \mu x \int_0^1 f(t) dt - 1 + x$, $x \in [0, 1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(0) = -1 < 0$ και $h(1) = \eta \mu 1 \cdot \int_0^1 f(t) dt$. Είναι $1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \eta \mu 1 > 0$ και $f(x) \geq x^4 \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $\int_0^1 f(t) dt > 0$, οπότε $h(1) > 0$. Επειδή $h(0)h(1) < 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \eta \mu x f(t) dt = 1 - x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $h'(x) = \sin x \int_0^1 f(t) dt + 1 > 0 \Rightarrow h \nearrow [0, 1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

21.α) Έστω $g(x) = f(x) + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) - e^{-x} < 0 \Rightarrow g \searrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) > g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) > -e^{-x}$ και για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) < -e^{-x}$.

β) $\int_1^2 \ln(x+1)f(t)dt = 3x - e^x \Leftrightarrow \ln(x+1)\int_1^2 f(t)dt - 3x + e^x = 0$.

Έστω $h(x) = \ln(x+1)\int_1^2 f(t)dt - 3x + e^x$, $x \in [0, 1]$. Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(0) = 1 > 0$ και $h(1) = \ln 2 \cdot \int_1^2 f(t)dt - 3 + e$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < -e^{-x} < 0 \Rightarrow \int_1^2 f(t)dt < 0 \Leftrightarrow \ln 2 \int_1^2 f(t)dt < 0 \Leftrightarrow \ln 2 \int_1^2 f(t)dt - 3 + e < -3 + e < 0 \Rightarrow h(1) < 0$. Επειδή $h(0)h(1) < 0$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow \int_1^2 \ln(x+1)f(t)dt = 3x - e^x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$.

Αυξημένης δυσκολίας

22. Αφού η f είναι κυρτή τότε $f' \nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Στο διάστημα $[-1, x]$ με $x \in (-1, 1]$ εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει $\xi \in (-1, x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$. Όμως $-1 < \xi < x \leq 1$ άρα $\xi < 1$ οπότε $f'(\xi) < f'(1) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} < f'(1) \Leftrightarrow f(x) - f(-1) < f'(1)(x + 1)$ και $\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_{-1}^1 f(-1)dx < \int_{-1}^1 f'(1)(x + 1)dx \Leftrightarrow$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx - 2f(-1) < f'(1) \left[\frac{(x+1)^2}{2} \right]_{-1}^1 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx - 2f(-1) < 2f'(1) \Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx < 2[f(-1) + f'(1)].$$

23. Αφού η f είναι κοίλη η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Στο διάστημα $[-2, x]$ με $x \in (-2, 2]$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για την f , οπότε υπάρχει

$\xi \in (-2, x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2}$. Όμως $-2 < \xi < x \leq 2$ άρα $\xi < 2$ οπότε

$f'(\xi) > f'(2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} > f'(2) \Leftrightarrow f(x) - f(-2) > f'(2)(x + 2)$ και

$$\int_{-2}^2 f(x) dx - \int_{-2}^2 f(-2) dx > \int_{-2}^2 f'(2)(x + 2) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-2}^2 f(x) dx - 4f(-2) > f'(2) \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^2 \Leftrightarrow \int_{-2}^2 f(x) dx - 4f(-2) > 8f'(2) \Leftrightarrow$$

$$8f'(2) + 4f(-2) < \int_{-2}^2 f(x) dx \Leftrightarrow 2f'(2) + f(-2) < \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx$$

24.α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x} - 1 = \ln x - \frac{1}{x}$ και

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0, +\infty)$, οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει το πολύ 1

ρίζα. Είναι $f'(1) = -1 < 0$, $f'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2} = \frac{\ln 4 - \ln e}{2} > 0$,

δηλαδή $f'(1)f'(2) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\rho) = 0$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, το ρ είναι η μοναδική της ρίζα.

β) Για κάθε $0 < x < \rho$ είναι $f'(x) < f'(\rho) = 0$ και για κάθε $x > \rho$ είναι $f'(x) > f'(\rho) = 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \rho]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\rho, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο ρ .

γ) Για κάθε $1 \leq x \leq \rho \Leftrightarrow f(1) \geq f(x) \geq f(\rho) \Rightarrow f(x) \leq -1$ και για κάθε

$\rho \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(\rho) \leq f(x) \leq f(1) = -1$, άρα για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι

$f(x) \leq -1 \Leftrightarrow (x-1)\ln x - x \leq -1 \Leftrightarrow \ln(x^{x-1}) \leq x-1 \Leftrightarrow x^{x-1} \leq e^{x-1}$ και επειδή η

ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ είναι $\int_1^2 x^{x-1} dx < \int_1^2 e^{x-1} dx = [e^{x-1}]_1^2 = e-1$.

25.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\mu\epsilon \ f'(x) = \frac{-3(x^2 - 4x + 2)}{(x^2 - 4x + 6)^2}.$$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$	
f'	-	○	+	○	-
f					

Στο διπλανό πίνακα βλέπουμε ότι

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1 \leq x \leq 2$ είναι $f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$ και επειδή οι ισότητες στη σχέση αυτή ισχύουν μόνο για $x = 1$ και $x = 2$ αντίστοιχα, είναι:

$$0 < \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 dx \Leftrightarrow 0 < \int_1^2 f(x) dx < 1.$$

$$\beta) f(4-x) = \frac{(4-x)^2 - 4 + x}{(4-x)^2 - 4(4-x) + 6} = \frac{16 - 8x + x^2 - 4 + x}{16 - 8x + x^2 - 16 + 4x + 6} = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 4x + 6},$$

$$\text{οπότε } f(x) + f(4-x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 6} + \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 4x + 6} = \frac{2x^2 - 8x + 12}{x^2 - 4x + 6} \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f(4-x) = \frac{2(x^2 - 4x + 6)}{x^2 - 4x + 6} = 2 \text{ οπότε και}$$

$$\int_0^4 [f(x) + f(4-x)] dx = \int_0^4 2 dx \Leftrightarrow \int_0^4 f(x) dx + \int_0^4 f(4-x) dx = 8 \quad (1)$$

Θέτουμε $4-x = u \Leftrightarrow x = 4-u$ και $dx = -du$. Για $x=0$ είναι $u=4$ και για

$x=4$ είναι $u=0$. Τότε από τη σχέση (1) έχουμε $\int_0^4 f(x) dx +$

$$\int_4^0 f(u)(-du) = 8 \Leftrightarrow \int_0^4 f(x) dx + \int_0^4 f(u) du = 8 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^4 f(x) dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^4 f(x) dx = 4$$

$$\gamma) \text{ Για κάθε } 1 \leq x \leq 2 \text{ είναι } 0 \leq f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x)(f(x)-1) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) \leq f(x) \text{ και επειδή η ισότητα}$$

$$\text{δεν ισχύει για κάθε } x \in [1, 2], \text{ είναι: } \int_1^2 f^2(x) dx < \int_1^2 f(x) dx < 1$$

26.α) Έστω ότι $f(x) \neq 2$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, τότε επειδή η συνάρτηση

$g(x) = f(x) - 2$, $x \in [0, \pi]$ είναι συνεχής και διαφορετική του μηδενός διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $g(x) > 0 \Leftrightarrow$

$f(x) - 2 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2$ τότε $\int_0^\pi f(x) dx > \int_0^\pi 2 dx \Leftrightarrow 2\pi > 2\pi$ άτοπο.

Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $g(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - 2 < 0 \Leftrightarrow f(x) < 2$ τότε

$\int_0^\pi f(x) dx < \int_0^\pi 2 dx \Leftrightarrow 2\pi < 2\pi$ άτοπο. Επομένως υπάρχει $x_0 \in [1, 2]$ τέτοιο,

ώστε $f(x_0) = 2$, δηλαδή το 2 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f

β) Έστω ότι $f(x) \neq \pi \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) - \pi \cdot \eta\mu x \neq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Τότε,

επειδή η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \pi \cdot \eta\mu x$ είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Αν $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ τότε

$\int_0^\pi g(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi (f(x) - \pi \eta\mu x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx + \pi [\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi > 0 \Leftrightarrow 2\pi - \pi - \pi > 0 \Leftrightarrow 0 > 0$ άτοπο.

Αν $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ τότε και $\int_0^\pi g(x) dx < 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi (f(x) - \pi \cdot \eta\mu x) dx < 0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx + [\pi \cdot \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi < 0 \Leftrightarrow$

$2\pi - \pi - \pi < 0 \Leftrightarrow 0 < 0$ άτοπο. Επομένως η εξίσωση

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \pi \cdot \eta\mu x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[0, \pi]$.

2ος τρόπος: Έστω F αρχική της f . Τότε $\int_0^\pi f(x) dx = F(\pi) - F(0) = 2\pi$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = F(x) + \pi \sigma\upsilon\nu x$.

Η k είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο

$k'(x) = f(x) - \pi \eta\mu x$. Είναι $k(0) = k(\pi) \Leftrightarrow F(0) + \pi = F(\pi) - \pi \Leftrightarrow$

$F(\pi) - F(0) = 2\pi$ ισχύει οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιος ώστε $k'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \pi \eta\mu \xi$.

27.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της x_0 , στο οποίο παρουσιάζει ακρότατο. Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε $f'(x_0) = 0$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη τότε $f'' \leq 0$. Η g είναι συνεχής

και παραγωγίσιμη με παράγωγο: $g'(x) = e^{-2024 f(x)} f'(x)$.

Για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{-2021 f(x)} f'(x) > 0 \Leftrightarrow$

$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (-\infty, x_0]$.

Για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{-2021 f(x)} f'(x) < 0 \Leftrightarrow$

$g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [x_0, +\infty)$

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το $g(x_0)$. Άρα $g(x) \leq g(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0$.

$$\text{Άρα } \int_0^{x_0+1} g(x) dx < \int_0^{x_0+1} g(x_0) dx = x_0 g(x_0) + g(x_0).$$

$$\beta) \int_0^{x_0+1} x g'(x) dx > (x_0+1)(g(x_0+1) - g(x_0)) \Leftrightarrow$$

$$[xg(x)]_0^{x_0+1} - \int_0^{x_0+1} g(x) dx > (x_0+1)(g(x_0+1) - g(x_0)) \Leftrightarrow$$

$$(x_0+1)g(x_0+1) - \int_0^{x_0+1} g(x) dx > (x_0+1)g(x_0+1) - (x_0+1)g(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{x_0+1} g(x) dx < x_0 g(x_0) + g(x_0) \text{ το οποίο ισχύει σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.}$$

28. Η f είναι κοίλη στο $[2, x_0]$ άρα $f' \searrow [2, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, 4]$ άρα $f' \nearrow [x_0, 4]$. Επομένως η f' παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = x_0$ το $f'(x_0) = 0$ άρα $f'(x) \geq f'(x_0) = 0$ για κάθε $x \in [2, 4]$.

$$\text{Άρα } \int_{x_0}^4 |f'(x)| dx = \int_{x_0}^4 f'(x) dx = f(4) - f(x_0) = f(4) - 1. \text{ Είναι } f \nearrow [x_0, +\infty)$$

$$\text{άρα αν } 4 < \lambda \Leftrightarrow f(4) < f(\lambda) \Leftrightarrow f(4) - 1 < f(\lambda) - 1 \text{ άρα } \int_{x_0}^4 |f'(x)| dx + 1 < f(\lambda).$$

29.α) Είναι $\int_{x_0}^3 f'(x) dx = f(3) - f(x_0)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ το $f(x_0)$ και ολικό μέγιστο για $x = 3$ το $f(3)$.

Άρα $f(x) \leq f(3)$ για κάθε $x \in [0, 3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 3$ άρα $\int_2^3 f(x) dx < \int_2^3 f(3) dx \Leftrightarrow f(3) > 1$ (1). Αντίστοιχα $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in [0, 3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0$ άρα

$$\int_0^2 f(x) dx > \int_0^2 f(x_0) dx \Leftrightarrow -2 > 2f(x_0) \Leftrightarrow -f(x_0) > 1 \text{ (2).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) είναι $f(3) - f(x_0) > 2 \Leftrightarrow \int_{x_0}^3 f'(x) dx > 2$.

β) Από γνωστή ιδιότητα απολύτων είναι $-|f'(x)| \leq f'(x) \leq |f'(x)|$ για κάθε

$$x \in [0, 3]. \text{ Άρα } -\int_{x_0}^3 |f'(x)| dx \leq \int_{x_0}^3 f'(x) dx \leq \int_{x_0}^3 |f'(x)| dx \Leftrightarrow \left| \int_{x_0}^3 f'(x) dx \right| \leq$$

$$\int_{x_0}^3 |f'(x)| dx \text{ όμως } \int_{x_0}^3 f'(x) dx > 2 > 0 \text{ άρα } \int_{x_0}^3 |f'(x)| dx \geq \int_{x_0}^3 f'(x) dx > 2.$$

30. Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση, τότε:

Είναι $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 f(x) dx - 2 \int_0^1 x f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx =$
 $= \int_0^1 x^2 f(x) dx - 2 \int_0^1 x f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = 2\alpha^2 - 2\left(\alpha^2 + \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha =$
 $= 2\alpha^2 - 2\alpha^2 - \alpha + \alpha = 0$. Επειδή $f(x) > 0$ τότε $(x-1)^2 f(x) \geq 0$ με την ισότητα
 να ισχύει μόνον για $x=1$ άρα $\int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx > 0$ άτοπο.
 Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

$$\gamma \leq \int_a^b f(x) dx \leq \delta \quad \text{ή} \quad \gamma < \int_a^b f(x) dx < \delta$$

31.α) Έστω $f(x) = \frac{e^x}{x^x}$, $x \in (0, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^x} \right)' = \left(\frac{e^x}{e^{x \ln x}} \right)' = (e^{x-x \ln x})' = -\ln x \cdot e^{x-x \ln x}.$$

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \cdot e^{x-x \ln x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$. Για κάθε
 $x \in (1, 2)$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$. Οπότε

$$f(2) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow \frac{e^2}{4} \leq \frac{e^x}{x^x} \leq e, \text{ άρα και } \int_1^2 \frac{e^2}{4} dx < \int_1^2 \frac{e^x}{x^x} dx < \int_1^2 e dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^2}{4} < \int_1^2 \frac{e^x}{x^x} dx < e.$$

β) Έστω $f(x) = e^{x^2}$ είναι $f'(x) = 2xe^{x^2} > 0$ όταν $x \in (0, 2)$ οπότε $f \nearrow$ στο
 $[0, 2]$ και $f(0) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e^4$ άρα

$$\int_0^2 1 dx < \int_0^2 e^{x^2} dx < \int_0^2 e^4 dx \Leftrightarrow 2 < \int_0^2 e^{x^2} dx < 2e^4.$$

γ) Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4}$, $x \in [-2, 2]$. Είναι $f'(x) = \frac{4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2} < 0$ για

κάθε $x \in (-2, 2)$ οπότε $f \searrow [-2, 2]$. Είναι $f(2) \leq f(x) \leq f(-2) \Leftrightarrow$

$$0 \leq \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4} \leq 2 \text{ άρα } 0 < \int_{-2}^2 \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4} dx < \int_{-2}^2 2 dx = 8.$$

δ) $f(x) = \frac{x^4 + 5}{x^4 + 2} = \frac{x^4 + 2 + 3}{x^4 + 2} = 1 + \frac{3}{x^4 + 2}$ και $f'(x) = \frac{-3 \cdot 4x^3}{(x^4 + 2)^2} < 0$ όταν

$$x \in (0, 2) \text{ οπότε } f \searrow [0, 2]. \text{ Είναι } f(2) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{21}{18} \leq \frac{x^4 + 5}{x^4 + 2} \leq \frac{5}{2} \text{ οπότε}$$

$$\int_0^2 \frac{21}{18} dx < \int_0^2 \frac{x^4 + 5}{x^4 + 2} dx < \int_0^2 \frac{5}{2} dx \Leftrightarrow \frac{7}{3} < \int_0^2 \frac{x^4 + 5}{x^4 + 2} dx < 5.$$

32. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, x]$,

$x \in (0, 2]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x) \subseteq (0, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow xf'(\xi) = f(x) - f(0). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι δύο φορές}$$

παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0, 2]$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

αυτό. Είναι $0 < \xi < x < 2$ άρα $f'(\xi) > f'(x) \Leftrightarrow xf'(\xi) > xf'(x) \Leftrightarrow$

$f(x) - f(0) > xf'(x) \Leftrightarrow f(x) - f(0) - xf'(x) > 0$. Επειδή για $x = 0$ ισχύει ότι

$f(0) - f(0) - 0 \cdot f'(0) = 0$, είναι $f(x) - f(0) - xf'(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$ άρα

$$\int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 f(0) dx - \int_0^2 xf'(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx - f(0)(2 - 0) - [xf(x)]_0^2 + \int_0^2 f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^2 f(x) dx - 2f(0) - 2f(2) > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx > f(2) + f(0)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = f'(0)x + f(0). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κοίλη, βρίσκεται}$$

κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$f(x) \leq f'(0)x + f(0)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, είναι

$$\int_0^2 f(x) dx < \int_0^2 (f'(0)x + f(0)) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx < f'(0) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + 2f(0) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx < 2f'(0) + 2f(0).$$

33. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, x]$, $1 < x < 2$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (1, x): f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}. \text{ Επειδή } 1 < \xi < x < 2 \text{ είναι } \xi < 2. \text{ Όμως } f' \nearrow$$

$$\text{άρα } f'(\xi) < f'(2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} < f'(2) \Leftrightarrow f(x) < f'(2)(x - 1) + f(1). \text{ Επειδή}$$

για $x = 1$ ισχύει ότι $f(1) = f'(2)(1 - 1) + f(1)$, είναι

$f(x) \leq f'(2)(x - 1) + f(1)$ για κάθε $x \geq 1$ οπότε

$$\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 f'(2)(x - 1) dx + \int_1^2 f(1) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx < \frac{1}{2} f'(2) + f(1). \text{ Η}$$

εφαπτομένη της C_f στο $(2, f(2))$ έχει εξίσωση

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = f'(2)(x - 2) + f(2) . \text{ Επειδή η } f \text{ είναι κυρτή,}$$

βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq f'(2)(x - 2) + f(2)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$,

$$\text{είναι } \int_1^2 f(x) dx > \int_1^2 (f'(2)(x - 2) + f(2)) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x) dx > f'(2) \left[\frac{(x-2)^2}{2} \right]_1^2 + f(2) \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx > f(2) - \frac{1}{2} f'(2) .$$

$$\mathbf{34.α)} 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^v}{2} \leq \frac{x^v}{x+1} \leq x^v \text{ οπότε}$$

$$\int_0^1 \frac{x^v}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^v}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^v dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{x^{v+1}}{v+1} \right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{x^v}{x+1} dx \leq \left[\frac{x^{v+1}}{v+1} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{v+1} \leq \int_0^1 \frac{x^v}{x+1} dx \leq \frac{1}{v+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq (v+1) I_v \leq 1 .$$

$$\mathbf{β)} I_{v+1} + I_v = \int_0^1 \frac{x^{v+1}}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{x^v}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{v+1} + x^v}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^v (x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{v+1} .$$

$$\mathbf{γ)} \frac{1}{2} \leq (v+1) I_v \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2(v+1)} \leq I_v \leq \frac{1}{v+1} . \text{ Είναι } \lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{v+1} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(v+1)} = 0 , \text{ άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{v \rightarrow +\infty} I_v = 0 .$$

$$\mathbf{δ)} \text{ Είναι } I_{v+1} + I_v = \frac{1}{v+1} , \text{ οπότε για } v=3 : I_4 + I_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_4 = \frac{1}{4} - I_3 , \text{ για } v=2 :$$

$$I_3 + I_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow I_3 = \frac{1}{3} - I_2 , \text{ για } v=1 :$$

$$I_2 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \Leftrightarrow$$

$$I_2 = \frac{1}{2} - 1 + [\ln(x+1)]_0^1 = -\frac{1}{2} + \ln 2 .$$

$$\text{Άρα } I_3 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 \right) = \frac{5}{6} - \ln 2 \text{ και } I_4 = \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) = \ln 2 - \frac{7}{12} .$$

35. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ τότε από ΘΜΕΤ θα έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m οπότε θα έχει σύνολο τιμών το $[m, M]$. Είναι

$$m \leq f(x) \leq M \leq 0 \Leftrightarrow x^4 m \leq x^4 f(x) \leq x^4 M \text{ άρα}$$

$$\int_0^1 x^4 m \, dx \leq \int_0^1 x^4 f(x) \, dx \leq \int_0^1 x^4 M \, dx \Leftrightarrow$$

$$m \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \leq \int_0^1 x^4 f(x) \, dx \leq M \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{m}{5} \leq \int_0^1 x^4 f(x) \, dx \leq \frac{M}{5} \Leftrightarrow$$

$$m \leq 5 \int_0^1 x^4 f(x) \, dx \leq M \text{ άρα το } 5 \int_0^1 x^4 f(x) \, dx \in f([a, \beta]) \text{ επομένως υπάρχει}$$

$$\xi \in [0, 1] \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = 5 \int_0^1 x^4 f(x) \, dx.$$

$$\int_a^\beta f(x) \, dx \geq \int_a^\beta g(x) \, dx \quad \text{ή} \quad \int_a^\beta f(x) \, dx > \int_a^\beta g(x) \, dx$$

36.α) Έστω $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$, $x \in [2, 3]$.

Είναι $f'(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1) > 0 \Rightarrow f \nearrow [2, 3]$. Για κάθε $x \in [2, 3]$ είναι

$$x < x+1 \xrightarrow{f \nearrow} f(x) < f(x+1) \Leftrightarrow x^x < (x+1)^{x+1} \Rightarrow \int_2^3 x^x \, dx < \int_2^3 (x+1)^{x+1} \, dx.$$

β) Έστω $f(x) = \ln x^4 - \ln^3 x = 4 \ln x - \ln^3 x = \ln x (2 - \ln x)(2 + \ln x)$.

Είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, άρα $4 \ln x - \ln^3 x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x^4 - \ln^3 x \geq 0$

οπότε και $\int_1^e (\ln x^4 - \ln^3 x) \, dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^e \ln x^4 \, dx - \int_1^e \ln^3 x \, dx \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\int_1^e \ln x^4 \, dx \geq \int_1^e \ln^3 x \, dx.$$

γ) Αρκεί για κάθε $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$ να είναι $x^x \geq (2-x)^{x-2} \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(2-x)^{x-2} \Leftrightarrow$

$$x \ln x \geq (x-2) \ln(2-x) \Leftrightarrow x \ln x - (x-2) \ln(2-x) \geq 0.$$

Έστω $f(x) = x \ln x - (x-2) \ln(2-x)$, $x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$. Είναι

$$f'(x) = \ln x + 1 - \ln(2-x) - 1 = \ln x - \ln(2-x).$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x - \ln(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \ln(2-x) \Leftrightarrow x \geq 2-x \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ είναι

$$f(x) \geq f(1) = 0 \Leftrightarrow x \ln x - (x-2) \ln(2-x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \ln x \geq (x-2) \ln(2-x) \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln(2-x)^{x-2} \Leftrightarrow x^x \geq (2-x)^{x-2} \text{ και επειδή η}$$

ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, είναι: $\int_1^{3/2} x^x dx > \int_1^{3/2} (2-x)^{x-2} dx$.

37.α) Είναι $1+x^9 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt[7]{1+x^9} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[7]{1+x^9}} \leq 1$ οπότε $\frac{x^{19}}{\sqrt[7]{1+x^9}} \leq x^{19}$

$$\text{άρα } \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[7]{1+x^9}} dx < \int_0^1 x^{19} dx = \left[\frac{x^{20}}{20} \right]_0^1 = \frac{1}{20}$$

β) Στο διάστημα $[0,1]$ έχουμε: $\frac{1}{1+x^{60}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1+x^{30}}{1+x^{60}} \leq 1+x^{30}$

$$\text{οπότε } \int_0^1 \frac{1+x^{30}}{1+x^{60}} dx < \int_0^1 (1+x^{30}) dx = 1 + \left[\frac{x^{31}}{31} \right]_0^1 = \frac{32}{31} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1+x^{30}}{1+x^{60}} dx < \frac{32}{31}$$

γ) Στο διάστημα $[1, \alpha]$ έχουμε: $\frac{1+x^{30}}{1+x^{60}} < \frac{1+x^{30}}{x^{60}} = \frac{1}{x^{60}} + \frac{1}{x^{30}}$ άρα και

$$\int_1^{\alpha} \frac{1+x^{30}}{1+x^{60}} dx \leq \int_1^{\alpha} \left(\frac{1}{x^{60}} + \frac{1}{x^{30}} \right) dx = \left[\frac{x^{-59}}{-59} \right]_1^{\alpha} + \left[\frac{x^{-29}}{-29} \right]_1^{\alpha} = -\frac{1}{59\alpha^{59}} - \frac{1}{29\alpha^{29}} +$$

$$\frac{1}{59} + \frac{1}{29} < \frac{1}{59} + \frac{1}{29} = \frac{1}{58} + \frac{2}{58} = \frac{3}{58}. \text{ Συνεπώς } \int_1^{\alpha} \frac{1+x^{30}}{1+x^{60}} dx < \frac{3}{58}.$$

38.α) $f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$, ενώ για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 0$.

β) Είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x \ln x \geq x - 1 \Leftrightarrow \ln x^x \geq x - 1 \Leftrightarrow x^x \geq e^{x-1}$ οπότε και

$$\int_1^2 x^x dx > \int_1^2 e^{x-1} dx = \left[e^{x-1} \right]_1^2 = e - 1.$$

39.α) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x + 1$. Αντικαθιστώντας όπου x το $x^2 - 1$ έχουμε $e^{x^2-1} \geq x^2 - 1 + 1 \Leftrightarrow e^{x^2-1} \geq x^2$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{x^2-1} \geq x^2 \Leftrightarrow e^{x^2} e^{x^2-1} \geq x^2 e^{x^2} \Leftrightarrow e^{2x^2-1} \geq x^2 e^{x^2}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, είναι

$$\int_0^1 e^{2x^2-1} dx > \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx$$

40.α) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1$. Αντικαθιστώντας

όπου x το $x^2 + 1$ έχουμε $\ln(x^2 + 1) \leq x^2 + 1 - 1 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) \leq x^2$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\ln(x^2 + 1) \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 \ln(x^2 + 1) \leq x^4$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, έχουμε:

$$\int_0^5 x^2 \ln(x^2 + 1) dx < \int_0^5 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^5 = 625.$$

Αυξημένης δυσκολίας

41. $f'(x) + f(x) > 2xe^{-x} \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) - 2x > 0$ οπότε

$(e^x f(x) - x^2)' > 0$. Έστω $g(x) = e^x f(x) - x^2$ τότε $g'(x) > 0$ άρα η $g \nearrow [0, 1]$

και για $0 \leq x \leq 1$ είναι $g(0) \leq g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow$

$$0 \leq e^x f(x) - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq e^x f(x) \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow e^{-x} x^2 \leq f(x) \leq e^{-x} (x^2 + 1),$$

οπότε $\int_0^1 e^{-x} x^2 dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 e^{-x} (x^2 + 1) dx$ (1).

$$\begin{aligned} \text{Έστω } I_1 &= \int_0^1 e^{-x} x^2 dx = \int_0^1 (-e^{-x})' x^2 dx = \left[-e^{-x} x^2 \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) \cdot 2x dx = \\ &= -\frac{1}{e} + \int_0^1 e^{-x} 2x dx = -\frac{1}{e} + \int_0^1 (-e^{-x})' 2x dx = -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x} 2x \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) \cdot 2 dx = \\ &= -\frac{1}{e} - \frac{2}{e} + 2 \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{3}{e} - 2 \left[e^{-x} \right]_0^1 = -\frac{3}{e} - 2 \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = 2 - \frac{5}{e} \text{ και} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^1 e^{-x} (x^2 + 1) dx = \int_0^1 (-e^{-x})' (x^2 + 1) dx =$$

$$\left[-e^{-x} (x^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) \cdot 2x dx = 1 - \frac{2}{e} + \int_0^1 e^{-x} 2x dx =$$

$$1 - \frac{2}{e} + \int_0^1 (-e^{-x})' 2x dx = 1 - \frac{2}{e} + \left[-e^{-x} 2x \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) \cdot 2 dx =$$

$$= 1 - \frac{2}{e} - \frac{2}{e} + 2 \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{4}{e} - 2 \left(\frac{1}{e} - 1 \right) = 3 - \frac{6}{e}.$$

Άρα η (1) γίνεται $2 - \frac{5}{e} < \int_0^1 f(x) dx < 3 - \frac{6}{e}$.

42.α) Έστω $g(x) = 2f(x) - (x-1)f(3) - (3-x)f(1)$, $x \in [1, 3]$, $x \in [\alpha, \beta]$.

$$\text{Είναι } g'(x) = 2f'(x) - f(3) + f(1) = 2 \left(f'(x) - \frac{f(3) - f(1)}{2} \right).$$

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1,3]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (1,3)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(3) - f(1)}{2} \text{ άρα } g'(x) = 2(f'(x) - f'(\xi)).$$

Για $1 < x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, \xi]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για $\xi < x < 3 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[\xi, 3]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η g έχει τοπικά ελάχιστα τα $g(1) = 0, g(3) = 0$, οπότε έχει ελάχιστο το 0 και για κάθε $x \in [1,3]$ ισχύει ότι $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2f(x) \geq (x-1)f(3) + (3-x)f(1)$.

β) Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$\int_1^3 2f(x) dx > \int_1^3 [(x-1)f(3) + (3-x)f(1)] dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_1^3 f(x) dx > \left[f(3) \left(\frac{x^2}{2} - x \right) - \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) f(1) \right]_1^3 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_1^3 f(x) dx > f(3) \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(9 - \frac{9}{2} \right) f(1) - f(3) \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(3 - \frac{1}{2} \right) f(1) \Leftrightarrow$$

$$2 \int_1^3 f(x) dx > f(3) \left(\frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 \right) + \left(3 - \frac{1}{2} - 9 + \frac{9}{2} \right) f(1) \Leftrightarrow$$

$$2 \int_1^3 f(x) dx > 2f(3) - 2f(1) \Leftrightarrow \int_1^3 f(x) dx > f(3) - f(1).$$

43.α) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2, x]$, $x \in (2,3]$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (2, x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}. \text{ Επειδή } \xi < x < 3 \text{ και } f' \nearrow [2,3] \text{ είναι}$$

$$f'(\xi) < f'(3) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} < f'(3) \Leftrightarrow f(x) - f(2) < f'(3)(x - 2).$$

Αν $x = 2$ ισχύει η ισότητα.

Οπότε για κάθε $x \in [2,3]$ είναι $f(x) - f(2) \leq f'(3)(x - 2)$.

β) Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=2$ οπότε έχουμε:

$$\int_2^3 f(x) dx - \int_2^3 f(2) dx < f'(3) \int_2^3 (x - 2) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 f(x) dx - f(2)(3 - 2) < f'(3) \frac{3^2 - 2^2}{2} - 2f'(3)(3 - 2) \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 f(x) dx < f(2) + \frac{5}{2}f'(3) - 2f'(3) \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) dx < f(2) + \frac{1}{2}f'(3).$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \eta < \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx$$

44. Για κάθε $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(1) \geq f(x) \geq f(2)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1, 2]$, είναι $\int_1^2 f(x) dx > \int_1^2 f(2) dx = f(2)(2-1) = f(2)$ (1)

Για κάθε $2 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow f(2) \geq f(x) \geq f(3)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [2, 3]$, είναι $\int_2^3 f(x) dx < \int_2^3 f(2) dx = f(2)(3-2) = f(2)$ (2).

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \int_2^3 f(x) dx < \int_2^3 f(2) dx < \int_1^2 f(x) dx.$$

$$45. \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 2 \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x) dx < 2 \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x) dx < \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx. \text{ Είναι } \alpha \leq x \leq \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(x) \geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ και}$$

επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, είναι:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) dx < \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx < \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(\alpha) dx \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right) < \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx < f(\alpha)\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \frac{\beta-\alpha}{2} < \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx < f(\alpha) \frac{\beta-\alpha}{2} \quad (1).$$

Είναι $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq x \leq \beta \Leftrightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq f(x) \geq f(\beta)$ και επειδή η ισότητα δεν

ισχύει για κάθε $x \in \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, είναι: $\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(\beta) dx < \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x) dx <$

$$\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) dx \Leftrightarrow f(\beta) \frac{\beta-\alpha}{2} < \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x) dx < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \frac{\beta-\alpha}{2} \quad (2).$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x) dx < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \frac{\beta-\alpha}{2} < \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x) dx.$$

$$46. \int_{-2}^{-1} f(x) dx > \int_4^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x) dx > -\int_3^4 f(x) dx$$

Επειδή γνωρίζουμε την μονοτονία της f στο $[1, 4]$ θα μετατρέψουμε το

$\int_{-2}^{-1} f(x) dx$ με άκρα στο διάστημα αυτό. Θέτουμε λοιπόν $u = -x$, τότε είναι $du = -dx$ και για $x = -2$ είναι $u = 2$ ενώ για $x = -1$ είναι $u = 1$. Άρα $\int_{-2}^{-1} f(x) dx = -\int_2^1 f(-u) du = \int_1^2 f(-u) du = -\int_1^2 f(u) du$ αφού f περιττή. Αν τώρα G είναι μία παράγουσα της f θα είναι $\int_{-2}^{-1} f(x) dx =$
 $= -\int_1^2 f(x) dx = G(1) - G(2)$ και αντίστοιχα $\int_3^4 f(x) dx = G(4) - G(3)$.

Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την G σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 2]$, $[3, 4]$ και προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 2)$ και $\xi_2 \in (3, 4)$ τέτοια ώστε

$$G'(\xi_1) = \frac{G(2) - G(1)}{2 - 1} \Leftrightarrow f(\xi_1) = -(G(1) - G(2)) \Leftrightarrow$$

$$f(\xi_1) = \int_1^2 f(x) dx \Leftrightarrow f(\xi_1) = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx \text{ και}$$

$$G'(\xi_2) = \frac{G(4) - G(3)}{4 - 3} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \int_3^4 f(x) dx.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(\xi_1) < f(\xi_2) \Leftrightarrow -\int_{-2}^{-1} f(x) dx < \int_3^4 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-2}^{-1} f(x) dx > -\int_3^4 f(x) dx \Leftrightarrow \int_{-2}^{-1} f(x) dx > \int_4^3 f(x) dx.$$

Συνάρτηση σταθερού προσήμου

$$\begin{aligned} 47. & \text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } (f(x) + x^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + 2x^2f(x) + x^4 \geq 0 \Leftrightarrow \\ & 2x^2f(x) \geq -f^2(x) - x^4, \text{ οπότε και } 2\int_0^2 x^2f(x) dx \geq \int_0^2 (-f^2(x) - x^4) dx \Leftrightarrow \\ & 2\int_0^2 x^2f(x) dx \geq -\int_0^2 f^2(x) dx - \int_0^2 x^4 dx \Leftrightarrow 2\int_0^2 x^2f(x) dx \geq -\frac{8}{5} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 \Leftrightarrow \\ & 2\int_0^2 x^2f(x) dx \geq -\frac{8}{5} - \frac{32}{5} \Leftrightarrow 2\int_0^2 x^2f(x) dx \geq -8 \Leftrightarrow \int_0^2 x^2f(x) dx \geq -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48. \alpha) & \int_1^2 f^2(x) dx + 1 \geq 2\int_1^2 f(x) dx \Leftrightarrow \int_1^2 f^2(x) dx - 2\int_1^2 f(x) dx \geq -1 \Leftrightarrow \\ & \int_1^2 (f^2(x) - 2f(x)) dx \geq -1 \Leftrightarrow \int_1^2 (f^2(x) - 2f(x) + 1 - 1) dx \geq -1 \Leftrightarrow \\ & \int_1^2 (f(x) - 1)^2 dx - \int_1^2 1 dx \geq -1 \Leftrightarrow \int_1^2 (f(x) - 1)^2 dx - (2 - 1) \geq -1 \Leftrightarrow \\ & \int_1^2 (f(x) - 1)^2 dx - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \int_1^2 (f(x) - 1)^2 dx \geq 0 \text{ ισχύει αφού } (f(x) - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta) \int_1^2 f^2(x) dx &\geq 2 \int_1^2 x f(x) dx - \frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 f^2(x) dx - 2 \int_1^2 x f(x) dx \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_1^2 (f^2(x) - 2xf(x)) dx &\geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 (f^2(x) - 2xf(x) + x^2 - x^2) dx \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_1^2 (f(x) - x)^2 dx - \int_1^2 x^2 dx &\geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 (f(x) - x)^2 dx - \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_1^2 (f(x) - x)^2 dx - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) &\geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 (f(x) - x)^2 dx - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_1^2 (f(x) - x)^2 dx - \frac{7}{3} &\geq -\frac{7}{3} \Leftrightarrow \int_1^2 (f(x) - x)^2 dx \geq 0 \text{ ισχύει αφού} \\
 (f(x) - x)^2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

$$49. \alpha) \lambda^2 f(x) + 2\lambda + \frac{1}{f(x)} \geq 0 \quad (1) \stackrel{f(x) > 0}{\Rightarrow} \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda f(x) + 1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}.$$

β) Ολοκληρώνοντας στην (1) έχουμε

$$\lambda^2 \int_a^b f(x) dx + 2\lambda \int_a^b dx + \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 \int_a^b f(x) dx + 2(\beta - \alpha)\lambda + \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq 0 \quad (2). \text{ Η σχέση (2) είναι τριώνυμο ως}$$

προς λ και αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οπότε πρέπει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$

$$4(\beta - \alpha)^2 - 4 \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (\beta - \alpha)^2.$$

50. Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε για κάθε $\alpha < x < \beta$ θα είναι

$$f(\alpha) < f(x) < f(\beta) \text{ οπότε } \int_a^b f(\alpha) dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b f(\beta) dx \Rightarrow 0 < 0 \text{ άτοπο.}$$

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

$$51. \text{Ισχύει } (g(x) - h(x))^2 \geq 0 \Leftrightarrow g^2(x) - 2h(x)g(x) + h^2(x) \geq 0 \text{ οπότε}$$

$$\int_3^5 g^2(x) dx - 2 \int_3^5 h(x)g(x) dx + \int_3^5 h^2(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow 34 \geq 2 \int_3^5 h(x)g(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_3^5 h(x)g(x) dx \leq 17.$$

$$\begin{aligned}
 52. \int_2^4 f^2(x) dx + \frac{14}{3} &= \int_2^4 xf(x) dx \Leftrightarrow \int_2^4 f^2(x) dx - \int_2^4 xf(x) dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_2^4 (f^2(x) - xf(x)) dx &= -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f^2(x) - 2\frac{x}{2}f(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_2^4 \left[\left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 - \frac{x^2}{4} \right] dx &= -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 dx - \int_2^4 \frac{x^2}{4} dx = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_2^4 \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 dx - \left[\frac{x^3}{12} \right]_2^4 &= -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 dx - \left(\frac{64}{12} - \frac{8}{12} \right) = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \\
 \int_2^4 \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 dx - \frac{14}{3} &= -\frac{14}{3} \Leftrightarrow \int_2^4 \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 dx = 0. \text{ Επειδή} \\
 \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [2, 4] \text{ θα είναι } \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\
 f(x) - \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in [2, 4]. & \text{(Αν υπήρχε } x_0 \in [2, 4] \text{ τέτοιος ώστε} \\
 \left(f(x_0) - \frac{x_0}{2} \right)^2 > 0 \text{ τότε } \int_2^4 \left(f(x) - \frac{x}{2} \right)^2 dx > 0 \text{ άτοπο).}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 53. \int_0^6 (f^2(x) - 2x^2 f'(x)) dx &= -72(f(6) + 4) \Leftrightarrow \\
 \int_0^6 f^2(x) dx - 2 \int_0^6 x^2 f'(x) dx &= -72f(6) - 288 \Leftrightarrow \\
 \int_0^6 f^2(x) dx - 2 \left[x^2 f(x) \right]_0^6 + 2 \int_0^6 2xf(x) dx &= -72f(6) - 288 \Leftrightarrow \\
 \int_0^6 (f^2(x) + 4xf(x)) dx - \cancel{72f(6)} &= -\cancel{72f(6)} - 288 \Leftrightarrow \\
 \int_0^6 (f^2(x) + 4xf(x) + 4x^2) dx &= \int_0^6 4x^2 dx - 288 \Leftrightarrow \\
 \int_0^6 (f^2(x) + 4xf(x) + 4x^2) dx &= \left[\frac{4x^3}{3} \right]_0^6 - 288 \Leftrightarrow \int_0^6 (f(x) + 2x)^2 dx = 0 \quad (1).
 \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $x \in [0, 6]$ είναι $(f(x) + 2x)^2 \geq 0$, αν υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή του $x \in [0, 6]$ για την οποία $(f(x) + 2x)^2 > 0$, τότε $\int_0^6 (f(x) + 2x)^2 dx > 0$ που είναι άτοπο. Άρα για κάθε $x \in [0, 6]$ είναι $(f(x) + 2x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2x$

54.α) Είναι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ οπότε

$$\int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 xF'(x) dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 F(x) dx =$$

$$F(1) - \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 F(1) dx - \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (F(1) - F(x)) dx.$$

β) Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\int_x^1 f(t) dt \geq 1 - x^2 \Leftrightarrow$

$$[F(t)]_x^1 \geq 1 - x^2 \Leftrightarrow F(1) - F(x) \geq 1 - x^2 \text{ οπότε}$$

$$\int_0^1 (F(1) - F(x)) dx \geq \int_0^1 (1 - x^2) dx = [x]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ και με βάση το}$$

$$(α) \text{ ερώτημα είναι } \int_0^1 xf(x) dx \geq \frac{2}{3}.$$

γ) Είναι $(f(x) - x)^2 \geq 0$ οπότε $f^2(x) - 2xf(x) + x^2 \geq 0$ άρα

$$\int_0^1 f^2(x) dx \geq 2 \int_0^1 xf(x) dx - \int_0^1 x^2 dx \geq 2 \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx \geq 1.$$

55.α) Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $[\lambda f(x) + g(x)]^2 \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \geq 0 \text{ οπότε}$$

$$\lambda^2 \int_a^\beta f^2(x) dx + 2\lambda \int_a^\beta f(x)g(x) dx + \int_a^\beta g^2(x) dx \geq 0. \text{ Η παραπάνω σχέση}$$

αποτελεί τριώνυμο ως προς λ που αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και αφού

$$\int_a^\beta f^2(x) dx \geq 0 \text{ πρέπει } \Delta \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \left(\int_a^\beta f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^\beta f^2(x) dx \int_a^\beta g^2(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\int_a^\beta f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^\beta f^2(x) dx \cdot \int_a^\beta g^2(x) dx.$$

β) Από το (α) ερώτημα για $f(x) \rightarrow \sqrt{f(x)}, g(x) \rightarrow \sqrt{g(x)}$ έχουμε

$$\int_a^\beta (\sqrt{f(x)})^2 dx \int_a^\beta (\sqrt{g(x)})^2 dx = \int_a^\beta f(x) dx \cdot \int_a^\beta g(x) dx \geq \left(\int_a^\beta \sqrt{f(x)g(x)} dx \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^\beta (\sqrt{f(x)})^2 dx \int_a^\beta (\sqrt{g(x)})^2 dx \geq \left(\int_a^\beta 1 dx \right)^2 = (\beta - \alpha)^2.$$

$$(f(x)g(x) \geq 1 \text{ οπότε } \int_a^\beta f(x)g(x) dx \geq 1)$$

56.α) Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in]\tilde{\kappa}$. Αν

$$f(2) < f(1) \text{ τότε } \int_{f(1)}^{f(2)} f(x) dx < 0 \text{ άτοπο. Αν } f(2) = f(1), \text{ τότε } \int_{f(1)}^{f(2)} f(x) dx = 0$$

άτοπο. Άρα $f(2) > f(1)(1)$.

Όμοια $f(3) < f(1)(2)$. Από τις (1),(2) $\Rightarrow f(3) < f(1) < f(2)$.

2ος τρόπος: Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f . Τότε $F'(x) = f(x) > 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα. Είναι $\int_{f(1)}^{f(2)} f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$

$$F(f(2)) - F(f(1)) > 0 \Leftrightarrow F(f(2)) > F(f(1)) \stackrel{F'}{\Leftrightarrow} f(2) > f(1)(1),$$

$$\int_{f(1)}^{f(3)} f(x) dx < 0 \Leftrightarrow F(f(3)) - F(f(1)) < 0 \Leftrightarrow F(f(3)) < F(f(1)) \stackrel{F'}{\Leftrightarrow}$$

$f(3) < f(1)(2)$. Από τις (1),(2) $\Rightarrow f(3) < f(1) < f(2)$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ θα παρουσιάζει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(3) < f(1) < f(2)$ η f δεν έχει μέγιστο στα άκρα 1 και 3 του διαστήματος $[1,3]$, οπότε θα παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο ξ του διαστήματος. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat άρα $f'(\xi) = 0$, επομένως η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Έστω $g(x) = f(x) - f(x+1)$, $x \in [1,2]$. Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι

$$g(1) = f(1) - f(2) < 0, g(2) = f(2) - f(3) > 0, \text{ δηλαδή } g(1)g(2) < 0, \text{ οπότε}$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_0(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(x_0+1)$.

57.α) Αν η ισότητα στη σχέση $f(x) \geq 3x^2$ δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$, τότε

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_0^1 = 1 \text{ που είναι άτοπο, άρα } f(x) = 3x^2 \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

$$\beta) \int_0^1 f^2(x) dx + \frac{e^2}{2} = 2 \int_0^1 e^x f(x) dx + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2e^x f(x) dx +$$

$$\frac{e^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 2e^x f(x) dx + \int_0^1 e^{2x} dx - \int_0^1 e^{2x} dx + \frac{e^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 [f^2(x) - 2e^x f(x) + e^{2x}] dx - \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 + \frac{e^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 [f(x) - e^x]^2 dx - \cancel{\frac{e^2}{2}} + \cancel{\frac{e^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f(x) - e^x]^2 dx = 0$$

Είναι $[f(x) - e^x]^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, οπότε αν η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0, 1]$, τότε $\int_0^1 [f(x) - e^x]^2 dx > 0$ που είναι άτοπο, άρα $[f(x) - e^x]^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^x$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

58. Για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f^{-1}(x) dx$ θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ οπότε $dx = f'(u) du$. Για $x = 0$ είναι $f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} u = 0$ ενώ για $x = 1$ είναι $f(u) = 1 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} u = 1$ άρα

$$\int_0^1 f^{-1}(x) dx = \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^1 x f'(x) dx.$$

Είναι $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f^{-1}(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f'(x) dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 [f(x) - x f'(x)] dx = 0. \text{ Έστω η συνάρτηση } k(x) = f(x) - x f'(x), x \in [0, 1]$$

, η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αν $k(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ τότε η k διατηρεί πρόσημο άρα

$$k(x) > 0 \Rightarrow \int_0^1 k(x) dx > 0 \text{ άτοπο ή } k(x) < 0 \Rightarrow \int_0^1 k(x) dx < 0 \text{ άτοπο.}$$

Επομένως υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0$.

Αν $x_0 = 1$ τότε $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ άτοπο.

Άρα τελικά υπάρχει $x_0 \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0 f'(x_0)$.

Ολοκληρώματα με ίσα άκρα

59. Είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, άρα $f^2(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Αν $f(\beta) > f(a)$ τότε

$$\int_{f(a)}^{f(\beta)} f^2(x) dx > 0 \text{ που είναι άτοπο, ενώ αν } f(\beta) < f(a) \text{ τότε } \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^2(x) dx < 0$$

που είναι επίσης άτοπο. Άρα $f(\beta) = f(a)$. Επειδή η f είναι κοίλη, η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, \beta]$. Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Για κάθε $a < x < \xi \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \nearrow [a, \xi]$ και για κάθε

$$\xi < x < \beta \stackrel{f' \searrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(\xi) = 0 \Rightarrow f \searrow [\xi, \beta]. \text{ Άρα } f(x) \geq f(a) \text{ για κάθε}$$

$x \in [a, \xi]$ και $f(x) \geq f(\beta) = f(a)$ για κάθε $x \in [\xi, \beta]$, οπότε τελικά

$f(x) \geq f(a)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

60.α) Έστω $g(x) = f(x) - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - e^x > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$

Για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq e^x$.

β) Είναι $f(x) \geq e^x > 0$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε: αν $f(\beta) > f(a)$ τότε

$\int_{f(a)}^{f(\beta)} f(x) dx > 0$, ενώ αν $f(\beta) < f(a)$ τότε $\int_{f(a)}^{f(\beta)} f(x) dx < 0$.

Αν $f(a) = f(\beta)$ τότε προφανώς $\int_{f(a)}^{f(\beta)} f(x) dx = 0$. Όμως τότε εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$ ή $[\beta, a]$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ή (β, a) τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Είναι $f'(\xi) > e^\xi \Leftrightarrow 0 > e^\xi$ που είναι άτοπο. Τελικά

$\int_{f(a)}^{f(\beta)} f(x) dx \neq 0$ για κάθε $a, \beta \in [0, +\infty)$.

γ) $\int_0^1 (x-1)e^{-t}f(t)dt = 1 - (x-2)f(x) \Leftrightarrow (x-1)\int_0^1 e^{-t}f(t)dt - 1 + (x-2)f(x) = 0$

Έστω $h(x) = (x-1)\int_0^1 e^{-t}f(t)dt - 1 + (x-2)f(x)$, $x \in [1, 2]$. Η h είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(1) = -1 - f(1)$ και

$h(2) = \int_0^1 e^{-t}f(t)dt - 1$. Επειδή $f(x) \geq e^x$ για κάθε $x \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, έχουμε: $f(1) > e \Leftrightarrow -f(1) < -e \Leftrightarrow -f(1) - 1 < -e - 1 \Leftrightarrow$

$h(1) < -e - 1 < 0$. Επίσης $f(x) \geq e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} \geq 1 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) \geq 1 \Rightarrow$

$\int_0^1 e^{-x}f(x)dx > 1 \Leftrightarrow h(2) > 0$. Είναι $h(1)h(2) < 0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\int_0^1 (x-1)e^{-t}f(t)dt = 1 - (x-2)f(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 2)$.

61.α) $\ln f(x) \leq ax - a \Leftrightarrow \ln f(x) - ax + a \leq 0$ (1)

Έστω $g(x) = \ln f(x) - ax + a$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$g(1) = \ln f(1) - a + a = 0$, οπότε η (1) γίνεται: $g(x) \leq g(1)$, δηλαδή η g παρουσιάζει μέγιστο στο $x = 1$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - a$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat οπότε

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(1)}{f(1)} - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

β) Είναι $\ln f(x) \leq x - 1 \Leftrightarrow f(x) \leq e^{x-1} \Leftrightarrow ef(x) \leq e^x$, οπότε

$$\int_0^1 ef(x) dx \leq \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

γ) Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε: αν $f(2) > 1$ τότε $\int_1^{f(2)} f(x) dx > 0$

άτοπο, ενώ αν $f(2) < 1$ τότε $\int_1^{f(2)} f(x) dx < 0$ επίσης άτοπο, άρα $f(2) = 1$.

Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[1, 2]$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$. Για την f' εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[1, x_1]$, οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (1, x_1) \subseteq (1, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } f''(\xi) = \frac{f'(x_1) - f'(1)}{x_1 - 1} = -\frac{1}{x_1 - 1}.$$

$$\text{Είναι } f''(\xi) < -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1 - 1} < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > 1 \Leftrightarrow \underset{x_1 \in (1, 2)}{x_1 - 1 < 1} \Leftrightarrow x_1 < 2 \text{ που}$$

ισχύει.

Σύνθετες ασκήσεις

62.α) Η εφαπτομένη στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ και για να διέρχεται από το $(0, 0)$ πρέπει $f(\xi) = \xi f'(\xi)$ (1).

Εφαρμόζοντας Rolle για την $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $[2, 6]$ προκύπτει η σχέση (1).

$$\text{β) Είναι } \int_0^\xi xf''(x) dx = [xf'(x)]_0^\xi - \int_0^\xi f'(x) dx =$$

$$\xi f'(\xi) - [f(x)]_0^\xi \stackrel{(1)}{=} f(\xi) - (f(\xi) - f(0)) = f(0).$$

γ) i. Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1 \in (2, x)$ και $\xi_2 \in (x, 6)$, $x \in (2, 6)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x) - 4}{x - 2} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(6) - f(x)}{6 - x} = \frac{12 - f(x)}{6 - x}$$

Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε επειδή

$$\xi_1 < \xi_2 \text{ είναι } f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x) - 4}{x - 2} < \frac{12 - f(x)}{6 - x} \Leftrightarrow f(x) < 2x. \text{ Επειδή}$$

επιπλέον $f(2) = 4$ και $f(6) = 12$, είναι $f(x) \leq 2x$ για κάθε $x \in [2, 6]$.

ii. Η σχέση του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει μόνο για $x = 2, 4$ οπότε

$$\int_3^5 f(x) dx < \int_3^5 2x dx = [x^2]_3^5 = 16.$$

63.α) $f \cup \mathbb{R} \Leftrightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$. Επειδή η f έχει κρίσιμο σημείο στο 0 και είναι παραγωγίσιμη στο 0 , ισχύει ότι $f'(0) = 0 = f(0)$. Για κάθε $x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο 0, άρα $f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η εφαπτομένη της C_f στο $x = -1$ έχει εξίσωση:
 $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x = 1$ έχει εξίσωση: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = f'(1)x - f'(1) + f(1)$. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)$ και $f(x) \geq f'(1)x - f'(1) + f(1)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(-1)x = +\infty$ ($f'(-1) < 0$) άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(1)x - f'(1) + f(1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(1)x = +\infty$ ($f'(1) > 0$) άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-\infty, 0)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = (0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2 = (0, +\infty)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = (0, +\infty)$.

Αν $k < 0$ τότε το k δεν βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x) = k$ είναι αδύνατη.

Αν $k = 0$, τότε $k \notin f(A_1), f(A_2)$, οπότε η εξίσωση δεν έχει λύση στα A_1, A_2 .

Επειδή $f(0) = 0$, η εξίσωση $f(x) = k$ έχει μοναδική λύση τη $x = 0$ στη περίπτωση αυτή. Τέλος αν $k > 0$ τότε $k \in f(A_1), f(A_2)$, οπότε η εξίσωση έχει μια λύση σε καθένα από τα διαστήματα A_1, A_2 .

γ) Είναι $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ για την f , υπάρχει

$\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}$.

Είναι $0 < \xi < x \xrightarrow{f' \nearrow} f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow 0 < xf'(x) - f(x) \Leftrightarrow g'(x) > 0$ άρα $g \nearrow (0, +\infty)$.

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) < xf'(x) \Rightarrow \int_a^{\beta} f(x) dx < \int_a^{\beta} xf'(x) dx = [xf(x)]_a^{\beta} - \int_a^{\beta} f(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_a^{\beta} f(x) dx < \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$

ε) Είναι $\alpha \leq x \leq \alpha+1 \Leftrightarrow f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\alpha+1)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [\alpha, \alpha+1]$, έχουμε: $\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(\alpha) dx < \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx < \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(\alpha+1) dx \Leftrightarrow f(\alpha)(\alpha+1-\alpha) < \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx < f(\alpha+1)(\alpha+1-\alpha) \Leftrightarrow f(\alpha) < \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx < f(\alpha+1)$ (1)

Είναι $\alpha+1 \leq x \leq \alpha+2 \Leftrightarrow f(\alpha+1) \leq f(x) \leq f(\alpha+2)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [\alpha+1, \alpha+2]$, έχουμε:

$$\int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(\alpha+1) dx < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(\alpha+2) dx \Leftrightarrow f(\alpha+1)(\alpha+2-\alpha-1) < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx < f(\alpha+2)(\alpha+2-\alpha-1) \Leftrightarrow f(\alpha+1) < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx < f(\alpha+2)$$
 (2). Από (1), (2) $\Rightarrow \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x) dx$

64.α) Θέτουμε $\frac{x}{2} = u \Leftrightarrow x = 2u$ και $dx = 2du$. Για $x = 0$ είναι $u = 0$, ενώ για $x = 2$ είναι $u = 1$. Είναι: $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = 2 \int_0^1 f(u) du = 0$.

β) Η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{x}{2}, x\right]$, $x > 0$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{x}{2}, x\right)$, οπότε λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in \left(\frac{x}{2}, x\right)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x - \frac{x}{2}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}. \text{ Όμως } f'(\xi) \geq 2, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \geq 2 \Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \geq x \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Επειδή η σχέση}$$

αληθεύει και για $x = 0$, ισχύει ότι: $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \geq x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

$$\gamma) \text{ Είναι } \int_0^2 \left(f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx \geq \int_0^2 x dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right) dx \geq \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx \geq 2.$$

$$\delta) \text{ Έστω } F \text{ αρχική της } f. \text{ Είναι } \int_0^1 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow F(1) - F(0) = 0 \Leftrightarrow F(1) = F(0).$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την F , οπότε υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$

τέτοιο, ώστε $F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0$. Επειδή $f'(x) \geq 2 > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$

το x_0 είναι μοναδικό. Για κάθε $0 < x < x_0 \xrightarrow{f, \nearrow} f(x) < f(x_0) = 0$ και για κάθε

$$x > x_0 \xrightarrow{f, \nearrow} f(x) > f(x_0) = 0.$$

ε) Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την f , οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (0, x)$ τέτοιο,

$$\text{ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x}. \text{ Είναι } f'(\xi_1) \geq 2 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq 2x + f(0). \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + f(0)) = +\infty, \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

στ) Η εφαπτομένη της F στο $x = 1$ είναι η $y - F(1) = F'(1)x \Leftrightarrow y = f(1)x + F(1)$.

Είναι $F''(x) = f'(x) > 0 \Rightarrow F \cup [0, +\infty)$ οπότε βρίσκεται πάνω από κάθε

εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$$F(x) \geq f(1)x + F(1). \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(1)x + F(1)) = +\infty \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

65.α) Για την f εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[0, x]$ με $x \in (0, 2]$ οπότε υπάρχει

$$\xi_1 \in (0, x) : f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow xf'(\xi_1) = f(x) - f(0) \quad (1). \text{ Επειδή η } f$$

είναι κοίλη στο $[0, 2]$ η f' είναι $\searrow$ οπότε $0 < \xi_1 < x < 2$ άρα

$$f'(\xi_1) > f'(x) \Leftrightarrow xf'(\xi_1) > xf'(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x) - f(0) > xf'(x) \text{ οπότε}$$

$$\int_0^2 (f(x) - f(0)) dx > \int_0^2 xf'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - 2f(0) > [xf(x)]_0^2 -$$

$$\int_0^2 f(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_0^2 f(x) dx > 2f(0) + 2f(2) \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx > f(0) + f(2).$$

β) i. Για $x < 0$ εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στο $[x, 0]$ οπότε υπάρχει

$$\xi_2 \in (x, 0) : f'(\xi_2) = \frac{f(0) - f(x)}{-x} \text{ όμως } f'(\xi_2) < -1 \Leftrightarrow \frac{f(0) - f(x)}{-x} < -1 \Leftrightarrow$$

$$f(0) - f(x) < x \Leftrightarrow f(x) > f(0) - x. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(0) - x] = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για f στο $[x, x+1], x \in \mathbb{R}$ οπότε υπάρχει

$$\xi \in (x, x+1) : f'(\xi) = f(x+1) - f(x) < -1 \Leftrightarrow f(x+1) < f(x) - 1 \quad (2).$$

iii. Ολοκληρώνοντας την (2) έχουμε:

$$\int_0^1 f(x+1) dx < \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 1 dx \quad \begin{matrix} x+1=u \\ \Leftrightarrow \\ x=0 \rightarrow u=1, \\ x=1 \rightarrow u=2, \end{matrix}$$

$$\int_1^2 f(u) du < \int_0^1 f(x) dx - 1 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx < -1.$$

iv. Για κάθε $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(1) \geq f(x) \geq f(2)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για

$$\text{κάθε } x \in [1, 2], \text{ είναι } \int_1^2 f(2) dx < \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 f(1) dx \Leftrightarrow$$

$$f(2) < \int_1^2 f(x) dx < f(1) \quad (3). \text{ Από τη σχέση } f(x+1) < f(x) - 1 \text{ για } x=0$$

$$\text{προκύπτει: } f(1) < f(0) - 1 \text{ και για } x=2 \quad f(3) < f(2) - 1 \Leftrightarrow f(3) + 1 < f(2),$$

$$\text{οπότε η (3) γίνεται: } f(3) + 1 < f(2) < \int_1^2 f(x) dx < f(1) < f(0) - 1.$$

$$\mathbf{66.α)} \text{ Είναι } (e^x f(x) + e^x f'(x)) + f'(x) = -\eta \mu x \Leftrightarrow (e^x f(x) + f(x))' = (\sin x)'$$

$$\text{άρα } (e^x + 1)f(x) = \sin x + c. \text{ Για } x=0 \text{ προκύπτει } c=0, \text{ οπότε } f(x) = \frac{\sin x}{e^x + 1}.$$

$$\mathbf{\beta)} f(x) + f(-x) = \frac{\sin x}{e^x + 1} + \frac{\sin(-x)}{e^{-x} + 1} = \frac{\sin x}{e^x + 1} + \frac{\sin x}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{\sin x}{e^x + 1} + \frac{e^x \sin x}{e^x + 1} =$$

$$\frac{\sin x (e^x + 1)}{e^x + 1} = \sin x.$$

$$\mathbf{\gamma)} \text{ Είναι } \frac{-1}{e^x + 1} \leq \frac{\sin x}{e^x + 1} \leq \frac{1}{e^x + 1} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 0 \text{ οπότε από το κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ άρα ο άξονας } x'x \text{ είναι οριζόντιος}$$

$$\text{ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty.$$

$$\mathbf{\delta)} \text{ Από τη σχέση } f(x) + f(-x) = \sin x \text{ έχουμε}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \quad (1). \text{ Θέτουμε } -x = u \text{ οπότε}$$

$$dx = -du, \text{ για } x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} \text{ ενώ για } x = -\frac{\pi}{2} \text{ είναι } u = \frac{\pi}{2} \text{ άρα}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(u) (-du) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(u) du. \text{ Επομένως η (1) γίνεται}$$

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = [\eta \mu x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 1.$$

ε) Είναι $f'(x) = -\frac{\eta \mu x (1+e^x) + e^x \sigma \upsilon \nu x}{(1+e^x)^2} < 0$ όταν $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα η $f \searrow$ στο

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \text{ άρα } 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dx \Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

67.α. i. Έστω $\frac{f(x)-x}{x^2} = g(x)$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1821$. Τότε

$f(x) - x = x^2 g(x) \Leftrightarrow f(x) = x^2 g(x) + x$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 g(x) + x) = 0$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 g(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 1) = 1$ άρα $f'(0) = 1$.

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda f^2(x)}{2x^2 + f^2(x)} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \lambda \frac{f^2(x)}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2}} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \lambda \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2 + \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} = 3 \Leftrightarrow$

$$\frac{1 + \lambda [f'(0)]^2}{2 + [f'(0)]^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda}{3} = 3 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = 8.$$

γ. i. Έστω $g(x) = e^{-x} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$$

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Leftrightarrow e^{-x} f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \xRightarrow{x > 0} x f(x) > 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $g(x) < g(0) \Leftrightarrow e^{-x} f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \xRightarrow{x < 0} x f(x) > 0$.

Άρα $x f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

ii. Επειδή οι συναρτήσεις f', f είναι συνεχείς στο $[0, 1]$, ισχύει ότι:

$$f'(x) > f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0 \text{ άρα } \int_0^1 (f'(x) - f(x)) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f'(x) dx > \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx < [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = f(1).$$

$$68. \alpha) f'(x) = \frac{g'(x) - g(x)}{e^x} = e^{-x} g'(x) - e^{-x} g(x) \Leftrightarrow f'(x) = (g(x) e^{-x})' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = g(x) e^{-x} + c. \text{ Για } x=1 \text{ είναι } f(1) = \frac{ef(1)}{e} + c \Rightarrow c=0, \text{ οπότε}$$

$$f(x) = g(x) e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

$$\beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -1 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{xg(x) - 2x^2 e^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{x e^x f(x) - 2x^2 e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x \cdot x(f(x) - 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{f(x) - 2x} \right] = -2.$$

$$\gamma) \text{ i. Επειδή } g(x) > g'(x) \Leftrightarrow e^x f(x) > e^x f'(x) + e^x f(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) < 0 \text{ οπότε } x f'(x) \leq 0 \text{ άρα } \int_0^1 x f'(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$[x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx \geq f(1).$$

$$\text{ii. } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty), \text{ οπότε } \alpha < \beta \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$g(\alpha) e^{-\alpha} > g(\beta) e^{-\beta} \Leftrightarrow \frac{g(\alpha)}{e^{\alpha}} > \frac{g(\beta)}{e^{\beta}} \Leftrightarrow g(\alpha) e^{\beta} > g(\beta) e^{\alpha}.$$

$$\text{iii. . Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την } g \text{ στο } [\alpha, \beta] \text{ οπότε υπάρχει } \xi_1 \in (\alpha, \beta)$$

$$\text{τέτοιο, ώστε } g'(\xi_1) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}. \text{ Όμως } g(\alpha) e^{\beta} > g(\beta) e^{\alpha} \Leftrightarrow g(\beta) < g(\alpha) \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}},$$

$$\text{άρα } g'(\xi_1) < \frac{g(\alpha) \frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}} - g(\alpha)}{\beta - \alpha} = g(\alpha) \frac{\frac{e^{\beta}}{e^{\alpha}} - 1}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow g'(\xi_1) < \frac{g(\alpha)}{e^{\alpha}} \cdot \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} \quad (1)$$

$$\text{Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την } \varphi(x) = e^x \text{ στο } [\alpha, \beta] \text{ οπότε υπάρχει}$$

$$\xi_2 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } \varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{\xi_2} = \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Τότε η (1) γίνεται: } g'(\xi_1) < \frac{g(\alpha)}{e^{\alpha}} e^{\xi_2} \Leftrightarrow g'(\xi_1) < g(\alpha) e^{\xi_2 - \alpha}.$$

$$69. \alpha) \text{ Είναι } f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [2, 3] \text{ άρα για } x \leq 3 \text{ είναι } f'(x) \geq f'(3) = 1 > 0$$

$$\text{οπότε } f'(x) > 0 \text{ άρα } f \nearrow [2, 3] \text{ με σύνολο τιμών } f(A) = [f(2), f(3)] = [0, 3].$$

$$\beta) \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } (3, f(3)) \text{ είναι } y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow$$

$$y-3=1(x-3) \Leftrightarrow y=x.$$

γ) Θ.Μ.Τ. για την f στο $[2, x]$, υπάρχει $\xi_1 \in (2, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2}. \text{ Από το Θ.Μ.Τ. για την } f \text{ στο } [x, 3], \text{ υπάρχει } \xi_2 \in (x, 3)$$

$$\text{τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(3)-f(x)}{3-x}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f'' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(2)}{x-2} > \frac{f(3)-f(x)}{3-x}.$$

$$\delta) \text{ Αν } x \in (2, 3) \text{ τότε } \frac{f(x)-f(2)}{x-2} > \frac{f(3)-f(x)}{3-x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x-2} > \frac{3-f(x)}{3-x} \Leftrightarrow$$

$$3f(x) - xf(x) > 3x - 6 - xf(x) + 2f(x) \Leftrightarrow f(x) > 3(x-2). \text{ Επιπλέον για } x=2 \text{ και } x=3 \text{ είναι } f(x) = 3(x-2). \text{ Οπότε για κάθε } x \in [2, 3] \text{ θα είναι } f(x) \geq 3(x-2).$$

ε) Είναι $f(x) - 3(x-2) \geq 0$ και η $f(x) - 3(x-2)$ συνεχής στο $[2, 3]$ οπότε

$$\int_2^3 [f(x) - 3(x-2)] dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_2^3 f(x) dx \geq \int_2^3 3(x-2) dx = \frac{3}{2}.$$

70.α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, λόγω του θεωρήματος Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο στο διάστημα αυτό.

β) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[0, \pi]$. Η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, άρα $f'(x_0) = 0$. Είναι $f(x_0) < \eta\mu x_0 f'(x_0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι $f(x) \leq f(x_0) < 0$. Αν η f έχει μέγιστο στο 0 ή στο π , τότε επειδή $f(0) < \eta\mu 0 \cdot f'(0) = 0$, $f(\pi) < \eta\mu \pi \cdot f'(\pi) = 0$, είναι $f(x) \leq f(0) < 0$ και $f(x) \leq f(\pi) < 0$. Οπότε σε κάθε περίπτωση είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) < \eta\mu x f'(x) \text{ οπότε } \int_0^{\pi/2} f(x) dx < \int_0^{\pi/2} \eta\mu x f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx < [\eta\mu x f(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f(x) dx < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (1 + \sigma\upsilon\nu x) f(x) dx < f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

δ) Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, η σχέση $f(x) < \eta\mu x f'(x)$ γίνεται:

$$2f(x)f'(x) > 2\eta\mu x f(x)f'(x) \Leftrightarrow 2f^2(x) > \eta\mu x (f^2(x))' \text{ οπότε}$$

$$\int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx > \int_0^{\pi/2} \eta\mu x (f^2(x))' dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx > [\eta\mu x f^2(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f^2(x) dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx + \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x f^2(x) dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} [2f^2(x) + \sigma\upsilon\nu x f^2(x)] dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (2 + \sigma\upsilon\nu x) f^2(x) dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\epsilon) f(x) < \eta\mu x f'(x) \stackrel{f(x) < 0, \eta\mu x > 0}{\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]} \frac{1}{\eta\mu x} > \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ άρα } \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx < \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\eta\mu x} dx \quad (1)$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} dx \stackrel{\substack{\sigma\upsilon\nu x = u \\ \eta\mu x dx = -du \\ x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 0}}{=} \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-du}{1 - u^2} = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} = \frac{Au + A + Bu - B}{(u - 1)(u + 1)} = \frac{(A + B)u + A - B}{u^2 - 1}$$

$$\text{Για να ισχύει η ισότητα για κάθε } u \neq \pm 1 \text{ πρέπει: } \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ άρα}$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u + 1}, \text{ οπότε:}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u + 1} \right) du = \left[\frac{1}{2} \ln |u - 1| - \frac{1}{2} \ln |u + 1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln 3$$

$$\text{και } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du = \frac{1}{2} \ln 3. \text{ Η σχέση (1) γίνεται:}$$

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx < \frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow [\ln |f(x)|]_{\pi/3}^{\pi/2} < \frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow \ln \left| f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| - \ln \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| <$$

$$\ln 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \ln \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \ln \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \sqrt{3} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

71.α) Είναι $f'(x) = 2f^2(x) - 2f(x) + 1 = f^2(x) + (f(x) - 1)^2 > 0$ γιατί δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο να είναι ταυτόχρονα $f(x) = 0$ και $f(x) = 1$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Είναι $f'(x) = 2f^2(x) - 2f(x) + 1 = f^2(x) + (f(x) - 1)^2 \geq f^2(x)$ γιατί

$$(f(x) - 1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$

$$f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}.$$

Είναι $f'(x) \geq f^2(x) \Leftrightarrow f'(x)f(x) \geq f^3(x)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει

για κάθε $x \in [1, 2]$, είναι $\int_1^2 f'(x)f(x)dx > \int_1^2 f^3(x)dx \Leftrightarrow$

$$\int_1^2 f^3(x)dx < \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_1^2 = \frac{f^2(2)}{2} - \frac{f^2(1)}{2} = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1.$$

δ) $f'(x) = 2f^2(x) - 2f(x) + 1 \Rightarrow [f'(x)]^2 = 2f^2(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) +$

$$f'(x) \Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \int_1^2 [2f^2(x)f'(x) - 2f(x)f'(x) + f'(x)] dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 [f'(x)]^2 dx = \left[\frac{2}{3} f^3(x) - f^2(x) + f(x) \right]_1^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6}$$

ε) $f'(x) = 2f^2(x) - 2f(x) + 1$ άρα $\int_1^2 f'(x)dx = \int_1^2 [2f^2(x) - 2f(x) + 1]dx \Leftrightarrow$

$$f(2) - f(1) = 2 \int_1^2 f^2(x)dx - 2 \int_1^2 f(x)dx + 2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$1 = 2 \int_1^2 f^2(x)dx - 2 \int_1^2 f(x)dx + 1 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_1^2 f(x)dx = 2 \int_1^2 f^2(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f^2(x)dx.$$

στ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, η f' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f''(x) = 4f(x)f'(x) - 2f'(x) = 2f'(x)(2f(x) - 1).$$

Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) - 1 > 0$ και επειδή

$f'(x) > 0$, είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$.

Για κάθε $x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) - 1 < 0$ και επειδή

$f'(x) > 0$, είναι $f''(x) < 0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Η f έχει σημείο

καμπής το $(1, f(1)) \equiv \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

ζ) Είναι $f'(1) = 2f^2(1) - 2f(1) + 1 = \frac{2}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο

$x = 1$ έχει εξίσωση: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \geq \frac{1}{2}x$ για κάθε

$x \geq 1$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$, βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \leq \frac{1}{2}x$ για κάθε

$x \leq 1$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$\eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2f^2(x) - 2f(x) + 1] \stackrel{f(x)=u}{\underset{u \rightarrow -\infty}{=}} \lim_{u \rightarrow -\infty} (2u^2 - 2u + 1) =$$

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} (2u^2) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2f^2(x) - 2f(x) + 1] \stackrel{f(x)=u}{\underset{u \rightarrow +\infty}{=}} \lim_{u \rightarrow +\infty} (2u^2 - 2u + 1) =$$

$\lim_{u \rightarrow +\infty} (2u^2 - 2u + 1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2u^2) = +\infty$. Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 1]$ η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα (f κοίλη), οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_1) = [f'(1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)) = [\frac{1}{2}, +\infty)$. Στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$ η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (f κυρτή), οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = [f'(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)) = [\frac{1}{2}, +\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f' είναι το $f'(\mathbb{R}) = f'(\Delta_1) \cup f'(\Delta_2) = [\frac{1}{2}, +\infty)$.

θ) Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) \geq \frac{1}{2}x$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$,

ισχύει ότι: $\int_1^2 f(x) dx > \int_1^2 \frac{1}{2}x dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^2 = \frac{3}{4}$.

72.α) $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ οπότε η $h \searrow$ στο $[\alpha, \beta]$.

β) Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) > xf'(x)$ άρα $\int_\alpha^\beta f(x) dx > \int_\alpha^\beta xf'(x) dx \Leftrightarrow$

$$\int_a^\beta f(x) dx > [xf(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_a^\beta f(x) dx > \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\int_a^\beta f(x) dx > \frac{1}{2} (\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha))$$

γ) i. Είναι $\alpha \leq x \leq \beta \Leftrightarrow h(\alpha) \geq h(x) \geq h(\beta) \Leftrightarrow$

$$\frac{f(\beta)}{\beta} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(\alpha)}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{\beta} x \leq f(x) \leq \frac{f(\alpha)}{\alpha} x \quad (1).$$

ii. Ολοκληρώνοντας την (1) προκύπτει

$$\frac{f(\beta)}{\beta} \int_a^\beta x dx \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \frac{f(\alpha)}{\alpha} \int_a^\beta x dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(\beta)}{\beta} \cdot \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \leq \int_a^\beta f(x) dx \leq \frac{f(\alpha)}{\alpha} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$h(\beta) \leq \frac{2}{\beta^2 - \alpha^2} \int_a^\beta f(x) dx \leq h(\alpha) \text{ και αφού η } h \text{ είναι συνεχής, υπάρχει}$$

$$\xi \in [\alpha, \beta] \text{ τέτοιο ώστε } h(\xi) = \frac{2}{\beta^2 - \alpha^2} \int_a^\beta f(x) dx \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{2\xi}{\beta^2 - \alpha^2} \int_a^\beta f(x) dx.$$

73.α) Έστω $\frac{\ln f(x) - f(x) + 1}{(x-1)^2} = h(x), x \neq 1.$

Τότε $\ln f(x) - f(x) + 1 = (x-1)^2 h(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} [\ln f(x) - f(x) + 1] = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 h(x) \Leftrightarrow \ln f(1) - f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\ln f(1) = f(1) - 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$ αφού $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln f(x) - f(x) + 1}{(x-1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)} - f'(x)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\frac{f'(x)(1-f(x))}{f(x)}}{2(x-1)} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{f'(x)}{2f(x)} \cdot \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right) = -\frac{f'(1)}{2f(1)} \cdot f'(1) = -\frac{[f'(1)]^2}{2}, \text{ άρα}$$

$$-\frac{[f'(1)]^2}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

γ) Επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε

$x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 1]$ και για κάθε

$x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο στο $x = 1$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq f(1) = 1$.

δ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο $x = 2$, τότε ε :

$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = f'(2)x - 2f'(2) + f(2)$. Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από την ε εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$f(x) \geq f'(2)x - 2f'(2) + f(2)$. Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(2) > f'(1) = 0$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(2)x - 2f'(2) + f(2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(2)x = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

ε) Έστω $A_1 = (-\infty, 1)$, $A_2 = (1, +\infty)$. Λόγω της μονοτονίας της f στα

αντίστοιχα διαστήματα έχουμε: $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left(0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty).$$

Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, τότε για οποιοδήποτε $\alpha \in A_1$, $f(\alpha) \in f(A_2)$ υπάρχει

$$\beta \in A_2 : f(\beta) = f(\alpha).$$

Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k > 0$, τότε για οποιοδήποτε $\alpha \in A_1$, $f(\alpha) \in (0, k) \subseteq f(A_2)$

υπάρχει $\beta \in A_2 : f(\beta) = f(\alpha)$.

στ) $f(x) = \int_0^1 (x^2 - x + 1)f(t)dt \Leftrightarrow f(x) - (x^2 - x + 1)\int_0^1 f(t)dt = 0$ Θεωρούμε τη

συνάρτηση $g(x) = f(x) - (x^2 - x + 1)\int_0^1 f(t)dt$, $x \in [0, 1]$. Είναι

$$g(0) = f(0) - \int_0^1 f(t)dt \text{ και } g(1) = f(1) - \int_0^1 f(t)dt.$$

Για κάθε $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0, 1]$, είναι

$$\int_0^1 f(0)dx > \int_0^1 f(x)dx > \int_0^1 f(1)dx \Leftrightarrow f(0) > \int_0^1 f(x)dx > f(1), \text{ άρα}$$

$$g(0) = f(0) - \int_0^1 f(t)dt > 0 \text{ και } g(1) = f(1) - \int_0^1 f(t)dt < 0. \text{ Επειδή}$$

$g(0)g(1) < 0$ και η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών

συναρτήσεων, σύμφωνα με το Θ. Bolzano, υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \int_0^1 (\rho^2 - \rho + 1)f(t)dt.$$

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Γνωρίζουμε ότι $e^x \geq x+1$ άρα $e^{x^2} \geq x^2+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο

$$\text{για } x=0, \text{ οπότε } \int_0^1 e^{x^2} dx > \int_0^1 (x^2+1) dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + [x]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{1}{3} + 1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{4}{3}. \text{ Σωστή απάντηση Δ.}$$

2. Γνωρίζουμε ότι $e^x \geq x+1$ άρα $e^{x^2} \geq x^2+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο

$$\text{για } x=0, \text{ οπότε } \frac{e^{x^2}}{1+x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 e^{x^2}}{1+x^2} \geq x^2. \text{ Η ισότητα δεν ισχύει πάντα οπότε}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 e^x}{1+x^2} dx > \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{3}. \text{ Σωστή απάντηση Β.}$$

3. Είναι $(x-f(x))^2 \geq 0 \Leftrightarrow xf(x) \leq \frac{x^2+f^2(x)}{2}$ οπότε

$$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 xf(x) dx \leq \int_0^1 \frac{x^2+f^2(x)}{2} dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } \int_0^1 xf(x) dx = \frac{1}{3} \text{ και } \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \text{ επίσης}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \text{ οπότε}$$

$$\int_0^1 (x-f(x))^2 dx = \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 xf(x) dx + \int_0^1 f^2(x) dx = 0. \text{ Είναι}$$

$$(x-f(x))^2 \geq 0 \text{ αν υπάρχει } x_0 \in [0,1] \text{ τέτοιο, ώστε } (x-f(x))^2 \neq 0 \text{ θα ήταν}$$

$$\int_0^1 (x-f(x))^2 dx > 0 \text{ (άτοπο) άρα } x-f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=x \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

Σωστή απάντηση Δ.

$$4. 4 \int_0^1 [f(x) - e^x f^2(x)] dx \leq \frac{1}{e} - 1 \Leftrightarrow \int_0^1 [4e^x f^2(x) - 4f(x)] dx \geq 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^1 \left[\left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 - \left(e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 \right] dx \geq 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx + \int_0^1 e^{-x} dx \geq 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx - \left[e^{-x} \right]_0^1 \geq 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx - \frac{1}{e} + 1 \geq 1 - \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx \leq 0$$

$$\text{Όμως } \int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx \geq 0 \text{ άρα } \int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx = 0$$

$$\text{Είναι } \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0,1], \text{ αν υπάρχει } x_0 \in [0,1] \text{ τέτοιο,}$$

$$\text{ώστε } \left(2e^{\frac{x_0}{2}} f(x_0) - e^{-\frac{x_0}{2}} \right)^2 \neq 0 \text{ θα ήταν } \int_0^1 \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx > 0 \text{ (άτοπο).}$$

$$\text{Άρα } \left(2e^{\frac{x}{2}} f(x) - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{\frac{x}{2}} f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{-x}. \text{ Σωστή}$$

απάντηση Γ.

$$5. \text{ Είναι } (3f(x) - 2g(x))^2 \geq 0 \text{ οπότε } \int_0^1 (3f(x) - 2g(x))^2 dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (9f^2(x) - 12f(x)g(x) + 4g^2(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$9 \int_0^1 f^2(x) dx - 12 \int_0^1 f(x)g(x) dx + 4 \int_0^1 g^2(x) dx \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 36 - 12 \int_0^1 f(x)g(x) dx + 36 \geq 0 \Leftrightarrow 12 \int_0^1 f(x)g(x) dx \leq 72 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx \leq 6. \text{ Σωστή απάντηση Α.}$$

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Α	2. Α	3. Σ	4. Σ	5. Α	6. Σ	7. Σ	8. Α	9. Σ
10. Σ	11. Σ	12. Α	13. Σ	14. Σ	15. Σ	16. Σ	17. Α	

39

Το ορισμένο ολοκλήρωμα και τα θεωρήματα του διαφορικού λογισμού

12. Έστω F αρχική της f . Είναι $\int_1^\xi f(t)dt = \int_1^3 f(t)dt + \frac{1}{2} \int_3^5 f(t)dt \Leftrightarrow$

$$F(\xi) - \cancel{F(1)} = F(3) - \cancel{F(1)} + \frac{1}{2}F(5) - \frac{1}{2}F(3) \Leftrightarrow F(\xi) = \frac{1}{2}(F(3) + F(5)).$$

Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο $[1, 5]$ οπότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Ε.Τ. θα υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [1, 5]$. Άρα $m \leq F(3) \leq M$, $m \leq F(5) \leq M$ και με πρόσθεση κατά μέλη:

$$2m \leq F(3) + F(5) \leq 2M \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}(F(3) + F(5)) \leq M. \text{ Επειδή ο αριθμός}$$

$\frac{1}{2}(F(3) + F(5))$ ανήκει στο σύνολο τιμών της, υπάρχει $\xi \in [1, 5]$ τέτοιο, ώστε

$$F(\xi) = \frac{1}{2}(F(3) + F(5)).$$

13. Έστω G αρχική της $g(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$. Είναι $f(x) = G(x^2 - 6x) - G(3)$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = G'(x^2 - 6x) = \frac{1-e^{x^2-6x}}{1+e^{x^2-6x}}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-e^{x^2-6x}}{1+e^{x^2-6x}} \geq 0 \Leftrightarrow 1-e^{x^2-6x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2-6x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$0 \leq x \leq 6$. Για κάθε $x < 0$ ή $x > 6$, είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[6, +\infty)$ και για κάθε $0 < x < 6$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, 6]$.

14. α) Έστω F αρχική της f . Είναι $g(x) = F(x) - F(0)$,

$$g'(x) = F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}.$$

β) $\int_{e^x}^{1-x} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow F(1-x) - F(e^x) = 0 \Leftrightarrow F(1-x) = F(e^x) \Leftrightarrow F(1-x) -$

$$F(0) = F(e^x) - F(0) \Leftrightarrow g(1-x) = g(e^x) \xrightarrow{1-1} 1-x = e^x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \quad (1).$$

Έστω $h(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $h'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow h \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow h(1) = 1$.

$$(1) \Rightarrow h(x) = h(0) \xrightarrow{1-1} x = 0$$

Αρχική συνάρτηση και ανισοτικές σχέσεις

15.α) Έστω F αρχική της $f(x) = e^{x^2}$. Είναι $\int_1^x e^{t^2} dt \geq \int_1^{e \ln x} e^{t^2} dt \Leftrightarrow$

$$F(x) - F(1) \geq F(e \ln x) - F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq F(e \ln x) \quad (1).$$

Είναι $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow \mathbb{R}$, οπότε η (1) γίνεται $x \geq e \ln x \Leftrightarrow$

$$x - e \ln x \geq 0. \text{ Έστω } g(x) = x - e \ln x, x > 0. \text{ Είναι } g'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x - e}{x}.$$

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (0, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι

$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [e, +\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(e) = 0$, οπότε

$$g(x) \geq 0, x > 0.$$

β) Έστω F αρχική της $f(x) = \eta \mu^{100} x$. Είναι $\int_0^{e^x} \eta \mu^{100} t dt \leq \int_0^{1+xe^x} \eta \mu^{100} t dt \Leftrightarrow$

$$F(e^x) - F(0) \leq F(1+xe^x) - F(0) \Leftrightarrow F(e^x) \leq F(1+xe^x) \quad (2)$$

Είναι $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \neq \kappa \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$, και επειδή η F είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (2) $\Leftrightarrow e^x \leq 1+xe^x \Leftrightarrow (x-1)e^x + 1 \geq 0$. Έστω

$h(x) = (x-1)e^x - 1, x \in \mathbb{R}$. Είναι $h'(x) = xe^x$. Για κάθε $x < 0$ είναι

$h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow [0, +\infty)$.

Η h έχει ελάχιστο το $h(0) = 0$ οπότε $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)e^x + 1 \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

16. Έστω F αρχική της f στο $[0, +\infty)$. Είναι

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt < f(x) \Leftrightarrow F(x) - F(0) < xf(x) \Leftrightarrow \frac{F(x) - F(0)}{x} < f(x), x > 0$$

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0, x], x > 0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$

τέτοιο, ώστε $F'(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(x) - F(0)}{x}$. Είναι

$$0 < \xi < x \xrightarrow{f \nearrow} f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow \frac{F(x) - F(0)}{x} < f(x).$$

17. Έστω F αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$\int_{x-1}^x f(t) dt < f(x) < \int_x^{x+1} f(t) dt \Leftrightarrow F(x) - F(x-1) < f(x) < F(x+1) - F(x), x \in \mathbb{R}.$$

Για την F εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στα $[x-1, x], [x, x+1], x \in \mathbb{R}$ οπότε

υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1, x), \xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοια, ώστε $F'(\xi_1) = F(x) - F(x-1) \Leftrightarrow$

$$f(\xi_1) = F(x) - F(x-1) \text{ και } F'(\xi_2) = F(x+1) - F(x) \Leftrightarrow f(\xi_2) =$$

$F(x+1)-F(x)$. Είναι $x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \Rightarrow f(\xi_1) < f(x) < f(\xi_2) \Leftrightarrow F(x)-F(x-1) < f(x) < F(x+1)-F(x), x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος : $x-1 \leq t \leq x \Leftrightarrow f(x-1) \leq f(t) \leq f(x)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $t \in [x-1, x]$, είναι $\int_{x-1}^x f(x-1)dt < \int_{x-1}^x f(t)dt < \int_{x-1}^x f(x)dt \Leftrightarrow f(x-1)(x-x+1) < \int_{x-1}^x f(t)dt < f(x)(x-x+1) \Leftrightarrow$

$$f(x-1) < \int_{x-1}^x f(t)dt < f(x) \quad (1) .$$

$x \leq t \leq x+1 \Leftrightarrow f(x) \leq f(t) \leq f(x+1)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $t \in [x, x+1]$, είναι $\int_x^{x+1} f(x)dt < \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_x^{x+1} f(x+1)dt \Leftrightarrow$

$$f(x)(x+1-x) < \int_x^{x+1} f(t)dt < f(x+1)(x+1-x) \Leftrightarrow f(x) < \int_x^{x+1} f(t)dt < f(x+1) \quad (2) .$$

$$\text{Από } (1), (2) \Rightarrow \int_{x-1}^x f(t)dt < f(x) < \int_x^{x+1} f(t)dt .$$

Αρχική συνάρτηση και θεώρημα Fermat

$$18. \int_0^x ae^{t^2} dt \geq \int_0^x \beta \sin^{10} t dt \Leftrightarrow \int_0^x ae^{t^2} dt - \int_0^x \beta \sin^{10} t dt \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (ae^{t^2} - \beta \sin^{10} t) dt \geq 0 \quad (1) . \text{ Έστω } F \text{ αρχική της } f(x) = ae^{x^2} - \beta \sin^{10} x, x \in \mathbb{R} .$$

$(1) \Rightarrow F(x) - F(0) \geq 0 \Leftrightarrow F(x) \geq F(0)$, οπότε η F έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x=0$.

Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x) = f(x)$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, οπότε $F'(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

19. α) Έστω F αρχική της f . Είναι

$$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x} \Leftrightarrow F(x) - F(0) - xe^{-x} \geq 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = F(x) - F(0) - xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Η (1) γίνεται

$g(x) \geq g(0)$, οπότε η g παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x=0$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με

$g'(x) = f(x) - e^{-x} + xe^{-x}$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, είναι $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$.

Η εφαιπτομένη στο A έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = x + 1$.

β) Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = x(t) + 1$ σημείο της ε με $x'(t) = 1 \text{ cm/sec}$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το κινητό διέρχεται από το Α. Είναι

$$x(t_0) = 0, y(t_0) = 1. \text{ Είναι } s(t) = (OM) = \sqrt{x^2(t) + (x(t)+1)^2} = \\ \sqrt{2x^2(t) + 2x(t) + 1}, \quad s'(t) = \frac{4x(t)x'(t) + 2x'(t)}{2\sqrt{2x^2(t) + 2x(t) + 1}} = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{\sqrt{2x^2(t) + 2x(t) + 1}} \text{ και τη} \\ \text{χρονική στιγμή } t_0 : s'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)}{\sqrt{2x^2(t_0) + 2x(t_0) + 1}} = 1 \text{ cm/sec}.$$

20. α) Έστω F αρχική της f . Είναι $\int_{4x}^{x^3} f(t)dt \geq x^3 - 4x \Leftrightarrow F(x^3) - F(4x) - x^3 + 4x \geq 0$. Έστω $g(x) = F(x^3) - F(4x) - x^3 + 4x, x \in \mathbb{R}$. Είναι $g(x) \geq g(0)$, $g(x) \geq g(2)$, $g(x) \geq g(-2)$ οπότε η g έχει ελάχιστο στα $x = 0, -2$ και 2 .

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = F'(x^3)3x^2 - 4F'(4x) - 3x^2 + 4 = 3x^2f(x^3) - 4f(4x) - 3x^2 + 4$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, οπότε

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow -4f(0) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1,$$

$$g'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12f(-8) - 4f(-8) - 12 + 4 = 0 \Leftrightarrow f(-8) = 1 \text{ και}$$

$$g'(2) = 0 \Leftrightarrow 12f(8) - 4f(8) - 12 + 4 = 0 \Leftrightarrow f(8) = 1$$

β) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στα διαστήματα $[-8, 0], [0, 8]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-8, 0)$ και $x_2 \in (0, 8)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ για την f' οπότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-8, 8)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$

21. α) Έστω F αρχική της f . Είναι $\int_{-2}^2 f(x)dx = 0 \Leftrightarrow F(2) - F(-2) = 0 \Leftrightarrow F(2) = F(-2)$. Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-2, 2]$ για την F οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_1) = 0$.

β) $\int_2^x f(t)dt \leq x^2 - 4 \Leftrightarrow F(x) - F(2) - x^2 + 4 \leq 0$.

Έστω $g(x) = F(x) - F(2) - x^2 + 4, x \in \mathbb{R}$. Είναι $g(x) \leq g(2)$ και

$g(x) \leq g(-2)$ οπότε η g έχει μέγιστο στα $x = 2$ και $x = -2$. Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = F'(x) - 2x = f(x) - 2x$ ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος Fermat οπότε $g'(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(2) = 4$ και
 $g'(-2) = 0 \Leftrightarrow f(-2) = 4$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2x$, $x \in [-2, 2]$. Η h είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με $h'(x) = f'(x) - 2$. Επειδή $h(-2) = 0 = h(2)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $\xi_2 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi_2) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi_2) = 2$.

Όρια ολοκληρωμάτων

22.α) Έστω F αρχική της $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$. Είναι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h} \frac{\eta\mu x}{x} dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} \stackrel{0}{\underset{0}{=}} \lim_{DLH \ h \rightarrow 0} f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

β) Είναι $\int_1^x \ln t dt = \int_1^x (t)' \ln t dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt = x \ln x - x + 1$ και

$$\int_0^x te^t dt = \int_0^x t(e^t)' dt = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x - e^x + 1 = e^x(x-1) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \ln t dt - 1}{\int_0^x te^t dt - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\ln x - 1)}{e^x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \cdot \frac{\ln x - 1}{x-1} \right) = 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x-1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

23. Έστω F αρχική της f . Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x^3 + x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{3x+2} \right) = f'(0) \cdot \frac{1}{2}. \text{ Επομένως}$$

$$f'(0) \cdot \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow f'(0) = 2..$$

$$\mathbf{24.} \quad \frac{\lambda}{t(t+\lambda)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+\lambda} = \frac{At + A\lambda + Bt}{t(t+\lambda)} = \frac{(A+B)t + A\lambda}{t(t+\lambda)} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = (A+B)t + A\lambda. \text{ Είναι } \begin{cases} A+B=0 \\ \lambda A = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}. \text{ Τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\lambda}{t(t+\lambda)} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+\lambda} \right) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln t - \ln(t+\lambda)]_1^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - \ln(x+\lambda) + \ln(1+\lambda)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x(1+\lambda)}{x+\lambda}.$$

Θέτουμε $\frac{x(1+\lambda)}{x+\lambda} = u$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\lambda)}{x+\lambda} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\lambda)}{x} = 1+\lambda$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x(1+\lambda)}{x+\lambda} = \lim_{u \rightarrow 1+\lambda} \ln u = \ln(1+\lambda).$$

Επομένως $\ln(1+\lambda) = 1 \Leftrightarrow 1+\lambda = e \Leftrightarrow \lambda = e-1$.

25.α) $1 < x \leq t \leq 2x \Rightarrow \ln x \leq \ln t \leq \ln 2x \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{\ln t} \geq \frac{1}{\ln 2x}$. Επειδή η

ισότητα ισχύει μόνο όταν $t = x$ ή $t = 2x$, είναι

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln 2x} dt < \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt < \int_x^{2x} \frac{1}{\ln x} dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x-x}{\ln 2x} < \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt < \frac{2x-x}{\ln x} \Leftrightarrow \frac{x}{\ln 2x} < \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt < \frac{x}{\ln x}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln 2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt = +\infty$.

β) Έστω $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+2}$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = \frac{8x}{(x^2+2)^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$.

Για κάθε $0 < x \leq t \leq 2x \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t = x$ ή $t = 2x$, είναι $\int_x^{2x} f(x) dt < \int_x^{2x} f(t) dt < \int_x^{2x} f(2x) dt \Leftrightarrow$
 $f(x)(2x-x) < \int_x^{2x} f(t) dt < f(2x)(2x-x) \Leftrightarrow xf(x) < \int_x^{2x} f(t) dt < xf(2x)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{3x^2+2}{x^2+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+2x}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{\cancel{3}}}{x^{\cancel{2}}} = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(2x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{12x^2+2}{4x^2+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^3+2x}{4x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^{\cancel{3}}}{4x^{\cancel{2}}} = +\infty$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{3t^2+2}{t^2+2} dt = +\infty$.

γ) Έστω $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$, $x \in (0, \pi)$. Είναι $f'(x) = \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2}$.

Έστω $g(x) = x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$. Είναι $g'(x) = -x\eta\mu x < 0 \Rightarrow g \searrow [0, \pi]$.

Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, \pi)$.

$x \leq t \leq 2x \Leftrightarrow f(x) \geq f(t) \geq f(2x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν

$t = x$ ή $t = 2x$, είναι $\int_x^{2x} f(2x) dt < \int_x^{2x} f(t) dt < \int_x^{2x} f(x) dt \Leftrightarrow$

$$\frac{\eta\mu 2x}{2x}(2x - x) < \int_x^{2x} f(t) dt < \frac{\eta\mu x}{x}(2x - x) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu 2x}{2} < \int_x^{2x} \frac{\eta\mu t}{t} dt < \eta\mu x.$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta\mu x = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής, είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{\eta\mu t}{t} dt = 0.$$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{t^2 - 2x^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$. Είναι $0 \leq t \leq x \Leftrightarrow 0 \leq t^2 \leq x^2 \Leftrightarrow$

$1 \leq e^{t^2} \leq e^{x^2}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t = 0$ ή $t = x$, είναι

$$\int_0^x 1 dt < \int_0^x e^{t^2} dt < \int_0^x e^{x^2} dt \Leftrightarrow x < \int_0^x e^{t^2} dt < xe^{x^2} \Leftrightarrow xe^{-2x^2} < e^{-2x^2} \int_0^x e^{t^2} dt < xe^{-x^2}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4xe^{2x^2}} = 0$. Όμοια $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{t^2 - 2x^2} dt = 0$.

26.α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} e^{t^2+x} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \int_x^{x+1} e^{t^2} dt$. Είναι

$x \leq t \leq x+1 \Leftrightarrow x^2 \leq t^2 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow e^{x^2} \leq e^{t^2} \leq e^{x^2+2x+1}$ και επειδή η ισότητα

ισχύει μόνο όταν $t = x$ ή $t = x+1$, είναι $\int_x^{x+1} e^{x^2} dt < \int_x^{x+1} e^{t^2} dt < \int_x^{x+1} e^{x^2+2x+1} dt \Leftrightarrow$

$$e^{x^2}(x+1-x) < \int_x^{x+1} e^{t^2} dt < (x+1-x)e^{x^2+2x+1} \Leftrightarrow e^{x^2+x} < e^x \int_x^{x+1} e^{t^2} dt < e^{x^2+3x+1}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \theta \rightarrow +\infty \\ \theta = x^2+x}} e^\theta = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+3x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, u \rightarrow +\infty \\ u = x^2+x}} e^u = +\infty$ οπότε από το

κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} e^{t^2+x} dt = +\infty$.

β) Όμοια με το α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{x+1} e^{t^2+x} dt = +\infty$.

γ) Έστω $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$, $x > 0$. Είναι $f'(x) = e^{x \ln x} (\ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, \frac{1}{e}\right)$. Είναι

$0 < x \leq t \leq 2x < \frac{2}{e} \Rightarrow f(x) \geq f(t) \geq f(2x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο

όταν $t = x$ ή $t = 2x$, είναι $\int_x^{2x} f(2x) dt < \int_x^{2x} f(t) dt < \int_x^{2x} f(x) dt \Leftrightarrow$

$$f(2x)(2x - x) < \int_x^{2x} f(t) dt < f(x)(2x - x) \Leftrightarrow xf(2x) < \int_x^{2x} t^t dt < xf(x) \quad (1).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} \stackrel{k=x \ln x}{=} 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^k = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} xf(2x) \stackrel{2x=u}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+, u \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} uf(u) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 0 \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} t^t dt = 0.$$

$$\delta) \text{ Όμοια με το } \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(2x) \stackrel{2x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} uf(u) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) \text{ οπότε από}$$

$$\text{το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} t^t dt = +\infty.$$

$$27. \alpha) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο}$$

$$(0, +\infty) \text{ με } f'(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]' = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \right] \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right]. \text{ Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της } f'$$

εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, οπότε θεωρούμε

τη συνάρτηση $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, $x > 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο

$(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0, \text{ άρα η } g$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] = +\infty - 1 = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \stackrel{u=1+\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right] = 0$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \stackrel{k=1+\frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ k \rightarrow 1}} \ln k = \ln 1 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Για το σύνολο τιμών της g έχουμε:

$$g((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right) = (0, +\infty), \text{ άρα } g(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 0,$$

οπότε $f'(x) > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Έστω F αρχική της f . Λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει

$$\xi \in (x, x+1) \text{ τέτοιο, ώστε: } F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow f(\xi) = F(x+1) - F(x).$$

$$\text{Επειδή } x < \xi < x+1 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(\xi) < f(x+1) \Leftrightarrow$$

$$f(x) < F(x+1) - F(x) < f(x+1) \Leftrightarrow f(x) < \int_x^{x+1} f(t) dt < f(x+1). \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = e \text{ γιατί:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) \stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = e, \text{ άρα από το κριτήριο παρεμβολής είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = e.$$

Σύνθετες ασκήσεις

$$28. \alpha) f(x) = \int_1^x t(2 \ln t + 1) dt = \int_1^x \left(\frac{t^2}{2} \right)' (2 \ln t + 1) dt \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \left[\frac{t^2}{2} (2 \ln t + 1) \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} \cdot \frac{2}{t} dt \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} (2 \ln x + 1) - \frac{1}{2} - \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{x^2}{2} (2 \ln x + 1) - \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} (2 \ln x + 1 - 1) = x^2 \ln x.$$

$$\beta) f'(x) = 2x \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}.$$

Για κάθε $x \in \left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ και για κάθε $x > e^{-\frac{1}{2}}$ είναι

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right). \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο το } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

$$\gamma) f''(x) = 2 \ln x + 1 + \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}}. \text{ Η } f \text{ έχει σημείο καμπής}$$

$$\text{το } \left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right).$$

$$\delta) \int_{\rho_1}^{\rho_2} x(2 \ln x + 1) dx = -\frac{3}{2e^3} - \frac{1}{2} e^{x+5} \Leftrightarrow$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} f'(x) dx = -\frac{3}{2e^3} - \frac{1}{2} e^{x+5} \Leftrightarrow f(\rho_2) - f(\rho_1) = -\frac{3}{2e^3} - \frac{1}{2} e^{x+5} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{2e^3} - \frac{1}{2e} = -\frac{3}{2e^3} - \frac{1}{2} e^{x+5} \Leftrightarrow e^{-1} = e^{x+5} \Leftrightarrow x+5 = -1 \Leftrightarrow x = -6.$$

29.α) Έστω F αρχική της $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, $x \geq 1$. Είναι $f(x) = F(x) - F(1)$

$$\text{και } f'(x) = F'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$$

$$\beta) \text{ Έστω } h(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - f(x), x \geq 1. \text{ Είναι } h'(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x} < 0 \Rightarrow$$

$$h \searrow [1, +\infty), \text{ οπότε } h(x) \leq h(1) \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2} - f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2} \leq f(x).$$

$$\text{Έστω } t(x) = f(x) - \ln 2 \cdot \ln x - \frac{\ln^2 x}{2}, x \geq 1. \text{ Είναι}$$

$$t'(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{\ln 2}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln(1+x) - (\ln 2 + \ln x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln 2x}{x}$$

$$\text{Για κάθε } x > 1 \text{ είναι } 2x > x+1 \Leftrightarrow \ln 2x > \ln(x+1) \Leftrightarrow t'(x) < 0 \Rightarrow t \searrow [1, +\infty)$$

$$\text{οπότε } t(x) \leq t(1) \Leftrightarrow f(x) - \ln 2 \cdot \ln x - \frac{\ln^2 x}{2} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq \ln 2 \cdot \ln x + \frac{\ln^2 x}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{2} = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln 2 \cdot \ln x + \frac{\ln^2 x}{2} \right) \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \text{ Για}$$

κάθε $x > 1$ είναι $\frac{\ln^2 x}{2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \ln 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x}$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x} \right) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

30.α) $f'(x) = e^x - \frac{e}{x}$, $f''(x) = e^x + \frac{e}{x^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow [1, +\infty)$ άρα για $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$.

β) $e^{x-1} \geq \ln x \Leftrightarrow \frac{e^x}{e} \geq \ln x \Leftrightarrow e^x - e \ln x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$ και για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 0$ οπότε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

γ) Έστω F αρχική της f . Είναι $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t) dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt \Leftrightarrow F(\cancel{x^2+2}) - F(x^2+1) = \cancel{F(x^2+2)} - F(x^2+3) + F(3) - F(1) \Leftrightarrow F(x^2+3) - F(x^2+1) = F(3) - F(1)$ (1). Έστω $g(x) = F(x^2+3) - F(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = 2x f(x^2+3) - 2x f(x^2+1) = 2x(f(x^2+3) - f(x^2+1))$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $1 \leq x^2+1 < x^2+3 \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x^2+1) < f(x^2+3) \Leftrightarrow f(x^2+3) - f(x^2+1) > 0$. Για $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$ και για $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0) = F(3) - F(1)$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq g(0)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.
(1) $\Leftrightarrow g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0$.

31.α) Έστω F αρχική της $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$. Είναι $f(x) = F(x) - F(1)$ και $f'(x) = F'(x) = e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$. Επειδή $e^{-1} < 1$ τότε $f(e^{-1}) < f(1) \Leftrightarrow \int_1^{e^{-1}} e^t dt < 0 \Leftrightarrow \int_{e^{-1}}^1 e^{\frac{1}{t}} dt > 0$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, 2]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο

ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\xi}} = \int_1^2 e^t dt$ (1). Όμως

$$1 < \xi < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{\xi}} < e \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sqrt{e} < \int_1^2 e^t dt < e.$$

γ) Πρέπει $2 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$

$$\int_1^{e^{2x}} e^t dt = \int_1^{2-e^x} e^t dt \Leftrightarrow f(e^{2x}) = f(2-e^x) \Leftrightarrow e^{2x} = 2 - e^x \Leftrightarrow e^x = \lambda > 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = -2 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } (\lambda = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0).$$

δ) $f(1) = 0$ και $f'(1) = e$, οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο $x_0 = 1$ είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = ex - e. \text{ Η } f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο}$$

$$(0, +\infty) \text{ με } f''(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < 0, \text{ άρα η } f \text{ κοίλη οπότε βρίσκεται πάνω από}$$

κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής επομένως $f(x) \leq ex - e$ για

κάθε $x > 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$.

ε) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[x-1, x]$ και $[x, x+1]$

οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x-1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x+1)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = f(x) - f(x-1) \text{ και } f'(\xi_2) = f(x+1) - f(x). \text{ Είναι } \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(x) - f(x-1) > f(x+1) - f(x) \Leftrightarrow \int_{x-1}^x e^t dt > \int_x^{x+1} e^t dt.$$

32.α) Έστω F αρχική της $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f(x) = F(x) - F(0)$,

$$f'(x) = F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}. \text{ Για κάθε } x < 0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(0) = 0 \text{ και για}$$

κάθε $x > 0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

β) Είναι $f''(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1}$. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ και

παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0, 0)$.

γ) Για $x = 0$ ισότητα. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x, 0]$ με $x < 0$

οπότε υπάρχει $\xi \in (x, 0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$, όμως η f

είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ άρα η $f' \nearrow$ στο $(-\infty, 0]$, συνεπώς για $x < \xi < 0$ είναι

$$f'(x) < f'(\xi) < f'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} < \frac{f(x)}{x} < 1 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} \frac{x}{x^2 + 1} > f(x) > x.$$

$$\text{Άρα } x \leq f(x) \leq \frac{x}{x^2+1}.$$

$$\delta) \text{ Είναι } f(\varepsilon\varphi x) = x \Leftrightarrow f(\varepsilon\varphi x) - x = 0 \text{ με } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } h(x) = f(\varepsilon\varphi x) - x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \text{ Είναι}$$

$$h'(x) = \frac{1}{\varepsilon\varphi^2 x + 1} \cdot (\varepsilon\varphi x)' - 1 = \sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = 0. \text{ Οπότε } h(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Όμως } h(0) = 0 \text{ οπότε } h(x) = 0, \text{ δηλαδή } f(\varepsilon\varphi x) = x. \text{ Για } x = \frac{\pi}{6} \text{ είναι}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$\epsilon) \text{ Έστω } t(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0. \text{ Είναι } t'(x) = f'(x) - \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{\cancel{x^2} \frac{1+x^2}{\cancel{x^2}}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$t(x) = c \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1.Σ 2.Σ 3.Σ 4.Σ 5.Σ

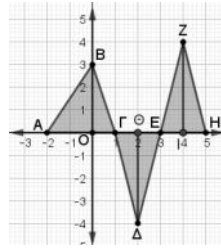
40.**Εμβαδό επίπεδου χωρίου**

$$24. I_1 = \int_{-2}^0 f(x) dx = (OAB) = \frac{(OA)(OB)}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3,$$

$$I_2 = \int_{-2}^1 f(x) dx = (AB\Gamma) = \frac{(A\Gamma)(BO)}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2},$$

$$I_3 = \int_1^3 f(x) dx = -(\Gamma\Delta E) = -\frac{(\Gamma E) \cdot (\Delta\Theta)}{2} = -\frac{2 \cdot 4}{2} = -4,$$

$$I_4 = \int_3^5 f(x) dx = (ZEH) = \frac{(EH) \cdot (ZI)}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4.$$



$$25. \alpha) \int_{-3}^0 f(x) dx = E_1 = 2 \quad \beta) \int_0^4 f(x) dx = -E_2 = -5 \quad \gamma) E = E_1 + E_2 = 7.$$

$$26. \alpha) \int_{-5}^5 f(x) dx = \int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx = -\frac{1}{2}.$$

$$\beta) E = -\int_{-4}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx = 1 + 2 + 3 = 6.$$

$$\gamma) E = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx = 2 + 3 = 5.$$

$$27. \alpha) E = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 4. \quad \beta) E = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

$\gamma)$ Επειδή για $x \in (0, 1)$ είναι $f(x) < 0$ και για $x > 1$ είναι $f(x) > 0$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = -\int_{1/e}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = -\int_{1/e}^1 (x)' \ln x dx + \int_1^e (x)' \ln x dx \Leftrightarrow$$

$$E = -[x \ln x]_{1/e}^1 + \int_{1/e}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx + [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) + e - (e - 1) = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} + e - e + 1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

$$\delta) E = \int_0^2 (4 - x^2) dx - \int_2^3 (4 - x^2) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 - \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_2^3 = \frac{23}{3}$$

x	-2	2
4-x ²	-	+

x	2	4
x ² -6x+8	+	+

$$\epsilon) E = \int_1^2 (x^2 - 6x + 8) dx - \int_2^3 (x^2 - 6x + 8) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_2^3 = 2$$

στ) Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x > 0$ και για κάθε $x \in (\pi, 2\pi)$ είναι $\eta\mu x < 0$.

$$E = \int_0^\pi \eta\mu x dx - \int_\pi^{2\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi - [-\sigma\upsilon\nu x]_\pi^{2\pi} = 1 + 1 - (-1 - 1) = 4.$$

ζ) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu x > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ είναι $\sigma\upsilon\nu x < 0$.

$$E = \int_0^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x dx - \int_{\pi/2}^\pi \sigma\upsilon\nu x dx \Leftrightarrow E = [\eta\mu x]_0^{\pi/2} - [\eta\mu x]_{\pi/2}^\pi = 1 - (0 - 1) = 2.$$

$$\eta) E = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

$$28. f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$E = -\int_{-1}^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E = -\int_{-1}^1 (x^4 - x^2) dx \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2	+	+	0	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	-	+
γινόμενο	+	-	-	+	+

$$E = -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = -\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{15}.$$

$$29. \alpha) f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3.$$

Για κάθε $x \in (1, 3)$ είναι $f(x) < 0$, οπότε

$$E = -\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3}.$$

$$\beta) E' = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) dx \Leftrightarrow$$

$$E' = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 + \frac{4}{3} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_3^4 = 4.$$

30. α) $f(x) = x(x-1)(x+1)$. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, οπότε:

$$E(\Omega) = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 5.$$

β) $f(x) = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6)$. Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (2, 6)$, άρα

$$E(\Omega) = \int_0^2 f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 16.$$

γ) Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (\pi, 2\pi)$, οπότε:

$$E(\Omega) = \int_0^\pi f(x) dx - \int_\pi^{2\pi} f(x) dx = 4\pi.$$

31. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$ συνεχής στο 0.

Για $x \leq 0$ είναι $f(x) = (1-x)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0]$.

Για $x > 0$ είναι $f(x) = (x-1)^2 \geq 0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = -\int_{-2}^{-1} (1-x^2) dx + \int_{-1}^0 (1-x^2) dx + \int_0^2 (x^2 - 2x + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$E = -\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

32. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow f$ συνεχής στο 1.

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι $f(x) > 0$ και για κάθε $x \in (-1, 0)$

είναι $f(x) < 0$. $E(\Omega) = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = 2e + 2$.

33. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [\lambda, +\infty)$.

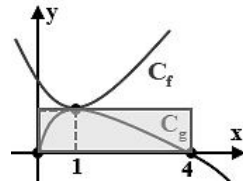
$$E(\Omega) = -\int_0^\lambda f(x) dx = -\int_0^\lambda (x^2 - \lambda x) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \lambda \frac{x^2}{2}\right]_0^\lambda = \frac{\lambda^3}{6}.$$

Πρέπει $\frac{\lambda^3}{6} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \lambda^3 = 8 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

34.α) Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν μεταξύ C_g και x' είναι μικρότερο του εμβαδού του ορθογωνίου ΟΑΒΓ με $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,1)$ και $\Gamma(0,1)$ το οποίο έχει εμβαδόν ίσο με 4 τ.μ.

Άρα $\int_0^4 |g(x)| dx < 4 \Leftrightarrow \int_0^4 g(x) dx < 4$

β) Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει



$$\begin{aligned} \text{μόνον για } x=1. \text{ Άρα } \int_0^4 f(x) dx &> \int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx = \\ &= \int_0^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - x \right) dx = \left[\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 4 \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{16}{2} = \frac{4^{\frac{5}{2}}}{3} - 8 = \frac{2^5}{3} - 8 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Αυξημένης δυσκολίας

$$35. 6f'(x) - g(x)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 6 \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

$$E(\Omega) = \int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 6 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \left[-\frac{6}{f(x)} \right]_0^2 = -\frac{6}{f(2)} + \frac{6}{f(0)} = 4.$$

36. Αρχικά θα βρούμε τις τετμημένες των σημείων Α και Β. Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x (\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1) \text{ ή } (\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e)$. Επειδή $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, είναι

$$E = -\int_1^e f(x) dx = -\int_1^e (\ln^2 x - \ln x)(x)' dx \Leftrightarrow$$

$$E = -\left[(\ln^2 x - \ln x)x \right]_1^e + \int_1^e (\ln^2 x - \ln x)' x dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_1^e \left(2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) x dx = \int_1^e (2 \ln x - 1) dx = 2 \int_1^e \ln x (x)' dx - (e - 1) \Leftrightarrow$$

$$E = 2[x \ln x]_1^e - 2 \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x dx - (e - 1) = 2e - 2(e - 1) - (e - 1) = 3 - e.$$

37. $f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 1$, άρα $f(x) \geq 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$E(\Omega) = \int_0^1 (e^x - x) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2}.$$

38. $f'(x) = -\ln x < 0$ για κάθε $x > 1$, άρα $f \searrow [1, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x) \leq f(1) = 0$, οπότε

$$E(\Omega) = -\int_1^e f(x) dx = -\int_1^e (x - 1 - x \ln x) dx = -\left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e + \int_1^e \ln x \left(\frac{x^2}{2} \right)' dx =$$

$$= -\frac{e^2}{2} + e + \frac{1}{2} - 1 + \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \dots = \frac{4e - e^2 - 1}{4}.$$

39.α) Η G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, 2\pi)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\sin x + (1 - \sin x) \ln(1 - \sin x))' = \\ &= -\eta\mu x + \eta\mu x \cdot \ln(1 - \sin x) + \cancel{(1 - \sin x)} \cdot \frac{\eta\mu x}{\cancel{1 - \sin x}} = \\ &= \cancel{-\eta\mu x} + \eta\mu x \cdot \ln(1 - \sin x) + \eta\mu x = f(x) \text{ Άρα η } G \text{ είναι αρχική της } f \text{ στο} \\ &(0, 2\pi). \end{aligned}$$

β) Είναι $0 < \lambda < \pi \Leftrightarrow -\pi < -\lambda < 0 \Leftrightarrow \pi < 2\pi - \lambda < 2\pi$ άρα ο τύπος $f(x) = \eta\mu x \cdot \ln(1 - \sin x)$ ορίζεται στο $[\lambda, 2\pi - \lambda] \subseteq (0, 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \text{Το εμβαδόν είναι } E(\lambda) &= \int_{\lambda}^{2\pi - \lambda} |f(x)| dx = \\ &= -\int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi - \lambda} f(x) dx = \\ &= -\left[G(x) \right]_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} + \left[G(x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \left[G(x) \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} + \left[G(x) \right]_{\pi}^{2\pi - \lambda} = \\ &= -G\left(\frac{\pi}{2}\right) + G(\lambda) + G\left(\frac{3\pi}{2}\right) - G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(\pi) + G\left(\frac{3\pi}{2}\right) + G(2\pi - \lambda) - G(\pi) = \\ &= -2G\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2G\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2G(\pi) + G(\lambda) + G(2\pi - \lambda) \\ \text{Είναι } G\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin \frac{\pi}{2} + \left(1 - \sin \frac{\pi}{2}\right) \ln \left(1 - \sin \frac{\pi}{2}\right) = 0 + (1 - 0) \ln 1 = 0 \\ \text{Είναι } G\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \sin \frac{3\pi}{2} + \left(1 - \sin \frac{3\pi}{2}\right) \ln \left(1 - \sin \frac{3\pi}{2}\right) = 0 + (1 - 0) \ln 1 = 0 \\ \text{Είναι } G(\pi) &= \sin \pi + (1 - \sin \pi) \ln(1 - \sin \pi) = -1 + 2 \ln 2 = \ln 4 - 1 \\ \text{Είναι } G(\lambda) &= \sin \lambda + (1 - \sin \lambda) \ln(1 - \sin \lambda) \\ \text{Είναι } G(2\pi - \lambda) &= \sin(2\pi - \lambda) + (1 - \sin(2\pi - \lambda)) \ln(1 - \sin(2\pi - \lambda)) = \\ &= \sin \lambda + (1 - \sin \lambda) \ln(1 - \sin \lambda) = G(\lambda) \\ \text{Άρα είναι } E(\lambda) &= -2G(\pi) + G(\lambda) + G(2\pi - \lambda) = -2G(\pi) + 2G(\lambda) = \\ &= -2 \ln 4 + 2 + 2 \sin \lambda + 2(1 - \sin \lambda) \ln(1 - \sin \lambda) = \end{aligned}$$

$$= 2\sigma\eta\lambda + 2(1 - \sigma\eta\lambda)\ln(1 - \sigma\eta\lambda) - \ln 16 + 2$$

β) 1^{ος} τρόπος: Επειδή ο τύπος $f(x) = \eta\mu x \cdot \ln(1 - \sigma\eta\mu x)$, δεν δίνει τις τιμές στο 0 και 1 τότε το ζητούμενο εμβαδόν θα ισούται με το εμβαδόν $E(\lambda)$ που περικλείεται από την C_f , τον x' , την $x = \lambda$ και την $x = 2\pi - \lambda$ όταν το λ είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) =$

$$= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - \ln 16 + 2 = 4 - \ln 16 = \ln e^4 - \ln 16 = \ln \frac{e^4}{16} \quad \text{γιατί}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [(1 - \sigma\eta\lambda)\ln(1 - \sigma\eta\lambda)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \sigma\eta\lambda)}{\frac{1}{1 - \sigma\eta\lambda}} \stackrel{1 - \sigma\eta\lambda = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{1 - u}}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{1 - u}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{1 - u}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{-u^{\lambda}}{\lambda} = 0$$

2^{ος} τρόπος: Στο $(0, 2\pi)$ η f έχει αρχική την συνάρτηση

$$G(x) = \sigma\eta\mu x + (1 - \sigma\eta\mu x)\ln(1 - \sigma\eta\mu x)$$

Έστω F μία αρχική της f στο $[0, 2\pi]$. Τότε η F είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[0, 2\pi]$. Άρα $F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 1$ και $F(2\pi) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} G(x) = 1$.

$$\text{Άρα μία αρχική της } f \text{ είναι η } F(x) = \begin{cases} G(x), & 0 < x < 2\pi \\ 1, & x = 0 \text{ ή } x = \pi \end{cases}$$

$$\text{Άρα το εμβαδόν είναι } E = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx = -\left[G(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$\left[G(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \left[G(x)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} + \left[G(x)\right]_{\pi}^{2\pi} = -G\left(\frac{\pi}{2}\right) + G(0) + G\left(\frac{3\pi}{2}\right) - G\left(\frac{\pi}{2}\right) -$$

$$G(\pi) + G\left(\frac{3\pi}{2}\right) + G(2\pi) - G(\pi) = -2G\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2G\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 2G(\pi) + G(0) +$$

$$G(2\pi) = -2G(\pi) + 2G(0) = -2\ln 4 + 2 + 2 = 4 - \ln 16 = \ln e^4 - \ln 16 = \ln \frac{e^4}{16}.$$

40.α) Είναι $f(x) = x \ln x \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 1$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned}
 E[\alpha(t)] &= \int_1^{\alpha(t)} |f(x)| dx = \int_1^{\alpha(t)} x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\alpha(t)} - \int_1^{\alpha(t)} \frac{x}{2} dx = \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\alpha(t)} - \int_1^{\alpha(t)} \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\alpha(t)} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{\alpha(t)} = \\
 &= \frac{\alpha^2(t)}{2} \ln[\alpha(t)] - \frac{\alpha^2(t)}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2\alpha^2(t) \ln[\alpha(t)] - \alpha^2(t) + 1}{4}
 \end{aligned}$$

β) Το σημείο $M(\alpha(t), 0)$ απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ταχύτητα

1cm/sec και κινείται πάνω στον άξονα $x'x$ οπότε $\alpha'(t) = 1 \Leftrightarrow \alpha(t) = t + c$,
 $c \in \mathbb{R}$. Για $t = 0$ είναι $c = 0$ οπότε $\alpha(t) = t$. Την χρονική στιγμή $t = 2$ sec θα
 είναι $\alpha(2) = 2$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$E'(t) = \frac{4\alpha(t)\alpha'(t)\ln[\alpha(t)] + \frac{2\alpha^2(t)}{\alpha(t)}\alpha'(t) - 2\alpha(t)\alpha'(t)}{4} = \alpha(t)\alpha'(t)\ln[\alpha(t)]$$

Την χρονική στιγμή $t = 2$ sec θα είναι

$$E'(2) = \alpha(2)\alpha'(2)\ln[\alpha(2)] = 2 \cdot 1 \cdot \ln 2 = 2 \ln 2 \text{ cm}^2./\text{sec}$$

$$41. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \text{ για κάθε } x_0 \in \mathbb{R}, \text{ άρα και}$$

$f'(x) = 1, x \in \mathbb{R}$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-1}^1 f'(x) dx = [f(x)]_{-1}^1 = f(1) - f(-1) = 1 - (-1) = 2.$$

$$42. f(1) = 0, f'(1) = 0. f \text{ κοίλη} \Rightarrow f'' \searrow [0, 2], \text{ άρα για}$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow f''(x) > f''(1) = 0 \text{ και για } 1 < x < 2 \Rightarrow f''(x) < f''(1) = 0.$$

$$\text{Το ζητούμενο εμβαδό είναι } E(\Omega) = \int_0^2 |f'(x)| dx = \int_0^1 f'(x) dx - \int_1^2 f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = f(1) - f(0) - f(2) + f(1) = -(f(0) + f(2)) = 3.$$

$$43. E(\Omega) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x \int_0^1 f(x) dx + 5) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[x^3 - x^2 \int_0^1 f(x) dx + 5x \right]_0^1 = 1 - E(\Omega) + 5 \Leftrightarrow 2E(\Omega) = 6 \Leftrightarrow E(\Omega) = 3.$$

44. $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x)f(t)dx \right) dt = \int_0^1 f(u)du \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) \left(\int_0^1 f(x)dx \right) dt = \int_0^1 f(u)du \Leftrightarrow$
 $\int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(u)du \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow$
 $E^2(\Omega) = E(\Omega) \Leftrightarrow E^2(\Omega) - E(\Omega) = 0 \Leftrightarrow E(\Omega)(E(\Omega) - 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $E(\Omega) = 1 \text{ ή } E(\Omega) = 0 \text{ που είναι αδύνατο.}$

45. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0) \Leftrightarrow f$ συνεχής στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

α) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες και την ευθεία $x = \lambda$ είναι $E(\lambda) = -\int_{\lambda}^0 x e^x dx = (\lambda - 1)e^{\lambda} + 1$.

β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τους άξονες και την ευθεία $x = \kappa$ είναι $E(\kappa) = \int_0^{\kappa} x e^{-x} dx = -(\kappa + 1)e^{-\kappa} + 1$.

γ) Είναι $E_1 = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (\lambda - 1)e^{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{\lambda - 1}{e^{-\lambda}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-\lambda}} = 0$ και

$$E_2 = \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} E(\kappa) = \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} (\kappa + 1)e^{-\kappa} = \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{\kappa + 1}{e^{\kappa}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\kappa}} = 0.$$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega) = E_1 + E_2 = 2$.

46.α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

Αν $\lambda \in (0, 1)$ είναι $f(x) < 0$, οπότε

$$E(\lambda) = -\int_{\lambda}^1 \frac{\ln x - 1}{x} dx = -\int_{\lambda}^1 (\ln x - 1)(\ln x - 1)' dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \left[-\frac{(\ln x - 1)^2}{2} \right]_{\lambda}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{(\ln \lambda - 1)^2}{2} = \frac{\ln^2 \lambda - 2 \ln \lambda}{2} = \frac{\ln \lambda (\ln \lambda - 2)}{2}.$$

Αν $\lambda = 1$ τότε $E(\lambda) = 0$. Αν $\lambda \in (1, e]$ είναι $f(x) \leq 0$, οπότε

$$E(\lambda) = -\int_1^{\lambda} \frac{\ln x - 1}{x} dx = \int_{\lambda}^1 \frac{\ln x - 1}{x} dx = \frac{-\ln^2 \lambda + 2 \ln \lambda}{2}.$$

Αν $\lambda > e$, είναι $f(x) > 0$, οπότε

$$E(\lambda) = -\int_1^e \frac{\ln x - 1}{x} dx + \int_e^\lambda \frac{\ln x - 1}{x} dx = \frac{-\ln^2 e + 2 \ln e}{2} + \left[-\frac{(\ln x - 1)^2}{2} \right]_\lambda^1 \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{(\ln \lambda - 1)^2}{2} \right) = \frac{(\ln \lambda - 1)^2}{2}$$

$$\text{β) i. } \lim_{\lambda \rightarrow 0} [\lambda^2 \cdot E(\lambda)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\lambda^2 \frac{\ln^2 \lambda - 2 \ln \lambda}{2} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln^2 \lambda - 2 \ln \lambda}{\frac{2}{\lambda^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \ln \lambda}{\lambda} - \frac{2}{\lambda}}{\frac{4}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1 - \ln \lambda}{\frac{2}{\lambda^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\lambda}}{\frac{4}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^2}{4} = 0.$$

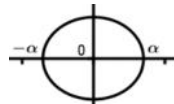
$$\text{ii. } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [\lambda^2 \cdot E(\lambda)] = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\lambda^2 \frac{(\ln \lambda - 1)^2}{2} \right] = (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

$$47. y^2 = 9x \Leftrightarrow y = \pm 3\sqrt{x}. E(\Omega) = 2 \int_0^1 3\sqrt{x} dx = 2 \left[3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 2 \left[2x\sqrt{x} \right]_0^1 = 4.$$

$$48. C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Leftrightarrow \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2 - \beta^2 x^2 \Leftrightarrow \alpha^2 y^2 = \beta^2 (\alpha^2 - x^2) \Leftrightarrow$$

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x^2) \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} (\alpha^2 - x^2)} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}.$$



Άρα το ζητούμενο εμβαδόν αποτελείται από το εμβαδόν μεταξύ των γραφικών

παραστάσεων των συναρτήσεων f και $-f$ με $f(x) = \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}$. Λόγω

συμμετρίας ως προς τον άξονα x' το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega) = 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)| dx = 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx = \frac{2\beta}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx = \frac{2\beta}{\alpha} \pi \alpha^2 = 2\pi\alpha\beta$$

αφού το $\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx$ παριστάνει το εμβαδόν του θετικού ημικυκλίου του κύκλου $x^2 + y^2 = \alpha^2$.

$$49. \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 4 dx \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 1-x=u \\ dx=-du \\ x=0 \Rightarrow u=1 \\ x=1 \Rightarrow u=0 \end{matrix} \quad \int_0^1 f(x) dx - \int_1^0 f(u) du = 4 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^1 f(x) dx = 4 \Leftrightarrow E(\Omega) = 2.$$

$$50. \alpha) \int_0^\pi f(x) dx + \int_0^\pi f(\pi-x) dx = \int_0^\pi 2 dx \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \pi-x=u \\ dx=-du \\ x=0 \Rightarrow u=\pi \\ x=\pi \Rightarrow u=0 \end{matrix} \quad \int_0^\pi f(x) dx -$$

$$\int_\pi^0 f(u) du = 2\pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x) dx + \int_0^\pi f(x) dx = 2\pi \Leftrightarrow 2 \int_0^\pi f(x) dx = 2\pi \Leftrightarrow E = \pi.$$

όπου E το ζητούμενο εμβαδόν.

β) Για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι

$$g(x) = \frac{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 = \frac{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x + 1 + \eta\mu^2 x}{1 + \eta\mu^2 x} = \frac{\eta\mu^2 x (\sigma\upsilon\nu x + 1) + 1}{1 + \eta\mu^2 x} > 0.$$

$$g(\pi-x) = \frac{\eta\mu^2 (\pi-x) \sigma\upsilon\nu (\pi-x)}{1 + \eta\mu^2 (\pi-x)} + 1 = \frac{\eta\mu^2 x (-\sigma\upsilon\nu x)}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 \Leftrightarrow g(\pi-x) =$$

$$-\frac{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1. \text{ Είναι } g(x) + g(\pi-x) = \frac{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 - \frac{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu^2 x} + 1 = 2,$$

οπότε από το α σκέλος το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \pi$.

$$51. f''(x) + f''(4-x) = 2 \Leftrightarrow f'(x) - f'(4-x) = 2x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για $x=2$ είναι $f'(2) - f'(2) = 4 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -4$, άρα

$$f'(x) - f'(4-x) = 2x - 4 \Leftrightarrow f(x) + f(4-x) = x^2 - 4x + c_2. \text{ Για } x=2 \text{ είναι}$$

$$f(2) + f(2) = -4 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 6, \text{ άρα } f(x) + f(4-x) = x^2 - 4x + 6, x \in \mathbb{R}.$$

$$\int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 f(4-x) dx = \int_1^3 (x^2 - 4x + 6) dx \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} 4-x=u \\ dx=-du \\ x=1 \Rightarrow u=3 \\ x=3 \Rightarrow u=1 \end{matrix} \quad \int_1^3 f(x) dx - \int_3^1 f(u) du =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x \right]_1^3 \Leftrightarrow 2 \int_1^3 f(x) dx = \frac{14}{3} \Leftrightarrow 2E(\Omega) = \frac{14}{3} \Leftrightarrow E(\Omega) = \frac{7}{3}.$$

$$52. \alpha) \int_0^4 f'(x) dx = 6 - 2f(0) \Leftrightarrow [f(x)]_0^4 = 6 - 2f(0) \Leftrightarrow$$

$$f(4) - f(0) = 6 - 2f(0) \Leftrightarrow f(4) = 6 - f(0).$$

Για $x=4$ είναι $f(4) = \lambda - f(0) \Leftrightarrow 6 - f(0) = \lambda - f(0) \Leftrightarrow \lambda = 6.$

$$\beta) f(x) = 6 - f(4-x) \Rightarrow \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 6 dx - \int_0^4 f(4-x) dx \quad \begin{array}{l} 4-x=u \\ dx=-du \\ x=0 \Rightarrow u=4 \\ x=4 \Rightarrow u=0 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^4 f(x) dx = 24 + \int_4^0 f(u) du \Leftrightarrow \int_0^4 f(x) dx = 24 - \int_0^4 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^4 f(x) dx = 24 \Leftrightarrow \int_0^4 f(x) dx = 12, \text{ άρα } E(\Omega) = 12.$$

$$53. \alpha) f'(x) \sin x + f(x) \eta \mu x = f(x) \sin x \Leftrightarrow \frac{f'(x) \sin x + f(x) \eta \mu x}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{\sin x} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{\sin x} \right)' = \frac{f(x)}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sin x} = ce^x \Leftrightarrow f(x) = ce^x \sin x, c \in \mathbb{R}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow ce^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} = e^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c = 2, \text{ άρα } f(x) = 2e^x \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$, είναι $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2e^x \sin x) = 2$ και επειδή

η f είναι συνεχής στο π , είναι $f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} (2e^x \sin x) = -2e^\pi$.

$$\text{Επομένως } f(x) = 2e^x \sin x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\beta) E(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin x (e^x)' dx = \left[2 \sin x e^x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \eta \mu x e^x dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = e^{\frac{\pi}{3}} - 2 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \eta \mu x (e^x)' dx = e^{\frac{\pi}{3}} - 2 + \left[2 \eta \mu x e^x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin x e^x dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = e^{\frac{\pi}{3}} - 2 + \sqrt{3} e^{\frac{\pi}{3}} - E(\Omega) \Leftrightarrow 2E(\Omega) = e^{\frac{\pi}{3}} (1 + \sqrt{3}) - 2 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{e^{\frac{\pi}{3}} (1 + \sqrt{3}) - 2}{2}$$

$$54. \alpha) \text{ Έστω } g(x) = f(x) - x^2, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g'(x) = f'(x) - 2x,$$

$$g''(x) = f''(x) - 2 > 0 \Rightarrow g' \nearrow \mathbb{R}. \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } g'(x) > g'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$g \nearrow [0, +\infty). \text{ Για κάθε } x \geq 0 \text{ είναι } g(x) \geq g(0) = 1 \Leftrightarrow f(x) \geq x^2 + 1.$$

$\beta)$ Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ είναι:

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow E > \frac{4}{3}.$$

$$\gamma) \int_0^\lambda f(x) dx > \int_0^\lambda (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^\lambda = \frac{\lambda^3}{3} + \lambda \Leftrightarrow E(\lambda) > \frac{\lambda^3}{3} + \lambda$$

$$\text{Είναι } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda^3}{3} + \lambda \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^3}{3} = +\infty, \text{ άρα } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = +\infty.$$

δ) Είναι $f(x) \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x f(x) \geq x^3 + x$. Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ είναι:

$$\int_0^2 x f(x) dx > \int_0^2 (x^3 + x) dx \Leftrightarrow \int_0^2 g(x) dx > \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 4 + 2 = 6 \Leftrightarrow E_1 > 6.$$

55.α) Από το ΘΜΤ για την f στα $[0, x], [x, 3]$ υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x), x \in (0, 3)$

$$\text{και } \xi_2 \in (x, 3) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x) - 1}{x} \text{ και}$$

$$f(\xi_2) = \frac{f(3) - f(x)}{3 - x} = \frac{7 - f(x)}{3 - x}. \text{ Είναι } \xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x) - 1}{x} > \frac{7 - f(x)}{3 - x} \Leftrightarrow 3f(x) - \cancel{xf(x)} - 3 + x > 7x - \cancel{xf(x)} \Leftrightarrow f(x) > 2x + 1$$

$$\beta) \int_1^2 f(x) dx > \int_1^2 (2x + 1) dx \Leftrightarrow E(\Omega) > [x^2 + x]_1^2 = 4 + 2 - 1 - 1 = 4.$$

56.α) Έστω $g(x) = f(x) - 2x, x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = f'(x) - 2 < 0 \Rightarrow g \searrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) \leq g(0) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 2x \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 2x + 1$.

β) Επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$ είναι:

$$\int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 (2x + 1) dx \Leftrightarrow E(\Omega) < [x^2 + x]_0^1 = 2.$$

57.α) $f'(x) - 2f(x) > 2 \Leftrightarrow e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) > 2e^{-2x}$. Έστω

$$g(x) = f(x)e^{-2x} + e^{-2x}, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$g'(x) = e^{-2x} f'(x) - 2e^{-2x} f(x) - 2e^{-2x} > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}. \text{ Για κάθε } x \geq 0 \text{ είναι}$$

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow f(x)e^{-2x} + e^{-2x} \geq 2 \Leftrightarrow f(x) + 1 \geq 2e^{2x} \Leftrightarrow f(x) \geq 2e^{2x} - 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) \int_0^\lambda f(x) dx \geq \int_0^\lambda (2e^{2x} - 1) dx \Leftrightarrow E(\lambda) \geq [e^{2x} - x]_0^\lambda = e^{2\lambda} - \lambda - 1.$$

$$\text{Είναι } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (e^{2\lambda} - \lambda - 1) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\lambda \left(\frac{e^{2\lambda}}{\lambda} - 1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e^{2\lambda}}{\lambda} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2\lambda}}{1} = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = +\infty.$$

Εμβαδό και αντίστροφη συνάρτηση

58.α) $f'(x) = 12x^2 + 2 > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και αντιστρέφεται.

β) $E(\Omega) = \int_{-6}^0 |f^{-1}(x)| dx$. $f^{-1}(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) \geq f(0) \Leftrightarrow x \geq -6$, οπότε

$$E(\Omega) = \int_{-6}^0 f^{-1}(x) dx. \text{Θέτουμε } f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \text{ και } dx = f'(u) du. \text{ Για}$$

$x = -6$ είναι $f(u) = -6 = f(0) \Leftrightarrow u = 0$ και για $x = 0$ είναι

$$f(u) = 0 = f(1) \Leftrightarrow u = 1. \text{ Άρα } E(\Omega) = \int_0^1 u f'(u) du = [u f(u)]_0^1 -$$

$$\int_0^1 f(u) du = \cancel{f(1)} - \int_0^1 (4u^3 + 2u - 6) du = -[u^4 + u^2 - 6u]_0^1 = 4.$$

59.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2} = e^{x^2} (1 + 2x^2) > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}, \text{ οπότε είναι } 1-1 \text{ άρα αντιστρέφεται.}$$

β) $f^{-1}(x) > 0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$ και $f^{-1}(x) < 0 \Leftrightarrow x < f(0) = 0$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_0^e f^{-1}(x) dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u$. Τότε $x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$. Για $x = 0$ είναι $f(u) = 0 = f(0) \Leftrightarrow u = 0$ και για $x = e$ είναι $f(u) = e = f(1) \Leftrightarrow u = 1$.

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 u f'(u) du = [u f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du = f(1) - \int_0^1 u e^{u^2} du \Leftrightarrow$$

$$E = e - \left[\frac{1}{2} e^{u^2} \right]_0^1 = e - \frac{e-1}{2} = \frac{e+1}{2}.$$

Αυξημένης δυσκολίας

$$\mathbf{60.α)} \quad (4f^3(x) + 2f(x) - 6 + x)' = 0 \Leftrightarrow 12f^2(x)f'(x) + 2f'(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{1}{12f^2(x) + 2} < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R} \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 1-1.}$$

$$\mathbf{β)} \quad 4f^3(x) + 2f(x) - 6 + x = 0 \Leftrightarrow f(x)(4f^2(x) + 2) = 6 - x. \text{ Επειδή}$$

$$4f^2(x) + 2 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ είναι } f(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \leq 6. \text{ Επειδή}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \text{ έχουμε: } 4f^3(x) + 2f(x) - 6 + x = 0 \Rightarrow$$

$$4y^3 + 2y - 6 + f^{-1}(y) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -4y^3 - 2y + 6, y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } E(\Omega) = \int_0^6 f(x) dx. \text{ Θέτουμε } f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -4y^3 - 2y + 6 \text{ και}$$

$$dx = (-12y^2 - 2) dy. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } y=1 \text{ και για } x=6 \text{ είναι } y=0,$$

$$\text{άρα } E(\Omega) = \int_1^0 y(-12y^2 - 2) dy = \int_0^1 (12y^3 + 2y) dy = \left[3y^4 + y^2 \right]_0^1 = 4.$$

Εμβαδό και αρχική συνάρτηση

$$61. \alpha) F(x) = \ln \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) = \ln \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = \ln \frac{x^2}{x^2 + 1} = \ln x^2 - \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$F(x) = 2\ln|x| - \ln(x^2 + 1),$$

$$F'(x) = \frac{2}{x^3 + x} = f(x). \text{ Άρα η } F \text{ είναι παράγουσα της } f.$$

$$\beta) \text{ Είναι } f(x) = \frac{2}{x(x^2 + 1)} < 0 \text{ για κάθε } x < 0, \text{ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:}$$

$$E = -\int_{-2}^{-1} f(x) dx = -[F(x)]_{-2}^{-1} = -F(-1) + F(-2) \Leftrightarrow$$

$$E = -\ln \frac{(-1)^2}{(-1)^2 + 1} + \ln \frac{(-2)^2}{(-2)^2 + 1} = -\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{4}{5} = \ln \frac{5}{2} = \ln \frac{8}{5}.$$

$$62. \alpha) F(x) = \ln \left(\frac{1}{\eta\mu x} + 2\sigma\upsilon\nu x \right) = \ln \frac{1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \ln \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x \eta\mu x}{\eta\mu x} = \ln \frac{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}{\eta\mu x} \Leftrightarrow$$

$$F(x) = \ln(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - \ln(\eta\mu x) = 2\ln(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) - \ln(\eta\mu x).$$

$$F'(x) = 2 \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu^2 x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)} \Leftrightarrow$$

$$F'(x) = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)} = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu^2 x - 1}{\eta\mu x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)} = f(x).$$

$$\beta) f(x) = \frac{\eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) - 1}{\eta\mu x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)} < 0 \text{ για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \text{ γιατί}$$

$\sin x \leq \sin \frac{\pi}{4}$, $\eta \mu x \geq \eta \mu \frac{\pi}{4}$, οπότε $\sin x \leq \eta \mu x \Leftrightarrow \sin x - \eta \mu x \leq 0$ και επειδή $\eta \mu x > 0$, είναι $\eta \mu x (\sin x - \eta \mu x) - 1 < 0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = -\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x) dx = -\left[F(x)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -F\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$E = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \ln \sqrt{2} - \ln \sqrt{2} + \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$E = \ln \sqrt{2} + \ln 2 \Leftrightarrow E = \frac{1}{2} \ln 2 + \ln 2 \Leftrightarrow E = \frac{3}{2} \ln 2.$$

Αυξημένης δυσκολίας

63. Είναι $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x \leq 1 \Leftrightarrow F(x) \leq F(1) = 0$, οπότε

$$E(\Omega) = -\int_0^1 F(x) dx = -\int_0^1 (x)' F(x) dx = -\left[xF(x)\right]_0^1 + \int_0^1 xf(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -F(1) + \int_0^1 xe^{x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{x^2}\right)' dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

64. Έστω ότι η C_2 είναι η γραφική παράσταση της f . Τότε

$$E_2 = -\int_1^2 f(x) dx = -F(2) + F(1). \text{ Στη περίπτωση αυτή η } C_1 \text{ θα είναι η}$$

γραφική παράσταση της F , οπότε από το σχήμα προκύπτει ότι

$$F(1) = 2, F(2) = \frac{1}{4}, \text{ άρα } E_2 = -\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4} \text{ άτοπο. Άρα η } C_1 \text{ είναι η γραφική}$$

παράσταση της f και η C_2 της αρχικής της.

65.α) $x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du$. Για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = 1$ είναι $u = 1$.

$$\text{Τότε: } \int_0^a x^3 g(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^a x^2 g(x^2) 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u g(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x g(x) dx.$$

β) i. Η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow \mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $F(x) > F(0) = 0$.

ii. Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $h(x) \geq 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 x^3 F(x^2) dx \text{ και με βάση το α σκέλος είναι}$$

$$E = \int_0^1 xF(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' F(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} F(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} F'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{1}{2} F(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = 1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = 1 - \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \Leftrightarrow$$

$$E = 1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = 1 - \int_0^1 1 dx + \int_0^1 f(x) dx = 1 - 1 + [F(x)]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$E = F(1) - F(0) = 2.$$

Εμβαδό χωρίου που σχηματίζεται από δύο γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

66.α) $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2).$

Για κάθε $x < 1$ είναι $h(x) < 0$ και για κάθε $x > 1$ είναι $h(x) > 0$.

$$E(\Omega) = -\int_{-1}^1 (x^3 + x - 2) dx + \int_1^2 (x^3 + x - 2) dx = \frac{29}{4}.$$

β) $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$.

$$E(\Omega) = -\int_1^2 (2x^2 - 6x + 4) dx = \frac{1}{3}.$$

γ) $h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - x)e^x = x(x-1)e^x < 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

$$E(\Omega) = -\int_0^1 (x^2 - x)e^x dx = -\left[(x^2 - x)e^x \right]_0^1 + \int_0^1 (2x - 1)e^x dx = \\ = \left[(2x - 1)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx = 3 - e.$$

67.α) $h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2} + 2x.$

Αν $\lambda > 1$, τότε $E(\lambda) = \int_1^\lambda h(x) dx = \int_1^\lambda \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx = \left[-\frac{1}{x} + x^2 \right]_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda} + \lambda^2.$

Αν $\lambda \in (0, 1)$, τότε $E(\lambda) = \int_\lambda^1 h(x) dx = \frac{1}{\lambda} - \lambda^2.$ Τέλος αν $\lambda = 1$, τότε $E(\lambda) = 0$

β) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) = +\infty.$

68.α) Αν $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$E(\lambda) = \int_\lambda^1 (-\ln x - \ln x) dx = \int_\lambda^1 (-2 \ln x)(x)' dx = 2\lambda(\ln \lambda - 1) + 2.$$

Αν $\lambda > 1$, τότε $E(\lambda) = \int_1^\lambda (\ln x - (-\ln x)) dx = -\int_\lambda^1 2 \ln x dx = 2\lambda(\ln \lambda - 1) + 2$.

β) $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} [2\lambda(\ln \lambda - 1) + 2] = 2$, γιατί

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 2\lambda(\ln \lambda - 1) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln \lambda - 1}{\frac{1}{2\lambda}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{2\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (-2\lambda) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [2\lambda(\ln \lambda - 1) + 2] = +\infty.$$

69.α) Αρχικά θα βρούμε τη τετμημένη του Α. Για $x \in (0, \pi)$ είναι

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

$$E_1 = \int_0^{\pi/4} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) dx = [\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi/4} =$$

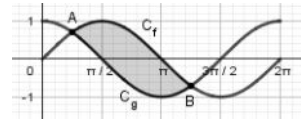
$$\sqrt{2} - 1.$$

β) Θα βρούμε την τετμημένη του Β.

Για $x \in (\pi, 2\pi)$ είναι

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}. \quad \text{Το ζητούμενο εμβαδό είναι:}$$

$$E = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) dx = [-\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}.$$



70. Επειδή είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$, το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x) dx$ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$. Λόγω όμως της συμμετρίας της f ως προς το σημείο $M(2, 1)$ το εμβαδόν ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ όπου $A(1, 0)$, $B(3, 0)$ και $\Gamma(3, 2)$. Άρα είναι

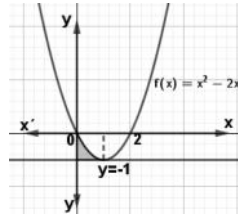
$$\int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2}(AB)(B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ τ.μ.}$$

71. $(OAB) = \frac{1}{2}(OB)(AB) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 = 12$. Το χωρίο Ω_1 που περικλείεται από

τη C_f και τον άξονα x' έχει εμβαδόν $E(\Omega_1) = \int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = 8$, οπότε το χωρίο Ω_2 που περικλείεται από την OA και τη C_f έχει εμβαδό

$$E(\Omega_2) = 12 - 8 = 4. \quad \text{Είναι} \quad \frac{E(\Omega_2)}{E(\Omega_1)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$72. E(\Omega) = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



73. Επειδή η AB έχει εξίσωση $x = \kappa$, το A έχει συντεταγμένες (κ, κ^3) . Το τρίγωνο OAB έχει εμβαδό:

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OB)(AB) = \frac{1}{2} \cdot \kappa \cdot \kappa^3 = \frac{1}{2} \kappa^4.$$

Το E_2 είναι: $E_2 = \int_0^\kappa x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^\kappa = \frac{\kappa^4}{4}$. Είναι

$$E_2 = \int_0^\kappa x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^\kappa = \frac{\kappa^4}{4} = \frac{1}{2}(OAB), \text{ οπότε και } E_1 = \frac{1}{2}(OAB), \text{ άρα}$$

$$E_1 = E_2$$

Αυξημένης δυσκολίας

74. Έστω $A(\alpha, \alpha^4)$, $\alpha > 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x^3$.

Η ε έχει εξίσωση: $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \alpha^4 = 4\alpha^3(x - \alpha) \Leftrightarrow$

$$y = 4\alpha^3 x - 3\alpha^4. \text{ Για } y = 0 \text{ είναι } 0 = 4\alpha^3 x - 3\alpha^4 \Leftrightarrow x = \frac{3\alpha}{4}, \text{ άρα } B\left(\frac{3\alpha}{4}, 0\right).$$

Το τρίγωνο OAB έχει εμβαδό

$$(OAB) = \frac{1}{2}(OB) \cdot d(A, x'x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\alpha}{4} \cdot \alpha^4 = \frac{3}{8} \alpha^5. \text{ Η ευθεία OA έχει } \lambda = \frac{\alpha^4}{\alpha} = \alpha^3$$

και εξίσωση $y = \alpha^3 x$. Για το E_1 έχουμε

$$E_1 = \int_0^\alpha (\alpha^3 x - x^4) dx = \left[\alpha^3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^\alpha = \frac{1}{2} \alpha^5 - \frac{1}{5} \alpha^5 = \frac{3}{10} \alpha^5.$$

$$E_2 = (OAB) - E_1 = \frac{3}{8} \alpha^5 - \frac{3}{10} \alpha^5 = \frac{3}{40} \alpha^5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} \alpha^5 \Leftrightarrow E_2 = \frac{1}{4} E_1 \Leftrightarrow E_1 = 4E_2.$$

75. α) $f(x) = 3 \Leftrightarrow 4x - x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$

$$E_1 = \int_0^1 (3 - 4x + x^2) dx = \left[3x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

$$\beta) E_2 = \int_1^3 (4x - x^2 - 3) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3} = E_1.$$

$$76. \alpha) h(x) = f(x) - g(x) = x \sin x - \eta \mu x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$h'(x) = \sin x - x \eta \mu x - \sigma \nu x = -x \eta \mu x < 0 \Rightarrow h \searrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \stackrel{h \searrow}{\Leftrightarrow} h(0) \geq h(x) \geq h\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1 \leq h(x) \leq 0.$$

$$E(\Omega) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x - \eta \mu x) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\eta \mu x)' dx - [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$- [x \eta \mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu x dx + 1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$\beta) h(x) = f(x) - g(x) = \ln x - 2x - 2, \quad x \in [1, e].$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x} < 0 \Rightarrow h \searrow [1, e], \text{ άρα}$$

$$h(1) \geq h(x) \geq h(e) \Leftrightarrow -2e - 1 \leq h(x) \leq -4 < 0.$$

$$E(\Omega) = -\int_1^e h(x) dx = -\int_1^e (\ln x - 2x - 2) dx = -\int_1^e \ln x (x)' dx + [x^2 + 2x]_1^e \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -[x \ln x]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} x dx + e^2 + 2e - 1 - 2 = -e + e - 1 + e^2 + 2e - 3 = e^2 + 2e - 4.$$

$$\gamma) h(x) = f(x) - g(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2, \quad x \in [-1, 1].$$

$$h'(x) = 2e^x - 2x - 2 = 2(e^x - x - 1) > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0, \text{ άρα } h \nearrow]-\infty, \infty[.$$

$$\text{Για κάθε } x < 0 \text{ είναι } h(x) < 0 \text{ και για κάθε } x > 0 \text{ είναι } h(x) > 0.$$

$$E(\Omega) = \int_{-1}^1 h(x) dx = -\int_{-1}^0 h(x) dx + \int_0^1 h(x) dx = \dots = 2e + \frac{2}{e} - 6.$$

$$77. f''(x) = g''(x) + e^x \Leftrightarrow (f'(x))' = (g'(x) + e^x)' \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + e^x + c$$

$$c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } f'(0) = g'(0) + 1 + c \Leftrightarrow c = 0 \text{ και}$$

$$f'(x) = g'(x) + e^x \Leftrightarrow f'(x) = (g(x) + e^x)' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + e^x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } f(0) = g(0) + 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1. \text{ Άρα } f(x) - g(x) = e^x - 1.$$

$$\text{Έστω } h(x) = f(x) - g(x) = e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 (e^x - 1) dx = e - 2.$$

$$78. \text{Είναι } f(x) = 6x^2 + 2x \int_0^1 g(x) dx + 10, \text{ άρα και } \int_0^1 f(x) dx =$$

$$\int_0^1 \left(6x^2 + 2x \int_0^1 g(x) dx + 10 \right) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \left[2x^3 + x^2 \int_0^1 g(x) dx + 10x \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 + \int_0^1 g(x) dx + 10 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = 12 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = 12 \Leftrightarrow E(\Omega) = 12.$$

79. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$, άρα η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έστω $h(x) = f(x) - g(x) = -\frac{1}{x}$, $x > 0$ όπου $g(x) = x$. Είναι

$$E(\Omega) = -\int_e^{e^2} h(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_e^{e^2} = 2 - 1 = 1.$$

80.α) Έστω F, G αρχικές των f, g αντίστοιχα.

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta g(x) dx \Leftrightarrow F(\beta) - F(a) = G(\beta) - G(a) \Leftrightarrow$$

$F(\beta) - G(\beta) = F(a) - G(a)$. Έστω $h(x) = F(x) - G(x)$, $x \in [a, \beta]$. Επειδή οι f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η h είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ άρα συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Επειδή $h(a) = 0 = h(\beta)$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει

$$\xi_1 \in (a, \beta) : h'(\xi_1) = 0 \Leftrightarrow f(\xi_1) = g(\xi_1).$$

β) Από το ΘΜΤ για την h στο $[a, \beta]$, υπάρχει

$$\xi \in (a, \beta) : h'(\xi) = \frac{h(\beta) - h(a)}{\beta - a} \Leftrightarrow f(\xi) - g(\xi) = \frac{E_1 - E_2}{\beta - a}.$$

Εμβαδό χωρίου που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις αντίστροφων συναρτήσεων

81.α) $f'(x) = 2e^{2x} + 2 > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ } 1-1$.

β) Έστω $g(x) = f(x) - x = e^{2x} + x - 1$. Είναι $g'(x) = 2e^{2x} + 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$.

Επειδή $g(0) = 0$ το $x = 0$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την $y = x$

Για $x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) > x$ και λόγω συμμετρίας είναι και

$f(x) > f^{-1}(x)$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^{e^2+1} (f(x) - f^{-1}(x)) dx = \int_0^{e^2+1} f(x) dx - \int_0^{e^2+1} f^{-1}(x) dx$$

$$\text{Θέτουμε } f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \text{ και } dx = f'(u) du = (2e^{2u} + 2) du.$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow f(u) = 0 = f(0) \Leftrightarrow u = 0 \text{ και για}$$

$$x = e^2 + 1 \Rightarrow f(u) = e^2 + 1 = f(1) \Leftrightarrow u = 1$$

$$E(\Omega) = \int_0^{e^2+1} (e^{2x} + 2x - 1) dx - \int_0^1 u(2e^{2u} + 2) du = \dots = \frac{1}{2} e^{2e^2+2} + e^4 - \frac{1}{2} e^2 - 2$$

$$\mathbf{82. \alpha)} f'(x) = 1 - \eta \mu x > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right), \text{ άρα}$$

$$f \nearrow (0, 2\pi) \Rightarrow f \text{ 1-1 οπότε αντιστρέφεται.}$$

β) Λόγω συμμετρίας το ζητούμενο εμβαδό είναι διπλάσιο από το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τη $y = x$.

$$f(x) - x = \sigma \nu \eta x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{2}.$$

$$E(\Omega) = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sigma \nu \eta x| dx = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sigma \nu \eta x dx = -2 [\eta \mu x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 4.$$

83. α) Είναι $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 2$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Οι τετμημένες των ζητούμενων σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = x$.

$$\text{Είναι: } f(x) = x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 6 = x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3. \text{ Οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα } (1, 1), (2, 2) \text{ και } (3, 3).$$

γ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$, το ζητούμενο εμβαδό E είναι διπλάσιο από το εμβαδό E_1 του χωρίου που ορίζεται από την C_f και την διχοτόμο $y = x$.

$$\text{Έστω } h(x) = f(x) - x = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\text{Είναι } E_1 = \int_1^2 h(x) dx - \int_2^3 h(x) dx = \frac{1}{2}.$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
h	-	+	-	+	

$$\text{Οπότε } E = 2E_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \text{ τ.μ.}$$

Αυξημένης δυσκολίας

84. Επειδή $f(x) \neq x$ για κάθε $x \in (a, b)$ και η $f(x) - x$ είναι συνεχής, είναι

$f(x) > x$ ή $f(x) < x$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Έστω $f(x) > x$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $f(x) > x > f^{-1}(x)$, οπότε

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - f^{-1}(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$.

Για $x = \alpha \Rightarrow f(u) = \alpha = f(\alpha) \Leftrightarrow u = \alpha$ και για $x = \beta \Rightarrow f(u) = \beta = f(\beta) \Leftrightarrow u = \beta$

Οπότε $E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f'(u) du \Leftrightarrow$

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - [uf(u)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du = 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - (\beta^2 - \alpha^2) \Leftrightarrow$$

$$E = 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - 2 \int_{\alpha}^{\beta} x dx = 2 \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - x) dx.$$

Όμοια αν $f(x) < x$.

**Εμβαδό χωρίου που σχηματίζεται από τις
γραφικές παραστάσεις περισσότερων από δύο συναρτήσεων**

85. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη στο M είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2 - 1$. Για να διέρχεται από το A , πρέπει $-1 = 4x_0 - x_0^2 - 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0(x_0 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ή $x_0 = 4$. Τότε $\varepsilon_1: y = 8x - 17$ και $\varepsilon_2: y = -1$. Είναι

$$E = \int_0^2 (x^2 - 1 - (-1)) dx + \int_2^4 (x^2 - 1 - (8x - 17)) dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (x^2 - 8x + 16) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x \right]_2^4 = \frac{16}{3}.$$

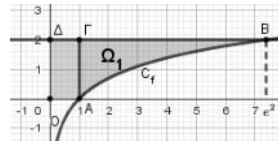
86. Το χωρίο Ω αποτελείται από το ορθογώνιο $OAG\Delta$ που έχει εμβαδό $(OAG\Delta) = 1 \cdot 2 = 2$ και από το χωρίο Ω_1 .

Είναι $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$, άρα η C_f τέμνει την $y=2$ στο σημείο $B(e^2, 2)$. Το χωρίο Ω_1 έχει εμβαδό

$$E(\Omega_1) = \int_1^{e^2} (2 - \ln x) dx = \int_1^{e^2} 2 dx - \int_1^{e^2} \ln x (x)' dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega_1) = 2(e^2 - 1) - [x \ln x]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot x dx = 2e^2 - 2 - 2e^2 + e^2 - 1 = e^2 - 3.$$

Άρα $E(\Omega) = 2 + E(\Omega_1) = e^2 - 1$.



87. $f'(x) = 2x$. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Η

εφαπτομένη στο M είναι η ευθεία

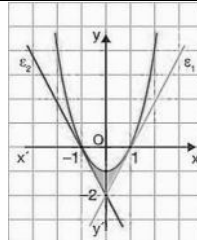
$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2 - 1.$$

Για να διέρχεται από το A , πρέπει $-2 = -x_0^2 - 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$

Τότε $\varepsilon_1: y = 2x - 2$ και $\varepsilon_2: y = -2x - 2$

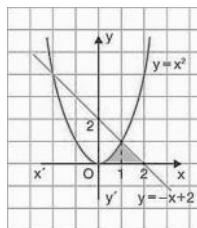
$$E(\Omega) = \int_{-1}^0 (x^2 - 1 - (-2x - 2)) dx +$$

$$\int_0^1 (x^2 - 1 - (2x - 2)) dx \Leftrightarrow E(\Omega) = \frac{2}{3}.$$



$$\mathbf{88.} E(\Omega) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 = \frac{5}{6}$$



89. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της C_f . Η εφαπτομένη στο

M είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = 2x_0x - x_0^2$.

Για να διέρχεται από το A , πρέπει $-\alpha^2 = -x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow x_0 = \pm \alpha$. Τότε

$\varepsilon_1: y = 2\alpha x - \alpha^2$ και $\varepsilon_2: y = -2\alpha x - \alpha^2$. Τα σημεία B, Γ έχουν συντεταγμένες

$(-\alpha, \alpha^2)$ και (α, α^2) αντίστοιχα. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδό:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} (B\Gamma) \cdot d(A, B\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \cdot 2\alpha^2 = 2\alpha^3. \text{ Είναι}$$

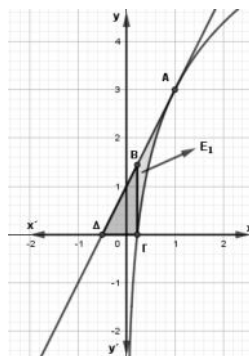
$$E_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 - x^2) dx = \left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{4\alpha^3}{3} \text{ και}$$

$$E_2 = (AB\Gamma) - E_1 = \frac{2\alpha^3}{3}, \text{ άρα } E_1 = 2E_2.$$

90. $f'(x) = \frac{2}{x}$, $f'(1) = 2$. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x + 1. \text{ Το ζητούμενο}$$

χωρίο αποτελείται από το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ και από το χωρίο E_1 .



$$(B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} (\Delta\Gamma) (B\Gamma) \Leftrightarrow (B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e\sqrt{e}} \right) \left(\frac{2}{e\sqrt{e}} + 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$(B\Gamma\Delta) = \frac{2e^3 + 3e\sqrt{e} + e}{2e^3}.$$

$$E_1 = \int_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^1 (2x + 1 - 2\ln x - 3) dx = \int_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^1 (2x - 2\ln x - 2) dx \Leftrightarrow$$

$$E_1 = \left[x^2 \right]_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^1 - 2 \left[x \ln x - x \right]_{\frac{1}{e\sqrt{e}}}^1 - 2 + \frac{1}{e\sqrt{e}} \Leftrightarrow E_1 = \frac{2e^3 - 2 + 3e\sqrt{e}}{2e^3}.$$

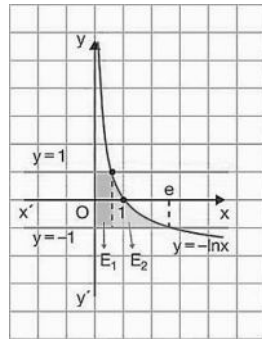
$$E(\Omega) = (B\Gamma\Delta) + E_1 = \frac{4e^3 + e - 2 + 6e\sqrt{e}}{2e^3}.$$

$$91. E(\Omega) = E_1 + E_2 = 2 \cdot \frac{1}{e} + \int_{\frac{1}{e}}^e (-\ln x + 1) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{2}{e} - \int_{\frac{1}{e}}^e (x)' \ln x dx + e - \frac{1}{e} \Leftrightarrow$$

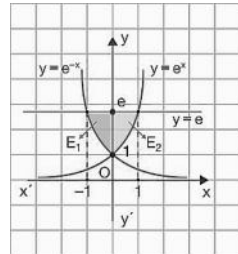
$$E(\Omega) = \frac{2}{e} + e - \frac{1}{e} - \left[x \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^e + \int_{\frac{1}{e}}^e x \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{2}{e} + e - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} - \cancel{e} + \cancel{e} + \frac{1}{e} = e + \frac{3}{e}.$$



$$92. E(\Omega) = E_1 + E_2 = \int_{-1}^0 (e - e^{-x}) + \int_0^1 (e - e^x) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = [ex + e^{-x}]_{-1}^0 + [ex - e^x]_0^1 = 2.$$



93.α) Έστω $M(x_0, f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = \lambda e^{\lambda x_0} x + e^{\lambda x_0} (1 - \lambda x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το O , ισχύει: $e^{\lambda x_0} (1 - \lambda x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$. Η εφαπτομένη

είναι η $\varepsilon: y = \lambda e x$. $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0 \Rightarrow f$ κυρτή, οπότε η C_f

βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda e x) dx = \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} - \left[\lambda e \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

$$\beta) \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{e-2}{2\lambda} = +\infty \text{ και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e-2}{2\lambda} = 0.$$

Διαχωρισμός χωρίου

$$94.a) E(\Omega) = \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_2^4 = 64 - 8 = 56.$$

$$\beta) \int_2^a f(x) dx = \frac{E(\Omega)}{2} \Leftrightarrow \left[x^3 \right]_2^a = 28 \Leftrightarrow a^3 - 8 = 28 \Leftrightarrow a^3 = 36 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{36}.$$

$$95.a) f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}, \quad f'(5) = 1, \quad f(5) = 8.$$

Η εφαπτομένη είναι η $\varepsilon: y - f(5) = f'(5)(x - 5) \Leftrightarrow y = x + 3.$

$$E(\Omega) = (AB\Gamma) + \int_1^5 (x + 3 - f(x)) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{4 \cdot 4}{2} + \int_1^5 \left(x + 3 - 4(x-1)^{\frac{1}{2}} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = 8 + \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{8}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^5 = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

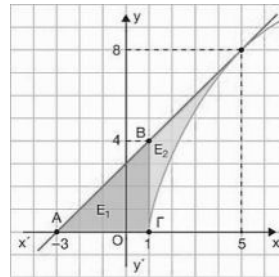
$\beta)$ Επειδή $(AB\Gamma) = 8 > \frac{1}{2} E(\Omega)$, η ευθεία $x = \lambda$ θα

βρίσκεται αριστερά της

ευθείας $B\Gamma$, δηλαδή $\lambda \in (-3, 1)$. Τότε

$$\frac{(\lambda + 3)^2}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \lambda + 3 = \pm \sqrt{\frac{32}{3}} \Leftrightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{\frac{32}{3}}.$$

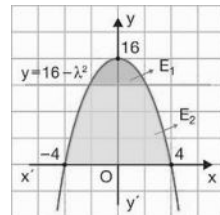
Επειδή $\lambda \in (-3, 1)$ είναι $\lambda = 3 - \sqrt{\frac{32}{3}}.$



$$96.a) E(\Omega) = \int_{-4}^4 (16 - x^2) dx = \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^4 = \frac{256}{3}.$$

$$\beta) E_1 = \int_{-\lambda}^{\lambda} (16 - x^2 - 16 + \lambda^2) dx = \frac{1}{2} E(\Omega) = \frac{128}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4\lambda^3}{3} = \frac{128}{3} \Leftrightarrow \lambda^3 = 32 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4}.$$



97.α) $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2, f(x) = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$E(\Omega) = (AB\Gamma\Delta) + \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) +$$

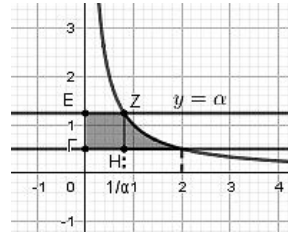
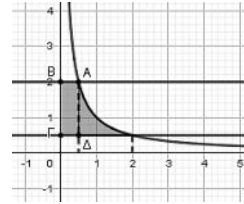
$$\left[\ln x - \frac{1}{2}x \right]_{1/2}^2 = 2 \ln 2.$$

β) $f(x) = \alpha \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}.$

$$\text{Είναι } (EZ\text{H}\Gamma) + \int_{1/\alpha}^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} E(\Omega) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha} \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) + \left[\ln x - \frac{1}{2}x \right]_{1/\alpha}^2 = \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{1}{2\alpha} + \ln 2 - \ln \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{2\alpha} = \ln 2 \Leftrightarrow -\ln \frac{1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

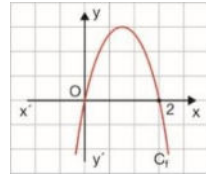


98.α) Είναι $f(x) = 2x - x^2 = x(2 - x).$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για κάθε}$$

$x \in (0, 2).$ Για το εμβαδόν του χωρίου Ω έχουμε:

$$E(\Omega) = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$



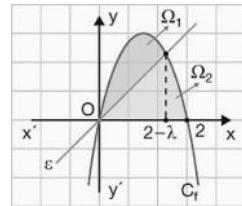
β) Έστω $\varepsilon: y = \lambda x$ η ζητούμενη ευθεία (Αν ήταν ο άξονας x' δεν θα έτεμνε το χωρίο Ω). Για τα κοινά σημεία των ε, C_f ,

$$\text{έχουμε: } 2x - x^2 = \lambda x \Leftrightarrow 2x - x^2 - \lambda x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(2 - \lambda - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2 - \lambda. \text{ Η ευθεία } \varepsilon$$

ορίζει στο Ω τα χωρία Ω_1 και Ω_2 . Πρέπει

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \frac{E(\Omega)}{2} = \frac{2}{3}. \text{ Για το εμβαδόν του}$$



$$\text{χωρίου } \Omega_1, \text{ έχουμε: } E(\Omega_1) = \int_0^{2-\lambda} (f(x) - \lambda x) dx = \int_0^{2-\lambda} [(2-\lambda)x - x^2] dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega_1) = (2-\lambda) \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2-\lambda} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2-\lambda} = \frac{(2-\lambda)^3}{2} - \frac{(2-\lambda)^3}{3} = \frac{(2-\lambda)^3}{6}.$$

$$\text{Είναι } \frac{(2-\lambda)^3}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (2-\lambda)^3 = 4 \Leftrightarrow 2-\lambda = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow \lambda = 2 - \sqrt[3]{4}. \text{ Άρα η } \varepsilon \text{ έχει}$$

εξίσωση $y = (2 - \sqrt[3]{4})x$.

$$99.a) E(\Omega) = -\int_0^2 f(x) dx = -\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \frac{4}{3}.$$

$$\beta) x^2 - 2x = \lambda x \Leftrightarrow x(x - 2 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \lambda + 2$$

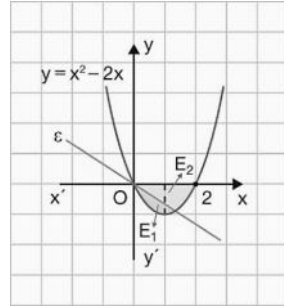
Η ευθεία ε ορίζει στο Ω τα χωρία Ω_1 και Ω_2 .

$$\text{Πρέπει } E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \frac{E(\Omega)}{2} = \frac{2}{3}.$$

Για το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 , έχουμε:

$$E(\Omega_1) = \int_0^{\lambda+2} (\lambda x - f(x)) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega_1) = \int_0^{\lambda+2} [-x^2 + (2 + \lambda)x] dx \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{4} - 2.$$



100. Η ευθεία ε έχει εξίσωση:

$$y - 0 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow y = \lambda x - 2\lambda, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(Η ευθεία δεν μπορεί να είναι η $x = 2$ γιατί τότε δεν θα υπήρχε χωρίο). Για τα σημεία τομής των C_f, ε ισχύει:

$$f(x) = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow$$

$$x^2 - (\lambda + 4)x + 2\lambda + 3 = 0 \quad (1). \text{ Η τελευταία είναι 2ου}$$

βαθμού ως προς x με $\Delta = (\lambda + 4)^2 - 4(2\lambda + 3) = \lambda^2 + 4 > 0$ και οι ρίζες της είναι:

$$x_1 = \frac{\lambda + 4 - \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} \text{ και } x_2 = \frac{\lambda + 4 + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}. \text{ Έστω } x_1 < x_2. \text{ Για το εμβαδόν}$$

του χωρίου που περικλείεται από την C_f και την ε , ισχύει:

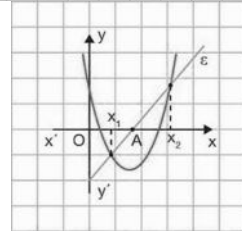
$$E(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} (\lambda x - 2\lambda - f(x)) dx = -\int_{x_1}^{x_2} (x^2 - (\lambda + 4)x + 2\lambda + 3) dx =$$

$$-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2} + (\lambda + 4)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} - (2\lambda + 3)(x_2 - x_1) =$$

$$= -\frac{1}{3}(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + \frac{\lambda + 4}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (2\lambda + 3)(x_2 - x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1) \frac{-2(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + 3(\lambda + 4)(x_2 + x_1) - 6(2\lambda + 3)}{6} \quad (2).$$

Η εξίσωση (1) έχει άθροισμα ριζών $x_1 + x_2 = \lambda + 4$ και γινόμενο ριζών



$$x_1 x_2 = 2\lambda + 3. \text{ Είναι } x_2 - x_1 = \frac{\lambda + 4 + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} - \frac{\lambda + 4 - \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} = \sqrt{\lambda^2 + 4} \text{ άρα}$$

$$(x_2 - x_1)^2 = \lambda^2 + 4 \Leftrightarrow x_2^2 - 2x_2 x_1 + x_1^2 = \lambda^2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$x_2^2 - 2(2\lambda + 3) + x_1^2 = \lambda^2 + 4 \Leftrightarrow x_2^2 + x_1^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 10. \text{ Η (2) γίνεται:}$$

$$E(\lambda) = \frac{1}{6} \sqrt{\lambda^2 + 4} [-2(\lambda^2 + 4\lambda + 10 + 2\lambda + 3) + 3(\lambda + 4)(\lambda + 4) - 6(2\lambda + 3)] \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{1}{6} \sqrt{\lambda^2 + 4} (\lambda^2 + 4) = \frac{1}{6} (\lambda^2 + 4)^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Είναι } E'(\lambda) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} (\lambda^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\lambda = \frac{\lambda \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}. E'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

Το $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο για $\lambda = 0$. Τότε η ε έχει εξίσωση $y = 0$, δηλαδή

είναι ο άξονας $x'x$. Το εμβαδόν στη περίπτωση αυτή είναι $E(0) = \frac{4}{3}$ τ.μ.

Σύνθετες ασκήσεις

$$101. \alpha) f'(x) = \frac{1}{x} (f(x) - x^2 e^{-x}) \Leftrightarrow x f'(x) = f(x) - x^2 e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$x f'(x) - f(x) = -x^2 e^{-x} \Leftrightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = -e^{-x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (e^{-x})' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = e^{-x} + c \Leftrightarrow f(x) = x(e^{-x} + c), \quad c \in \mathbb{R}. \quad f(1) = \frac{1}{e} + 1 \Leftrightarrow e^{-1} + c = \frac{1}{e} + 1 \Leftrightarrow$$

$$c = 1 \text{ και } f(x) = x(e^{-x} + 1), \quad x > 0.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 1) = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(e^{-x} + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

$$\text{άρα η } y = x \text{ είναι πλάγια ασύμπτωτη της } C_f. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(e^{-x} + 1) = 0$$

άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

γ) Έστω ευθεία $x = k$, $k > 0$. Είναι

$$\int_1^k |f(x) - x| dx = \int_1^k x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_1^k + \int_1^k e^{-x} dx = -\frac{k+1}{e^k} + \frac{2}{e}.$$

$$E(\Omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(-\frac{k+1}{e^k} + \frac{2}{e} \right) = \frac{2}{e}, \text{ γιατί } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{e^k} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^k} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0.$$

$$102. \alpha) f^2(x) - 4f(x) + 4f'(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow 4f'(x) = -(f(x) - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{f'(x)}{(f(x) - 2)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - 2} = \frac{x}{4} + c \Leftrightarrow f(x) - 2 = \frac{4}{x + 4c} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{4}{x + 4c} + 2. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } x = 0, \text{ ισχύει ότι}$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{x + 4c} + 2 \right) \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{c} + 2 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}. \text{ Τότε}$$

$$f(x) = \frac{4}{x + 2} + 2 = \frac{4 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{2x + 8}{x + 2}$$

$$\beta) E(\Omega) = \int_0^1 \frac{2x + 8}{x + 2} dx = \int_0^1 \frac{2x + 4 + 4}{x + 2} dx = \int_0^1 \left(\frac{\cancel{2(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{4}{x + 2} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = [2x + 4 \ln(x + 2)]_0^1 = 2 + 4 \ln 3 - 4 \ln 2 = 2 + 4 \ln \frac{3}{2}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(x) = -\frac{4}{(x + 2)^2} < 0 \Rightarrow f \searrow [0, +\infty)$$

$$2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow f(4) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow m = \frac{8}{3} \leq f(x) \leq 3 = M$$

$$\delta) \frac{8}{3} \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{8}{3} e^x \leq e^x f(x) \leq 3e^x, \text{ άρα}$$

$$\int_2^4 \frac{8}{3} e^x dx \leq \int_2^4 e^x f(x) dx \leq \int_2^4 3e^x dx \Leftrightarrow \frac{8}{3} e^2 (e^2 - 1) \leq \int_2^4 e^x f(x) dx \leq 3e^2 (e^2 - 1)$$

$$\text{Είναι } 3e^2 (e^2 - 1) < 24e^2 \Leftrightarrow e^2 - 1 < 8 \Leftrightarrow e^2 < 9 \text{ που ισχύει και}$$

$$2e^2 < \frac{8}{3} e^2 (e^2 - 1) \Leftrightarrow 6 < 8e^2 - 8 \Leftrightarrow e^2 > \frac{7}{4} \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Άρα } 2e^2 < \frac{8}{3} e^2 (e^2 - 1) \leq \int_2^4 e^x f(x) dx \leq 3e^2 (e^2 - 1) < 24e^2.$$

$$103. \alpha) f'(x) = \alpha + e^{-x} - xe^{-x}. f'(0) = 2 \Leftrightarrow \alpha + 1 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

β) i. $f'(x) = 1 + e^{-x}(1-x) = 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x + 1 - x}{e^x}$. Παρατηρούμε ότι το πρόσημο

της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $e^x + 1 - x$. Έστω

$g(x) = e^x + 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g'(x) = e^x - 1$ και για $x > 0$ είναι

$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$ και για $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$. Για

$x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0$ και για $x < 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) = 0$, άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$, άρα $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = x$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ii. $E(\lambda) = \int_0^\lambda |f(x) - x| dx = \int_0^\lambda x e^{-x} dx = -[x e^{-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x} dx = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 \Leftrightarrow$

$E(\lambda) = -e^{-\lambda}(1 + \lambda) + 1$, $\lambda > 0$.

iii. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (-e^{-\lambda}(1 + \lambda) + 1) = 1$, γιατί

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda}(1 + \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1 + \lambda}{e^\lambda} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0$.

104. α) Έστω ότι $f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_v \neq 0$, τότε

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_v x^v}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_v x^{v-2}$.

Αν $v > 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{v-2} = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \alpha_v > 0 \\ -\infty & \text{αν } \alpha_v < 0 \end{cases}$ που

απορρίπτεται. Αν $v = 0$ ή 1 τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \neq 1$ απορρίπτεται. Άρα $v = 2$,

οπότε $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Έστω $\frac{f(x)}{x-1} = g(x)$, $x \neq 1$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$. Τότε $f(x) = g(x)(x-1) \Leftrightarrow$

$x^2 + \beta x + \gamma = g(x)(x-1)$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \beta x + \gamma) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x-1) \Leftrightarrow$

$1 + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\beta - 1$. Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \beta x - \beta - 1}{x-1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1) + \beta(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1+\beta)}{\cancel{x-1}} = 2 + \beta. \text{ Είναι}$$

$$2 + \beta = -1 \Leftrightarrow \beta = -3 \text{ και } \gamma = -(-3) - 1 = 2, \text{ οπότε } f(x) = x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

β) Έστω $N(x, f(x))$ σημείο της C_f . Η απόσταση του N από την ευθεία ε:

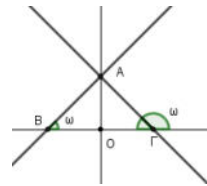
$$y = -x \Leftrightarrow x + y = 0 \text{ είναι } d(N, \varepsilon) = \frac{|x + f(x)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |x^2 - 2x + 2|$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x + 2$ έχει $\Delta = -4 < 0$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$x^2 - 2x + 2 > 0, \text{ οπότε } d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^2 - 2x + 2), x \in \mathbb{R}. \text{ Η } d \text{ είναι παραγωγίσιμη}$$

στο $\mathbb{R}$ με $d'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (2x - 2)$. Για κάθε $x < 1$ είναι

$d'(x) < 0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 1$ είναι $d'(x) > 0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για $x = 1$, τότε $N(1, 0)$.



γ) Έστω $K(x_0, f(x_0))$. Επειδή το τρίγωνο που σχηματίζει η εφαπτομένη στο K με τους άξονες είναι ορθογώνιο, όταν θα είναι και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του θα είναι 45° . Τότε η γωνία κλίσης της εφαπτομένης θα είναι 45° ή 135° .

Άρα $(\lambda = f'(x_0) = \tan 45^\circ = 1)$ ή $(\lambda = f'(x_0) = \tan 135^\circ = -1)$

$$\text{Είναι } f'(x) = 2x - 3, \text{ άρα } f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = 1 \Leftrightarrow 2x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ ή}$$

$$f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1. \text{ Οι ζητούμενες εφαπτομένες}$$

$$\text{είναι οι ευθείες } \varepsilon_1: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 2 \text{ και}$$

$$\varepsilon_2: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

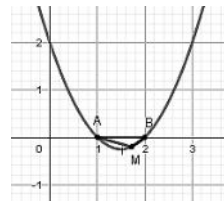
δ) Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της C_f με $1 < x < 2$.

Το τρίγωνο MAB έχει εμβαδό

$$E = \frac{1}{2} (AB) d(M, \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |f(x)| = \frac{1}{2} (-x^2 + 3x - 2).$$

Έστω $E(x) = \frac{1}{2} (-x^2 + 3x - 2), x \in (1, 2)$. Είναι

$$E'(x) = \frac{1}{2} (-2x + 3).$$



$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-2x+3) \geq 0 \Leftrightarrow -2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Για κάθε $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ είναι $E'(x) > 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $\left(1, \frac{3}{2}\right]$,

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ είναι

$E'(x) < 0$ και επειδή η E είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα

στο διάστημα αυτό. Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο για $x = \frac{3}{2}$, τότε

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4}, \text{ άρα } M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

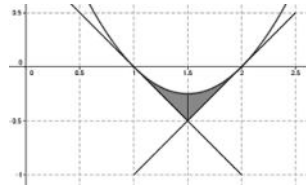
ε) Επειδή το εμβαδόν περικλείεται από 3 συναρτήσεις χρειάζεται σχήμα.

Η f είναι μία παραβολή με κορυφή το $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

και ρίζες το 1 και το 2. Είναι $f''(x) = 2 > 0$ για

κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Οι δύο ευθείες

τέμνονται στο $M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :



$$E = \int_1^{\frac{3}{2}} |f(x) + x - 1| dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 |f(x) - x + 2| dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (f(x) + x - 1) dx +$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^2 (f(x) - x + 2) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (x^2 - 2x + 1) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (x-1)^2 dx +$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^2 (x-2)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \text{ τ.μ.}$$

105.α) $f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} + 2e^x$ (1). Από τη σχέση (1) έχουμε ισοδύναμα :

$$f^2(x) - 2f(x) = e^{2x} + 2e^x \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = e^{2x} + 2e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - 1)^2 = (e^x + 1)^2 \Leftrightarrow |f(x) - 1| = e^x + 1 \quad (2).$$

Όμως $e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow |f(x) - 1| > 0 \Leftrightarrow f(x) - 1 \neq 0$, η συνάρτηση $k(x) = f(x) - 1$ είναι συνεχής οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Από τη σχέση (2) έχουμε $|f(x) - 1| = e^x + 1 \Leftrightarrow |k(x)| = e^x + 1 \Leftrightarrow (k(x) = e^x + 1) \text{ ή } (k(x) = -e^x - 1)$

Επειδή $k(0) = f(0) - 1 = 2 > 0$, ο τύπος της k είναι

$$k(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x + 3, x \in \mathbb{R}.$$

β) $h(f(x)) = 3x - 5, x \in \mathbb{R}$ (3).

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow e^x + 3 = y \Leftrightarrow e^x = y - 3 \Leftrightarrow x = \ln(y - 3)$.

Από τη σχέση (3) έχουμε ισοδύναμα :

$$h(f(x)) = 3x - 5 \Leftrightarrow h(y) = 3 \ln(y - 3) - 5, y > 3 \text{ οπότε :}$$

$$h(x) = 3 \ln(x - 3) - 5, x > 3.$$

γ) $f(g(x)) = e^{x^2+1} + 3, x \in \mathbb{R}$..Από τον τύπο της f έχουμε

$$f(g(x)) = e^{g(x)} + 3 \Leftrightarrow e^{x^2+1} + 3 = e^{g(x)} + 3 \Leftrightarrow e^{x^2+1} = e^{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $m(x) = f(x) - g(x) = e^x + 3 - x^2 - 1 = e^x - x^2 + 2$.

Η m είναι παραγωγίσιμη , με παράγωγο $m'(x) = e^x - 2x$ και δύο φορές

παραγωγίσιμη , με δευτερή παράγωγο $m''(x) = e^x - 2$.

Έχουμε $m''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$.

Η m' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $m'(x) > 0$ στο $(\ln 2, +\infty)$, $m'(x) < 0$ στο $(-\infty, \ln 2)$

άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \ln 2]$

οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο $\ln 2$, το

$$m'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) = 2 \ln \frac{e}{2} > 2 \ln 1 = 0.$$

Επομένως $m'(x) \geq m'(\ln 2) > 0$ οπότε η m είναι γνησίως αύξουσα.

$$\text{Είναι } m(-1) = \frac{1}{e} + 1 > 0, m(-2) = \frac{1}{e^2} - 2 < 0 \text{ άρα } m(-1)m(-2) < 0,$$

επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και αφού η m γνησίως αύξουσα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $m(x_0) = 0$. Άρα έχουν

μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2, -1)$.

ε) Για $-2 \leq x \leq x_0 \xrightarrow{m'} m(x) \leq m(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.

Για $x_0 \leq x \leq -1 \xrightarrow{m'} m(x) \geq m(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_{-2}^{-1} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^{x_0} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_0}^{-1} |f(x) - g(x)| dx = \\ &= -\int_{-2}^{x_0} [f(x) - g(x)] dx + \int_{x_0}^{-1} [f(x) - g(x)] dx = -\int_{-2}^{x_0} m(x) dx + \int_{x_0}^{-1} m(x) dx = \\ &= -\int_{-2}^{x_0} (e^x - x^2 + 2) dx + \int_{x_0}^{-1} (e^x - x^2 + 2) dx = \\ &= -\left[e^x - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-2}^{x_0} + \left[e^x - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{x_0}^{-1} = -2e^{x_0} + \frac{2x_0^3}{3} - 4x_0 + \frac{1+e}{e^2} - 3. \end{aligned}$$

Επειδή $m(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = x_0^2 - 2$ έχουμε :

$$E = -2(x_0^2 - 2) + \frac{2x_0^3}{3} - 4x_0 + \frac{1+e}{e^2} - 3 = \frac{2}{3}x_0^3 - 2x_0^2 - 4x_0 + \frac{1+e}{e^2} + 1.$$

106. α) Για $x=0$: $f(0) - e^{-f(0)} = -1 \Leftrightarrow e^{-f(0)} - f(0) - 1 = 0$ (1). Έστω

$$g(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow g \text{ γνιστή} \Rightarrow g(1) < g(0)$$

$$(1) \Leftrightarrow g(f(0)) = g(0) \xrightarrow{1-1} f(0) = 0.$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την σχέση

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \quad (*) \text{ έχουμε:}$$

$$f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) (1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \quad (2).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη από τη (2) προκύπτει ότι και η f' είναι

$$\text{παραγωγίσιμη με } f''(x) = -\frac{(1 + e^{-f(x)})'}{(1 + e^{-f(x)})^2} = \frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} > 0 \text{ αφού η } f'(x) > 0$$

οπότε η f κυρτή άρα η f' γνησίως αύξουσα. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f

$$\text{στο } [0, x], \text{ οπότε υπάρχει } \xi \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

Είναι $0 < \xi < x$ οπότε

$$f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \quad (3)$$

Επίσης $f'(x) = \frac{1}{1+e^{-f(x)}} < 1$ οπότε για $x > 0$ θα είναι $xf'(x) < x$ (4).

Άρα από (3) και (4) έχουμε $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$.

γ) Είναι $\frac{x}{2} < f(x) < x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ άρα από κριτήριο

παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ακόμη επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ είναι και

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα έχει

σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x) = 1821$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{f(x)}} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{1}{e^u} = 0$. Από τη σχέση (*) έχουμε:

$f(x) - (x-1) = e^{-f(x)}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = 0$ άρα η

$y = x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ε) Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$. Είναι $h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow h \nearrow (0, +\infty)$

Είναι $2 \leq t \leq 3 \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(2) \leq h(t) \leq h(3) \Rightarrow \int_2^3 h(2) dt < \int_2^3 h(t) dt < \int_2^3 h(3) dt$ (5).

Είναι $3 \leq t \leq 4 \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(3) \leq h(t) \leq h(4) \Rightarrow \int_3^4 h(3) dt < \int_3^4 h(t) dt < \int_3^4 h(4) dt \Leftrightarrow$
 $h(3) < \int_3^4 h(t) dt \leq h(4)$ (6).

(Οι ανισότητες $h(2) \leq h(t) \leq h(3)$, $h(3) \leq h(t) \leq h(4)$ ισχύουν μόνο για

$x = 2, 3, 4$). Από (5), (6) $\Rightarrow \int_2^3 h(t) dt < \int_3^4 h(t) dt \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{f(t)}{t} dt < \int_3^4 \frac{f(t)}{t} dt$

στ) Για κάθε $0 \leq x \leq 1 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$, οπότε $E = \int_0^1 f(x) dx$

Από την ανισότητα που αποδείξαμε στο β) έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx < \int_0^1 x dx \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx < \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E < \frac{1}{2} \quad (7)$$

Είναι $E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{f(1)}{2}$ (8).

Από το β σκέλος για $x = 1$ προκύπτει $\frac{1}{2} < f(1) < f'(1) < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{f(1)}{2} < \frac{1}{2}$ (9),

οπότε από (7), (8), (9) $\Rightarrow \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) < \frac{1}{2}$.

$$107. \alpha) \int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt + 2 \int_0^x t f'(t) dt + \int_0^2 x t f(x) dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt + 2 \int_0^x t f'(t) dt + x f(x) \int_0^2 t dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \left[(t^2 + 1) f''(t) + 2 t f'(t) \right] dt + x f(x) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \left[(t^2 + 1) f'(t) \right]' dt + 2 x f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(t^2 + 1) f'(t) \right]_0^x + 2 x f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1) f'(x) - 2 + 2 x f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(x^2 + 1) f(x) - 2x \right]' = 2 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1) f(x) = 2x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ και}$$

$$(x^2 + 1) f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) \text{ Είναι } |h(x) + x - 3| \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq h(x) + x - 3 \leq |f(x)|.$$

Ομως $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-|f(x)|)$, οπότε από το κριτήριο

παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) + x - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - (-x + 3)) = 0$.

Άρα η ευθεία $y = -x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

$\gamma)$ Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E = \int_0^3 |h(x) - (-x + 3)| dx$.

Είναι $|h(x) + x - 3| \leq |f(x)|$, άρα και $\int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \leq \int_0^3 |f(x)| dx$.

Ομως $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$, άρα

$$\int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \leq \int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^3 = \ln 10.$$

$$108. \alpha) \text{ Είναι } f(g(x)) \geq g(x) \Leftrightarrow f(g(x)) - g(x) \geq 0 \quad (1)$$

Έστω $h(x) = f(g(x)) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $h(3) = 0$, οπότε η (1) γίνεται: $h(x) \geq h(3)$. Δηλαδή η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο

$x_0 = 3$. Επειδή το $x_0 = 3$ είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της h , η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f'(g(x))g'(x) - g'(x)$ άρα είναι παραγωγίσιμη στο 3, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Fermat είναι: $h'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(g(3))g'(3) - g'(3) = 0 \Leftrightarrow g'(3)[f'(0) - 1] = 0$ (2). Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$ είναι $g'(3) \neq 0$ οπότε η (2) γίνεται: $f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $\frac{f(1821)}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2) + x-1 = 0$.

Έστω $g(x) = f(1821)(x-2) + x-1$, $x \in [1, 2]$. Είναι $g(1) = -f(1821)$ και $g(2) = f(1821)(2-2) + 2-1 = 1 > 0$. Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$, είναι $f'(x) \neq 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f'(0) = 1 > 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $1821 > 0$, είναι $f(1821) > f(0) = 0$, άρα $g(1) < 0$ οπότε $g(1)g(2) < 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2) + x-1 = 0$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$, άρα η εξίσωση $\frac{f(1821)}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

γ) Για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) = 0$. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες και την ευθεία $x = 1$ είναι $E = \int_0^1 f(x) dx$, άρα $\int_0^1 f(x) dx = 1821$. Έστω F αρχική της f στο $[0, 1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f(\xi) = \int_0^1 f(t) dt \Leftrightarrow f(\xi) = 1821.$$

Είναι $0 < \xi < 1$ και f γνησίως αύξουσα, άρα $f(\xi) < f(1) \Leftrightarrow 1821 < f(1)$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 0$ ενώ για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$. Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$ και $f'(x) > 0$, είναι και $g'(x) > 0$, άρα g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x > 3$ είναι $g(x) > g(3) = 0$, ενώ για κάθε $x < 3$ είναι $g(x) < g(3) = 0$.

ε) Έστω $\int_0^3 2xg(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$ (3), τότε από τη σχέση

$\int_0^3 2xg(x)dx + x + 6 = g(x)$, έχουμε: $\lambda + x + 6 = g(x)$. Η σχέση (3) γίνεται:

$$\int_0^3 2x(\lambda + x + 6)dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^3 (2\lambda x + 2x^2 + 12x)dx = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\left[\lambda x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^3 = \lambda \Leftrightarrow 9\lambda + 18 + 54 = \lambda \Leftrightarrow 8\lambda = -72 \Leftrightarrow \lambda = -9. \text{ Τότε}$$

$$g(x) = -9 + x + 6 = x - 3.$$

109. α) i) Για να ορίζεται η f πρέπει $\beta + x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq -\beta \Leftrightarrow x \geq -\sqrt[3]{-\beta} \Leftrightarrow$

$x \geq -\sqrt[3]{\beta}$ άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $[-\sqrt[3]{\beta}, +\infty)$. Από τον τύπο της h βλέπουμε ότι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f είναι το διάστημα $[-1, 0]$ άρα πρέπει $-\sqrt[3]{\beta} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\beta} \geq 1 \Leftrightarrow \beta \geq 1$.

ii) Είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - \beta + 1 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) = \beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \beta$ (1)

Το $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα $0 \leq \sigma\upsilon\nu\gamma \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \beta \leq 1$. Άρα $\beta = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = 1 \Leftrightarrow \gamma = 0$.

Αφού η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Rolle στο $[-1, 0]$, τότε

$$f(-1) = f(0) \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \sqrt{1 - 1} = \alpha^2 \sqrt{1} \Leftrightarrow \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ Άρα}$$

$$f(x) = x^2 \sqrt{1 + x^3}, x \geq 1, g(x) = \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}, x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sqrt{1 + x^3}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \eta\mu x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

β) Η h είναι παραγωγίσμη στο $(-1, 0)$ με παράγωγο:

$$h'(x) = 2x\sqrt{1+x^3} + \frac{x^2 \cdot 3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = \frac{4x(1+x^3) + 3x^4}{2\sqrt{1+x^3}} = \frac{7x^4 + 4x}{2\sqrt{1+x^3}} = \frac{x(7x^3 + 4)}{2\sqrt{1+x^3}}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{h(x) - h(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{h(x)}{x + 1} = +\infty \text{ γιατί}$$

1ος τρόπος: Είναι $L = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{h(x)}{x + 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x(7x^3 + 4)}{2\sqrt{1+x^3}} = +\infty$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} [x(7x^3 + 4)] = 3, \lim_{x \rightarrow -1^+} [2\sqrt{1+x^3}] = 0 \text{ και } 2\sqrt{1+x^3} \geq 0.$$

2^{ος} τρόπος: Είναι

$$L = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{h(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x^3}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} \sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}^3} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1-x+x^2}}{\sqrt{1+x}} = +\infty \text{ αφού}$$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} [x^2 \sqrt{1-x+x^2}] = 3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{1+x} = 0$ και $\sqrt{1+x} \geq 0$. Επίσης σπάσαμε την ρίζα γιατί για x κοντά -1 από μεγαλύτερες τιμές είναι $1+x > 0$ και $1-x+x^2 > 0$. Άρα η h δεν είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 0]$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^{\frac{2}{3}} \sqrt{1+x^3}}{x} \neq 0$ άρα η h είναι

παραγωγίσιμη στο $(-1, 0]$.

γ) Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο:

$$g'(x) = \sin x \cdot e^{\sin x} + \eta \mu x \cdot e^{\sin x} (-\eta \mu x) = \sin x \cdot e^{\sin x} - \eta \mu^2 x \cdot e^{\sin x} =$$

$$e^{\sin x} (\sin x - \eta \mu^2 x). \text{ Έστω η συνάρτηση } k(x) = \sin x - \eta \mu^2 x, x \in [0, \pi].$$

Η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $k'(x) = -\eta \mu x (1 + 2 \sin x)$ και ισχύει

$g'(x) = e^{\sin x} k(x)$ επομένως: Η g' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με παράγωγο: $g''(x) = -\eta \mu x \cdot e^{\sin x} \cdot k(x) + e^{\sin x} \cdot k'(x) =$

$$-\eta \mu x \cdot e^{\sin x} \cdot k(x) - e^{\sin x} \cdot \eta \mu x (1 + 2 \sin x) =$$

$$= -\eta \mu x \cdot e^{\sin x} (k(x) + 2 \sin x + 1) = -\eta \mu x \cdot e^{\sin x} (\sin x - \eta \mu^2 x + 2 \sin x + 1) =$$

$$= -\eta \mu x \cdot e^{\sin x} (\cancel{1} + \sin^2 x + 3 \sin x + \cancel{1}) = -\eta \mu x \cdot \sin x \cdot e^{\sin x} (\sin x + 3)$$

Είναι $-\eta \mu x < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$, $\sin x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$\sin x < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $e^{\sin x} > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$ και

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 2 \leq \sin x + 3 \leq 4 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi).$$

Άρα $-\eta \mu x \cdot e^{\sin x} (\sin x + 3) < 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Επομένως $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

άρα g' γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

δ) Αφού $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $g''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

τότε η g είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Η g παρουσιάζει καμπή

για $x = \frac{\pi}{2}$. Επομένως η εφαπτομένη στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ διαπερνά την γραφική

παράσταση της h . Η εφαπτομένη στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$ έχει εξίσωση:

$$y - g\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y - 1 = -x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = -x + \frac{\pi+2}{2}$$

$$2\eta\mu x \cdot e^{\sin x} + 2x = \pi + 2 \Leftrightarrow \eta\mu x \cdot e^{\sin x} = -x + \frac{\pi+2}{2} \Leftrightarrow g(x) = -x + \frac{\pi+2}{2} \quad (1)$$

Η g είναι κοίλη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ άρα $g(x) \leq -x + \frac{\pi+2}{2}$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με την

ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{\pi}{2}$. Η g είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ άρα

$$g(x) \geq -x + \frac{\pi+2}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνον για}$$

$$x = \frac{\pi}{2}. \text{ Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα στο } [0, \pi] \text{ την } x = \frac{\pi}{2}.$$

ε) Η h' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $h'(x) = g'(x) = e^{\sin x} k(x)$.

Η k είναι συνεχής και $k(0)k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1(-1) = -1 < 0$ άρα από το θεώρημα

Bolzano υπάρχει $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$k(x_1) = 0 \Leftrightarrow e^{\sin x_1} k(x_1) = 0 \Leftrightarrow g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow h'(x_1) = 0.$$

Επειδή η h' γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ το x_1 είναι μοναδικό.

στ) Για $-1 < x < 0$ είναι $h'(x) = \frac{x(7x^3 + 4)}{2\sqrt{1+x^3}}$. Είναι $7x^3 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 7x^3 \geq -4 \Leftrightarrow$

$$x^3 \geq -\frac{4}{7} \Leftrightarrow x \geq -\sqrt[3]{\frac{4}{7}} \text{ με } -\sqrt[3]{\frac{4}{7}} > -1 \left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}} > -1 \Leftrightarrow \frac{4}{7} < 1 \text{ ισχύει} \right)$$

Άρα $x(7x^3 + 4) > 0$ για κάθε $x \in \left(-1, -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$ και $x(7x^3 + 4) < 0$ για κάθε

$x \in \left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}, 0\right)$ και $2\sqrt{1+x^3} > 0$ για κάθε $x \in (-1, 0)$. Για $0 < x < \pi$ είναι

$h'(x) = e^{\sin x} k(x)$ και από γ) ερώτημα έχουμε: Για $0 < x < x_1 \Rightarrow h'(x) >$

$h'(x_1) = 0$, $x_1 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow h'(x) < h'(x_1) = 0$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Leftrightarrow h'\left(\frac{\pi}{2}\right) <$

$h'(x) < h'(\pi) \Leftrightarrow -1 < h'(x) < -\frac{1}{e}$. Η h είναι συνεχής σε καθένα από τα

διαστήματα $[-1, 0)$ και $(0, \pi]$. Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ και $h(0) = f(0) = 0$ άρα η h είναι συνεχής στο

μηδέν. Άρα η h είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$.

Επομένως $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(-1, -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right) \cup (0, x_1)$, $h'(x) < 0$ για

$x \in \left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}, 0\right) \cup \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα $h \nearrow \left[-1, -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right]$, $h \searrow \left[-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}, 0\right]$,

$h \nearrow (0, x_1]$ και $h \searrow [x_1, \pi]$ ως συνεχής. Η h παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για

$x = -\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$ το $h\left(-\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$, για $x = x_1$ το $h(x_1)$ και τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ το

$h(-1) = 0$, για $x = 0$ το $h(0) = 0$ και για $x = \pi$ το $h(\pi) = 0$.

ζ) Έχουμε ολικό ελάχιστο $h(-1) = h(0) = h(\pi) = 0$ άρα είναι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 0]$ με την ισότητα να ισχύει για $x = -1$ ή $x = 0$ ή $x = \pi$. Άρα το

ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\Omega) = \int_{-1}^{\pi} |h(x)| dx = \int_{-1}^{\pi} h(x) dx =$

$\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} g(x) dx = I_1 + \int_0^{\pi} g(x) dx = I_1 + \int_0^{\pi} \eta \mu x \cdot e^{\sin x} dx = I_1 -$

$\left[e^{\sin x}\right]_0^{\pi} = \frac{e-4+4e^2}{4e}$ γιατί $I_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$

1ος τρόπος: Θέτουμε $1+x^3 = u \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 0]$ με $3x^2 dx = du$. Για $x = -1$ είναι $u = 0$ και για $x = 0$ είναι $u = 1$. Άρα

$$I_1 = \int_{-1}^0 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 \sqrt[3]{1+x^3} 3x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt[3]{u} du = \frac{1}{3} \int_0^1 u^{\frac{1}{3}} du = \frac{1}{\frac{4}{3}} \left[\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

2^{ος} τρόπος: Θέτουμε $\sqrt[3]{1+x^3} = u \Leftrightarrow 1+x^3 = u^3 \Leftrightarrow x^3 = u^3 - 1$ με
 $3x^2 dx = 3u^2 du \Leftrightarrow x^2 dx = u^2 du$. Για $x = -1$ είναι $u = 0$ και για $x = 0$ είναι
 $u = 1$. Άρα $I_1 = \int_{-1}^0 x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx = \int_0^1 u \cdot u^2 du = \int_0^1 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Είναι $f(x) = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4, x \geq 1$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $f'(x) = 2(x-1) \geq 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ οπότε η f είναι 1-1 και θα αντιστρέφεται. Είναι

$E(\Omega) = \int_4^5 |f^{-1}(x)| dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$. Για $x = 4$ είναι $f(u) = 4 = f(1) \Leftrightarrow u_1 = 1$, ενώ για $x = 5$ είναι $f(u) = 5 = f(0) \Leftrightarrow u_2 = 0$. Οπότε

$$E(\Omega) = \int_1^0 |u| f'(u) du = \int_1^0 u(2u-2) du = \int_0^1 (2u-2u^2) du = \left[u^2 \right]_0^1 - 2 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Σωστή απάντηση Β.

2. Είναι $E(\Omega) = \int_1^e \left| \frac{x^2 + x + 4}{x} - x - 1 \right| dx = \int_1^e \left| \frac{4}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{4}{x} dx = 4 [\ln x]_1^e = 4$.

Σωστή απάντηση Γ.

3. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $f(5) = 2, f'(5) = \frac{1}{4}$ άρα η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 5$ είναι

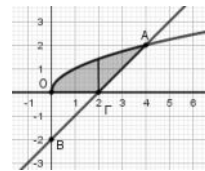
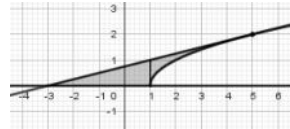
$$y - f(5) = f'(5)(x - 5) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 5) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}.$$

$$E(\Omega) = \int_{-3}^1 \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \right) dx + \int_1^5 \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - \sqrt{x-1} \right) dx =$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^1 + \frac{3}{4} [x]_{-3}^1 - \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^5 = \frac{1}{4}(-4) +$$

$$3 + \frac{1}{4}12 + 3 - \frac{2}{3} \left[\sqrt{(x-1)^3} \right]_1^5 = \frac{8}{3}. \text{ Σωστή απάντηση Δ.}$$

4. Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$



$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ απορρίπτεται ή $x = 4$. Είναι $f(4) = 2$ οπότε οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(4, 2)$. Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$$E(\Omega) = \int_0^4 [\sqrt{x} - (x-2)] dx -$$

$$(OB\Gamma) = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 + 2[x]_0^4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_0^4 - 8 + 8 - 2 = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}.$$

Σωστή απάντηση Α.

$$5. \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{x} 2\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{2(x-1) + \ln x}{4x\sqrt{x}}.$$

Για κάθε $x \in (1, 4)$ είναι $x-1 > 0$, $\ln x > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 4]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(4) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 2 - \frac{\ln 4}{4}$, άρα $f(x) > 0$ για

κάθε $x \in [1, 4]$. Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με

$$E(\Omega) = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_1^4 \ln x (\sqrt{x})' dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4 - [\sqrt{x} \cdot \ln x]_1^4 + \int_1^4 \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} [x\sqrt{x}]_1^4 - 2\ln 4 + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{2}{3} \cdot 7 - 2\ln 2^2 + [2\sqrt{x}]_1^4 = \frac{20}{3} - 4\ln 2. \text{ Σωστή απάντηση Β.}$$

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό ή Λάθος»

1. Σ	2. Λ	3. Λ	4. Λ	5. Σ	6. Λ	7. Λ	8. Σ

41.

Διαγωνίσματα στα Ολοκληρώματα

1ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

A1. Θεωρία

A2. α) Η πρόταση είναι λανθασμένη

β) Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

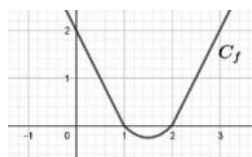
$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b [0 - g(x)] dx = -\int_a^b g(x) dx.$$

A3. Αρχική ή παράγουσα μιας συνάρτησης f στο Δ ονομάζεται κάθε παραγωγίσιμη στο Δ συνάρτηση F για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$.

A4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

B1. Η συνάρτηση f αποτελείται από δύο ημιευθείες και ένα τμήμα παραβολής, οπότε η γραφική της παράσταση είναι η εξής :

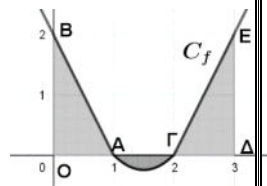


B2. $f(x) \leq 0$ στο $[1, 2]$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν E είναι :

$$E = -\int_1^2 f(x) dx = -\int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^2 \Leftrightarrow$$

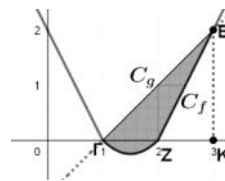
$$E = -\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{6}.$$

B3. Το εμβαδόν E_1 του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$ και $x=3$ είναι ίσο με το άθροισμα αποτελείται το εμβαδόν E του ερωτήματος β) και τα εμβαδά των ορθογωνίων τριγώνων OAB και $\Gamma\Delta E$. Άρα



$$E_1 = (OAB) + E + (\Gamma\Delta E) = \frac{OA \cdot OB}{2} + \frac{1}{6} + \frac{\Gamma\Delta \cdot \Delta E}{2} = \frac{13}{6}$$

B4. Το εμβαδόν E του χωρίου Ω_2 που περικλείεται από τη C_f , την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$ και τις ευθείες $x=1, x=3$ αποτελείται από το εμβαδόν E του ερωτήματος β) και το εμβαδόν του τριγώνου ΓZE .



$$\text{Άρα } E_1 = E + (\Gamma ZE) = \frac{1}{6} + \frac{\Gamma Z \cdot EK}{2} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6} = 7E.$$

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$. Έχουμε

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \geq 0 \stackrel{2x\sqrt{x} > 0}{\Leftrightarrow} 2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e^2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[e^2, +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στο e^2 , το $f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$.

Γ2. Η f' είναι παραγωγίσιμη με τύπο

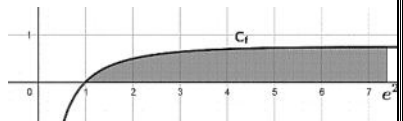
$$f''(x) = \frac{-2\sqrt{x} - (2 - \ln x)3\sqrt{x}}{4x^3} = \frac{-8 + 3\ln x}{4x^2\sqrt{x}}.$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-8 + 3\ln x}{4x^2\sqrt{x}} \geq 0 \stackrel{4x^2\sqrt{x} > 0}{\Leftrightarrow} -8 + 3\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{8}{3} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{8}{3}} = e^2 \sqrt[3]{e^2}$$

οπότε η f είναι κοίλη στο $(0, e^2 \sqrt[3]{e^2})$, κυρτή στο $[e^2 \sqrt[3]{e^2}, +\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $(e^2 \sqrt[3]{e^2}, f(e^2 \sqrt[3]{e^2})) \equiv (e^2 \sqrt[3]{e^2}, \frac{8}{3e^3 \sqrt[3]{e}})$.

Γ3. Για $x \geq 1$ έχουμε

$\ln x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$, οπότε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' , την ευθεία $x = 1$ και την ευθεία $x = e^2$ είναι ίσο με :



$$E(\Omega) = \int_1^{e^2} f(x) dx = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{e^2} (2\sqrt{x})' \ln x dx \Leftrightarrow$$

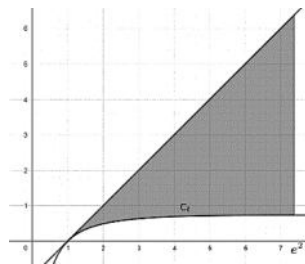
$$E(\Omega) = [2\sqrt{x} \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x} \frac{1}{x} dx = 4e - 2 \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = 4e - 2[2\sqrt{x}]_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4.$$

Γ4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο 1 έχει εξίσωση :

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Για $x \in [1, e^2]$ η f είναι κοίλη οπότε βρίσκεται κάτω από την (ε) εκτός από το σημείο επαφής. Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν



$$E(\Omega_1) = \int_1^{e^2} (x - 1 - f(x)) dx = \int_1^{e^2} (x - 1) dx - \int_1^{e^2} f(x) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^{e^2} - E(\Omega) \Leftrightarrow E(\Omega_1) = \frac{e^4 - 2e^2 - 7}{2}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Για την συνάρτηση F ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $[1,2], [2,3]$ άρα

$$\text{υπάρχουν } \theta_1 \in (1,2), \theta_2 \in (2,3) \text{ τέτοια ώστε: } F'(\theta_1) = \frac{F(2)-F(1)}{2-1} \Leftrightarrow$$

$$f(\theta_1) = F(2)-F(1), F'(\theta_2) = \frac{F(3)-F(2)}{3-2} \Leftrightarrow f(\theta_2) = F(3)-F(2).$$

Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε:

$$\theta_1 < \theta_2 \Leftrightarrow f(\theta_1) > f(\theta_2) \Leftrightarrow F(2)-F(1) > F(3)-F(2) \Leftrightarrow 2F(2) > F(1)+F(3)$$

άτοπο από τη σχέση που μας δίνεται, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. $\int_a^{a+1} f(x)dx < \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx \Leftrightarrow F(a+1)-F(a) < F(a+2)-F(a+1)$. Για την

συνάρτηση F ισχύει το ΘΜΤ στα διαστήματα $[a, a+1], [a+1, a+2]$ άρα

υπάρχουν $x_1 \in (a, a+1), x_2 \in (a+1, a+2)$ τέτοια ώστε:

$$F'(x_1) = \frac{F(a+1)-F(a)}{a+1-a} \Leftrightarrow f(x_1) = F(a+1)-F(a),$$

$$F'(x_2) = \frac{F(a+2)-F(a+1)}{a+2-a-1} \Leftrightarrow f(x_2) = F(a+2)-F(a+1).$$

Έχουμε: $x_1 < x_2 \xrightarrow{f'} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow F(a+1)-F(a) < F(a+2)-F(a+1)$.

Δ3. α) Το 1 είναι μέγιστο της G , εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, η G είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Fermat και $G'(1) = F(1) = 0$. Επίσης :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(3h)-G(2h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(3h)-G(0)+G(0)-G(2h)}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(3h)-G(0)}{h} - \frac{G(2h)-G(0)}{h} = 0 \Leftrightarrow 3G'(0)-2G'(0) = 0 \Leftrightarrow G'(0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$F(0) = 0.$$

β) Για την συνάρτηση F ισχύει το ΘΜΤ στο διάστημα $[0, x]$ άρα υπάρχει

$$\xi \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε: } F'(\xi) = \frac{F(x)-F(0)}{x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(x)}{x}. \text{ Έχουμε:}$$

$$\xi < x \xrightarrow{f'} f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{x} < f(x) \Leftrightarrow F(x) < xf(x) \Leftrightarrow x \cdot f(x) - F(x) > 0.$$

γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με τύπο

$$g'(x) = \frac{x F'(x) - F(x)}{x^2} = \frac{x f(x) - F(x)}{x^2}.$$

Όμως $x \cdot f(x) - F(x) > 0$ από το α) άρα $g'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$ οπότε η g είναι

γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ4. Από το ερώτημα Δ3.β) έχουμε $x \cdot f(x) - F(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot f(x) > F(x)$

$$\text{οπότε } \int_1^2 xf(x)dx > \int_1^2 F(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx > \int_1^2 x'F(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 xf(x)dx > [xF(x)]_1^2 - \int_1^2 xF'(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx > 2F(2) - \int_1^2 xf(x)dx \Leftrightarrow$$

$$2\int_1^2 xf(x)dx > 2F(2) \Leftrightarrow \int_1^2 xf(x)dx > F(2).$$

2ο Διαγώνισμα

Θέμα Α

A1. Θεωρία

A2. α) Η πρόταση είναι σωστή **β)** Ισχύει όταν f, g είναι σταθερές συναρτήσεις.

A3. Θεωρία

A4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

B1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = [-1, +\infty)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο

$$\text{πεδίο ορισμού της με } f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2x+2+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}.$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow 3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}. \text{ Η } f \text{ είναι}$$

συνεχής στο πεδίο ορισμού της οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$,

γνησίως φθίνουσα στο $\left[-1, -\frac{2}{3}\right]$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $-\frac{2}{3}$, το

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{2}{3}+1} = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \text{ και τοπικό μέγιστο το } f(-1) = 0.$$

$$\text{B2. Είναι } f''(x) = \frac{3x+4}{4(\sqrt{x+1})^3} > 0 \text{ για } x \geq -1.$$

Άρα η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

B3. Για $x \in [-1, 0]$: $f(x) \leq 0$ αφού $x \leq 0$ και $\sqrt{x+1} \geq 0$. Άρα το ζητούμενο

$$\text{εμβαδόν είναι ίσο με : } E(\Omega) = -\int_{-1}^0 f(x)dx = -\int_{-1}^0 x\sqrt{x+1}dx. \text{ Θέτουμε}$$

$u = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = u^2 - 1$ οπότε $dx = 2udu$. Για $x = -1$ έχουμε $u = 0$ και για $x = 0$ έχουμε $u = 1$, οπότε :

$$E(\Omega) = -\int_0^1 2u^2(u^2-1)udu = -\int_0^1 (2u^4-2u^2)dx = -\left[\frac{2u^5}{5}-2\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

$$\text{B4. } I = \int_{\ln 3}^{3\ln 2} e^x f(e^x)dx = \int_{\ln 3}^{\ln 8} e^{2x} \sqrt{e^x+1}dx. \text{ Θέτουμε } h = \sqrt{e^x+1} \Leftrightarrow e^x = h^2-1$$

οπότε $2h dh = e^x dx$. Για $x = \ln 3$ έχουμε $h = 2$ και για $x = \ln 8$ έχουμε $h = 3$,
 οπότε: $I = \int_2^3 (h^2 - 1)h \cdot 2h dh \Leftrightarrow I = 2 \int_2^3 (h^4 - h^2) dh \Leftrightarrow I = 2 \left[\frac{h^5}{5} - \frac{h^3}{3} \right]_2^3 = \frac{1076}{15}$.

Θέμα Γ

Γ1. α) Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta, \alpha \neq 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{x \eta \mu \frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot x \eta \mu \frac{1}{x}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot x \eta \mu \frac{1}{x} = 0.$$

$$\left(\left| x \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x| \right). \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0 \text{ οπότε από το}$$

κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0} x \eta \mu \frac{1}{x} = 0$. Όμως η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ σαν

πολυωνυμική άρα και στο 0, οπότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Leftrightarrow \delta = 0$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x^6 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{\sqrt{x^6 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} \right)}{x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^6}}} = \alpha$$

άρα $\alpha = 1$.

$$\Gamma 2. \int_{-3}^0 f(x) dx = \frac{45}{4} \Leftrightarrow \int_{-3}^0 (x^3 + \beta x^2 + \gamma x) dx = \frac{45}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + \beta \frac{x^3}{3} + \gamma \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} + 9\beta - \frac{9\gamma}{2} = \frac{45}{4} \Leftrightarrow -81 + 36\beta - 18\gamma = 45 \Leftrightarrow$$

$$36\beta - 18\gamma = 126 \Leftrightarrow 2\beta - \gamma = 7 \quad (1).$$

$$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow \int_0^1 (x^3 + \beta x^2 + \gamma x) dx = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{4} + \beta \frac{x^3}{3} + \gamma \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} = -\frac{7}{12} \Leftrightarrow 3 + 4\beta + 6\gamma = -7 \Leftrightarrow 4\beta + 6\gamma = -10 \Leftrightarrow 2\beta + 3\gamma = -5 \quad (2).$$

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από την (2) έχουμε $4\gamma = -12 \Leftrightarrow \gamma = -3$ και

$$2\beta + 3 = 7 \Leftrightarrow 2\beta = 4 \Leftrightarrow \beta = 2. \text{ Άρα } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x.$$

$$\Gamma 3. \int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \int_2^3 \frac{x}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx = \int_2^3 \frac{x}{x(x^2 + 2x - 3)} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(x+3)} dx .$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + 3A - B}{(x-1)(x+3)} .$$

$$\text{Επομένως : } \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 3A+A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ A=\frac{1}{4} \end{cases} .$$

$$\text{Άρα } \int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{1}{4} \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{4} [\ln|x-1| - \ln|x+3|]_2^3 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} .$$

$$\text{Γ4. } I = \int_0^1 \frac{f(x) \cdot \ln(x+1)}{x+3} dx = \int_0^1 \frac{(x^3 + 2x^2 - 3x) \cdot \ln(x+1)}{x+3} dx \Leftrightarrow$$

$$I = \int_0^1 \frac{(x^2 - x) \cancel{(x+3)} \cdot \ln(x+1)}{\cancel{x+3}} dx = \int_0^1 (x^2 - x) \ln(x+1) dx \Leftrightarrow$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right)' \ln(x+1) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{2x^3 - 3x^2}{x+1} dx \Leftrightarrow$$

$$I = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \ln 2 - \frac{1}{6} \int_0^1 \frac{(x+1)(2x^2 - 5x + 5) - 5}{x+1} dx \Leftrightarrow$$

$$I = -\frac{\ln 2}{6} - \frac{1}{6} \left[\frac{2x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 5x - 5 \ln(x+1) \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$I = -\frac{\ln 2}{6} - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 5 - 5 \ln 2 \right) \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{2 \ln 2}{3} - \frac{19}{36} \Leftrightarrow I = \frac{24 \ln 2 - 19}{36}$$

$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 \\ + \quad -2x^3 - 2x^2 \\ \hline -5x^2 \\ + \quad 5x^2 + 5x \\ \hline 5x \\ + \quad -5x - 5 \\ \hline -5 \end{array}$	$\begin{array}{r} x+1 \\ 2x^2 - 5x + 5 \end{array}$

Θέμα Δ

Δ1. α) Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, $f(x) \neq 0$ στο $[0, 2]$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Έχουμε $f(x) \neq 0 \Rightarrow f^2(x) > 0$. Αν $F(2) > 0$ τότε $\int_0^{F(2)} f^2(x) dx > 0$ άτοπο.

Αν $F(2) < 0$ τότε $\int_0^{F(2)} f^2(x) dx < 0$ άτοπο. Επομένως $F(2) = 0$.

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^x + x - 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $g'(x) = e^x + 1 > 0$ άρα η g είναι γνησίως μονότονη και 1-1. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει προφανή ρίζα το 0, η οποία είναι μοναδική αφού

η g είναι 1-1. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο άρα $f(x) > 0 \Leftrightarrow F'(x) > 0$ ή $f(x) < 0 \Leftrightarrow F'(x) < 0$. Άρα η F είναι γνησίως μονότονη οπότε το 2 είναι η μοναδική της ρίζα. Επομένως η εξίσωση $(e^x + x - 1)F(x)(xf(x) + F(x)) = 0$ έχει ρίζα στο $(0, 2)$ μόνο αν η παράσταση $xf(x) + F(x)$ έχει ρίζα στο $(0, 2)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = xf(x)$, η οποία είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με παράγωγο $h'(x) = F(x) + xF'(x) = F(x) + xf(x)$. Επίσης $h(0) = 0, h(2) = 2F(2) = 0$ άρα $h(0) = h(2)$, οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε: $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 f(x_0) + F(x_0) = 0$. Άρα η εξίσωση $xf(x) + F(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$, οπότε η εξίσωση

$(e^x + x - 1)F(x)(xf(x) + F(x)) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

$$\Delta 3. \alpha) \int_0^2 [f(x) - xe^x] dx \geq -1 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 xe^x dx \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx - [xe^x]_0^2 + \int_0^2 e^x dx \geq -1 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx - 2e^2 + [e^x]_0^2 \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f(x) dx - 2e^2 + e^2 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx \geq e^2 > 0. \text{ Γνωρίζουμε ότι η } f \text{ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αν } f(x) < 0 \text{ τότε } \int_0^2 f(x) dx < 0 \text{ άτοπο, άρα } f(x) > 0$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε

$$\int_0^2 f(x) dx > 0 \Leftrightarrow F(2) - F(0) > 0 \Leftrightarrow -F(0) > 0 \Leftrightarrow F(0) < 0.$$

$$\Delta 4. \text{ Έχουμε την εξίσωση } \frac{F(x)}{x} + \frac{F(x)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)F(x) + x(F(x)-1) = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $m(x) = (x-2)F(x) + x(F(x)-1)$.

Η συνάρτηση m είναι συνεχής στο $[0, 2]$, $m(0) = -2F(0) > 0, m(2) = -2 < 0$

άρα $m(0)m(2) < 0$. Επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος

Bolzano δηλαδή υπάρχει $x_1 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε

$$m(x_1) = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)F(x_1) + x_1(F(x_1) - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{F(x_1)}{x_1} + \frac{F(x_1) - 1}{x_1 - 2} = 0, \text{ άρα η}$$

εξίσωση $\frac{F(x)}{x} + \frac{F(x)-1}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

42.

Συνδυαστικά θέματα σε όλη την ύλη

Επίπεδο δυσκολίας Β Θέματος

1. α) Η f ορίζεται όταν $x > 0$ και $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$, άρα $A_f = (0, 1]$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}}. \text{ Είναι } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι}$$

συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = 0$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ άρα και 1-1, συνεπώς είναι αντιστρέψιμη. Επίσης, το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f

$$A_{f^{-1}} = f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 0], \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

γ) Αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, 1]$ η C_f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

Επίσης είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ οπότε η $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

δ) Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της οπότε

$$0 < f^{-1}(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 f^{-1}(x) \leq x^2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0, \text{ άρα από το κριτήριο}$$

παρεμβολής προκύπτει $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 f^{-1}(x)) = 0$.

ε) Είναι $f(A) = (-\infty, 0]$ οπότε $f(x) \leq 0$, άρα

$$E(\Omega) = \int_{\frac{1}{e}}^1 |f(x)| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-f(x)) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (\sqrt{1-x} - \ln x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \sqrt{1-x} dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx$$

Για το $\int_{\frac{1}{e}}^1 \sqrt{1-x} dx$ θέτουμε $1-x = u$ οπότε $dx = -du$. Για $x = 1$ είναι $u = 0$ και

για $x = \frac{1}{e}$ είναι $u = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$. Τότε

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 \sqrt{1-x} dx = -\int_{\frac{e-1}{e}}^0 \sqrt{u} du = -\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{e-1}{e}}^0 = \frac{2}{3} \left(\frac{e-1}{e} \right)^{\frac{3}{2}}, \text{ άρα}$$

$$E(\Omega) = \frac{2}{3} \left(\frac{e-1}{e} \right)^{\frac{3}{2}} - \left[x \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{2}{3} \left(\frac{e-1}{e} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} + \left[x \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{2}{3} \left(\frac{e-1}{e} \right)^{\frac{3}{2}} + 1 - \frac{2}{e}$$

2. α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σύνολο

$$A = (0,1), \text{ με } f'(x) = -\frac{1}{(1-x)} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1-x)} < 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στο $(0,1)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο A . Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) = \ln x \Leftrightarrow 1-x = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, \text{ αν}$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) > f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ οπότε } f(x) > 0, \text{ ενώ αν}$$

$$\frac{1}{2} < x < 1 \Leftrightarrow f(x) < f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\beta) \text{ Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{1-x}{x} \stackrel{\left(u = \frac{1-x}{x}\right)}{=} \lim_{\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-x}{x} = +\infty\right)} \ln u = +\infty \text{ και,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1-x}{x} \stackrel{\left(u = \frac{1-x}{x}\right)}{=} \lim_{\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{x} = 0\right)} \ln u = -\infty, \text{ άρα } f(A) = \mathbb{R} \text{ και οι}$$

ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f . Αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $A = (0,1)$ τότε η συνάρτηση f δεν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και "1-1" άρα αντιστρέψιμη,

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \ln \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow e^y = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow xe^y = 1-x \Leftrightarrow xe^y + x = 1 \Leftrightarrow$$

$$x(e^y + 1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+e^y}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \frac{1}{1+e^y}, y \in \mathbb{R}, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \frac{1}{1+e^x},$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

$$\delta) E = \int_0^1 |f^{-1}(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} \right) dx =$$

$$= \left[x - \ln(1+e^x) \right]_0^1 = \ln \frac{2e}{e+1}$$

$$3. \alpha) \text{ Είναι } \frac{1-x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1), \text{ άρα } A_f = (-1,1).$$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f'(x) = \frac{2}{x^2-1} < 0$, για κάθε $x \in (-1,1)$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$.

Αν $x \in (-1,0)$ τότε $f''(x) > 0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $(-1,0]$, ενώ αν $x \in (0,1)$ τότε $f''(x) < 0$ και f είναι κοίλη στο $[0,1)$, συνεπώς παρουσιάζει σημείο καμπής στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ άρα θα είναι " $1-1$ " και αντιστρέψιμη.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \frac{1-x}{1+x} \stackrel{u = \frac{1-x}{1+x}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{1-x}{1+x} \stackrel{u = \frac{1-x}{1+x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty, \quad f(A) = \mathbb{R}.$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln \frac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y \Leftrightarrow 1-x = e^y + xe^y \Leftrightarrow 1-e^y = (1+e^y)x \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1-e^y}{1+e^y}. \quad f^{-1}(y) = \frac{1-e^y}{1+e^y}, \quad y \in (-1,1), \quad \text{οπότε } f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}, \quad x \in (-1,1).$$

δ) Είναι $E = \int_0^1 |f^{-1}(x)| dx = \int_0^1 \frac{1-e^x-1}{e^x+1} dx$, οπότε θέτοντας

$$e^x = u \Leftrightarrow x = \ln u \quad \text{άρα } dx = \frac{du}{u}, \quad \text{Για } x=0 \Leftrightarrow u=1, \quad x=1 \Leftrightarrow u=e \quad \text{έχουμε}$$

$$E = \int_1^e \frac{u-1}{u+1} \cdot \frac{du}{u} = \int_1^e \left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \right) du \stackrel{(*)}{=} \int_1^e \left(\frac{-1}{u} + \frac{2}{u+1} \right) du =$$

$$= [-\ln u + 2 \ln(u+1)]_1^e = \left[\ln \frac{(u+1)^2}{u} \right]_1^e = \ln \frac{(e+1)^2}{e} - \ln 4 = \ln \frac{(e+1)^2}{4e}$$

$$(*) \quad \frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{(A+B)u+A}{u(u+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=2 \\ A=-1 \end{cases}$$

ε) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^x + \frac{x^2}{2} + 1, \quad x \in (-1,1),$

$$g'(x) = f'(x) - e^x + x < 0, \quad x \in (-1,1) \quad \text{εφόσον από ερώτημα (α) είναι}$$

$f'(x) < 0$, $e^x > x \Leftrightarrow x - e^x < 0$, οπότε $g \searrow$, οπότε και "1-1" στο $(-1, 1)$.
Είναι $g(0) = f(0) - 1 + 0 + 1 = 0$ και άρα η $x = 0$ μοναδική λύση της εξίσωσης,
αφού είναι ισοδύναμη με την $g(x) = 0$.

$$4. \alpha) D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3 \geq 7\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \geq 4\} \\ = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 2\} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \text{ και}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3 - 7} = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(g \circ f)(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(g \circ f)(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} + 1 \right)} = 0.$$

Οπότε η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(g \circ f)(x)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x - 3} \sqrt{x^2 - 4} \right), \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{5} > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x - 3} = -\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(g \circ f)(x)}{x - 3} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3} = +\infty \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(g \circ f)(x)}{x - 3} = +\infty. \text{ Επομένως δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(g \circ f)(x)}{x - 3}.$$

$$\delta) \text{ Είναι } \alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4}, x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \\ 4 - x^2, x \in (-2, 2) \end{cases} \text{ η οποία είναι συνεχής στο } 2$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 2^-} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x^2) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2^+} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x^2 - 4}) = 0 = \alpha(2),$$

επιπλέον η $\alpha(x)$ είναι συνεχής στα $[0, 2)$ και $(2, 4]$ ως πράξη συνεχών, άρα η $\alpha(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 4]$ οπότε η $\beta(x) = \alpha(x) \eta \mu(\pi x)$ θα είναι συνεχής στο $[0, 4]$ ως γινόμενο συνεχών.

Αν $x \in (0, 2)$ η συνάρτηση $\beta(x) = (4 - x^2) \eta \mu(\pi x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$\beta'(x) = -2x \eta \mu(\pi x) + (4 - x^2) \pi \sigma \nu(\pi x) \text{ και αν } x \in (2, 4) \text{ η συνάρτηση}$$

$$\beta(x) = \sqrt{x^2 - 4} \eta \mu(\pi x) \text{ είναι παραγωγίσιμη με}$$

$$\beta'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \eta\mu(\pi x) + \pi \sigma\upsilon\nu(\pi x) \sqrt{x^2-4} \text{ και θα εξετάσουμε αν είναι}$$

παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\beta(x) - \beta(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(4 - x^2) \eta\mu(\pi x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2) \eta\mu(\pi x)}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [-(x + 2) \eta\mu(\pi x)] = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\beta(x) - \beta(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4} \eta\mu(\pi x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x - 2} \sqrt{x + 2} \eta\mu(\pi x)}{(\sqrt{x - 2})^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x + 2} \eta\mu(\pi x)}{\sqrt{x - 2}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x + 2}} \eta\mu(\pi x) + \sqrt{x + 2} \pi \sigma\upsilon\nu(\pi x)}{\frac{1}{2\sqrt{x - 2}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x + 2}} \eta\mu(\pi x) + 2\pi \sqrt{x - 2} \sqrt{x + 2} \sigma\upsilon\nu(\pi x) \right) = 0. \text{ Άρα η συνάρτησή } \beta(x)$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $\beta'(2) = 0$. Επίσης $\beta(0) = \beta(4) = 0$, οπότε

πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle για την συνάρτηση

$\beta(x) = \alpha(x) \eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0, 4]$.

ε) Είναι $f(x) = x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega) = \int_{-1}^0 (x^2 + 3) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + 3[x]_{-1}^0 = \frac{10}{3}$$

5. α) Η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 4x|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη

συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, είναι $x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ή

$$x \geq 4, \text{ οπότε ο τύπος της } f \text{ γίνεται } f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \\ -x^2 + 4x, & x \in (0, 4) \end{cases}$$

Για $x < 0$ ή $x > 4$ η $f(x) = x^2 - 4x$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 4$. Για

$x \in (0, 4)$ η $f(x) = -x^2 + 4x$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x + 4$.

Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στα $x_1 = 0$ και $x_2 = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x - 4)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 4) = -4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(-x + 4)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 4) = 4$$

οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_1 = 0$. Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-x^2 + 4x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-x(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} (-x) = -4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 4x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x) = 4, \text{ συνεπώς η } f \text{ δεν}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_2 = 4$.

β) Για $x < 0$ ή $x > 4$ είναι $f'(x) = 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$, ενώ για $x \in (0, 4)$ έχουμε $f'(x) = -2x + 4 > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$. Επομένως, το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$2x - 4$	-				+
$-2x + 4$		+	-		
$f'(x)$	-	+	-	+	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, 4]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, 2]$ και $[4, +\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ ή $x = 4$ το $f(0) = f(4) = 0$ και τοπικό μέγιστο για $x = 2$ το $f(2) = 4$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ με σύνολο τιμών $f(A_1) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [0, +\infty)$. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [0, 2]$ με $f(A_2) = [f(0), f(2)] = [0, 4]$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3 = [2, 4]$ με $f(A_3) = [f(4), f(2)] = [0, 4]$. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_4 = [4, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A_4) = [f(4), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty)$. Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) \cup f(A_4) = [0, +\infty)$. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι το $O(0, 0)$ και $A(4, 0)$ στα οποία δεν παραγωγίζεται καθώς επίσης και το σημείο $B(2, 4)$ στο οποίο παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

δ) Έστω $M(\mu, f(\mu))$ το σημείο επαφής.

Για $x \in (0, 4)$ είναι $f(x) = -x^2 + 4x$ και $f'(x) = -2x + 4$.

Η εξίσωση εφαπτομένης στο M είναι $y - f(\mu) = f'(\mu)(x - \mu)$.

Αν $\mu \in (0, 4)$ τότε επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $E\left(2, \frac{17}{4}\right)$

$$\text{είναι } \frac{17}{4} - (-\mu^2 + 4\mu) = (-2\mu + 4)(2 - \mu) \Leftrightarrow \frac{17}{4} + \mu^2 - 4\mu = -4\mu + 2\mu^2 + 8 - 4\mu$$

$$\Leftrightarrow \mu^2 - 4\mu + \frac{15}{4} = 0 \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{2} \text{ ή } \mu = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Είναι } f'\left(\frac{3}{2}\right)f'\left(\frac{5}{2}\right) = \left(-2\frac{3}{2} + 4\right)\left(-2\frac{5}{2} + 4\right) = 1 \cdot (-1) = -1, \text{ συνεπώς οι}$$

εφαπτόμενες είναι κάθετες μεταξύ τους. Η εξίσωση εφαπτομένης στο $x = \frac{3}{2}$

$$\text{είναι } y - f\left(\frac{3}{2}\right) = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y - \frac{15}{4} = 1\left(x - \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{9}{4}, \text{ ενώ η}$$

εξίσωση εφαπτομένης στο $x = \frac{5}{2}$ είναι

$$y - f\left(\frac{5}{2}\right) = f'\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \frac{25}{4}$$

Αν $\mu \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, τότε $\frac{17}{4} - (\mu^2 - 4\mu) = (2\mu - 4)(2 - \mu) \Leftrightarrow \dots$

$$\mu^2 - 4\mu + \frac{49}{4} = 0 \text{ αδύνατη}$$

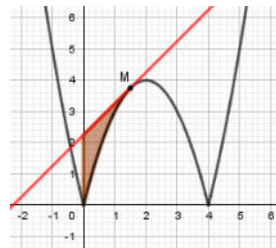
ε) Η $y = x + \frac{9}{4}$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$$M\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right) \text{ και επειδή η } f(x) = -x^2 + 4x \text{ είναι κοίλη}$$

στο $[0, 4]$ αφού $f''(x) = -2 < 0$ τότε $f(x) \leq y$ για κάθε $x \in [0, 4]$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega) = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[x + \frac{9}{4} - (-x^2 + 4x) \right] dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} \right) dx \Leftrightarrow E(\Omega) = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \left[x^2 \right]_0^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{4} \left[x \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{24}$$



6. α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2) = 1$, οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Η σχέση $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$ για $x = 0$ γίνεται: $1 \leq f(0) \leq 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Αρκεί $f(0) = 1$ (ισχύει) και $f'(0) = 0$ (η ευθεία $y = 1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 0). $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq f(x) - f(0) \leq x^2$ (1)

Αν $x < 0$, τότε η (1) γίνεται: $-x \geq \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq x$. Επειδή

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} x$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Αν $x > 0$, τότε η (1) γίνεται: $-x \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq x$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x$, λόγω του κριτηρίου παρεμβολής είναι και

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$, η f είναι

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

γ) i. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = 3x$ να έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0,1)$.

Έστω $g(x) = f(x) - 3x$, $x \in [0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Είναι $g(0) = f(0) - 3 \cdot 0 = 1 > 0$ και $g(1) = f(1) - 3$.

Για $x = 1$ είναι $1 - 1^2 \leq f(1) \leq 1 + 1^2 \Leftrightarrow 0 \leq f(1) \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq f(1) - 3 \leq -1 \Rightarrow$

$g(1) < 0$. Επειδή $g(0)g(1) < 0$, σύμφωνα με το θ. Bolzano, η εξίσωση

$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E = \int_0^1 |f(x)| dx$.

Επειδή $1 - x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $0 \leq 1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$, οπότε

$E = \int_0^1 f(x) dx$. Είναι $\int_0^1 (1 - x^2) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (1 + x^2) dx \Leftrightarrow$

$$\left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \leq E \leq \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} \leq E \leq 1 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq E \leq \frac{4}{3}.$$

7. α) Για να έχουν κοινή έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$

πρέπει $f(1) = g(1)$ και $f'(1) = g'(1)$. Είναι $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $g'(x) = 2x - 3$ οπότε

$f'(1) = -1 = g'(1)$ και $f(1) = g(1) = 1$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - f(x) = x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^3}{x}$.

$h(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^3}{x} > 0 \Leftrightarrow_{x>0} x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Επομένως η C_g βρίσκεται πάνω από τη C_f στο διάστημα $(1, +\infty)$ και κάτω στο διάστημα $(0, 1)$ και τέμνονται στο σημείο $(1, 1)$.

$$\gamma) h(x) = g(x) - f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x}, x > 0.$$

$$h'(x) = \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} \right)' = \frac{(3x^2 - 6x + 3) \cdot x - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{x^2} =$$

$$\frac{3x^3 - 6x^2 + 3x - x^3 + 3x^2 - 3x + 1}{x^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2} = \frac{(x-1)^2(2x+1)}{x^2} > 0,$$

οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

$$h''(x) = \left(\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2} \right)' = \frac{(6x^2 - 6x) \cdot x^2 - (2x^3 - 3x^2 + 1) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$\frac{6x^3 - 6x^3 - 4x^3 + 6x^2 - 2}{x^3} = \frac{2x^3 - 2}{x^3}.$$

$$h''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Άρα η h είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$ και κοίλη στο $(0, 1]$ και παρουσιάζει σημείο καμπής στο 1 το $h(1) = 0$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-	0	+
f		Σ.Κ.	

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \cdot \frac{1}{x} = -1 \cdot (+\infty) = -\infty$$

Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

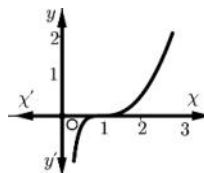
Άρα δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Άρα δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

ε)

$$\sigma\tau) h(2) = \frac{1}{2}, h'(2) = \frac{5}{4} \text{ οπότε η εφαπτομένη στο } x_0 = 2 \text{ έχει εξίσωση}$$



$$(\epsilon): y - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}x - 2.$$

H (ε) τέμνει τον χ'χ στο $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$. Το ζητούμενο

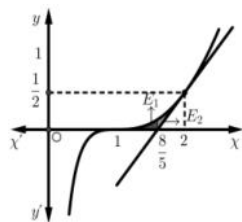
εμβαδόν είναι το

$$E = E_1 + E_2 = \int_1^{\frac{8}{5}} h(x) dx + \int_{\frac{8}{5}}^2 \left(h(x) - \frac{5}{4}x + 2 \right) dx =$$

$$\frac{603}{250} + \frac{187}{50} + \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{8}{5} = \frac{550}{750} - \ln 2 = \frac{11}{15} - \ln 2$$

$$E_1 = \int_1^{\frac{8}{5}} h(x) dx = \int_1^{\frac{8}{5}} \left(x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 3x - \ln x \right]_1^{\frac{8}{5}} = \frac{123}{250} - \ln \frac{8}{5}$$

$$E_2 = \int_{\frac{8}{5}}^2 \left(h(x) - \frac{5}{4}x + 2 \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 3x - \ln x - \frac{5}{8}x^2 + 2x \right]_{\frac{8}{5}}^2 = \ln \frac{4}{5} + \frac{181}{750}$$



8. α) $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Για $x > 0$: $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}$.

H f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{-3x + 4}{x^3}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3x + 4}{x^3} \geq 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} -3x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3}. \text{ Για κάθε}$$

$$x \in \left(0, \frac{4}{3}\right) \text{ είναι } f'(x) > 0 \text{ και για κάθε } x \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \text{ είναι } f'(x) < 0, \text{ επειδή η}$$

f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{4}{3}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο

$$\left[\frac{4}{3}, +\infty\right). \text{ Για } x < 0 \text{ είναι } f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{-x^2} = -1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}.$$

H f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ με $f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} = \frac{3x - 4}{x^3} > 0$ αφού

$$3x - 4 < 0 \text{ και } x^3 < 0. \text{ Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο } (-\infty, 0).$$

β) Για $x > 0$ είναι $f''(x) = \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)' = \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^4} = \frac{6x - 12}{x^4}$.

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x - 12}{x^4} \geq 0 \stackrel{x^4 > 0}{\Leftrightarrow} 6x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq 12 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x > 2$ είναι $f''(x) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $(0, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$.

$$\text{Για } x < 0 \text{ είναι: } f''(x) = \left(\frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} \right)' = -\frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^4} = \frac{-6x + 12}{x^4} > 0$$

($x < 0 \Leftrightarrow -6x > 0 \Leftrightarrow -6x + 12 > 12 > 0$). Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0)$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 3x - 2) \cdot \frac{1}{x^2} = -2 \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1. \text{ Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη}$$

στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$ και στο $-\infty$ την ευθεία $y = -1$. Εφόσον έχει οριζόντιες ασύμπτωτες δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.

$$\delta) A_g = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

ι) Κατακόρυφη ασύμπτωτη αν έχει θα έχει την $x = 0$.

$$\text{Αν } \mu = 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}} = 2 \text{ απορρίπτεται.}$$

Αν $\mu > 0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + \mu}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x + \mu) \cdot \frac{1}{x} = \mu \cdot (+\infty) = +\infty \text{ ισχύει.}$$

Αν $\mu < 0$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x + \mu}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x + \mu) \cdot \frac{1}{x} = \mu \cdot (-\infty) = -\infty \text{ ισχύει. Άρα}$$

για $\mu \neq 0$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

ii) Για $\mu \neq 0$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + \mu}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + \mu}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2x + \mu - \cancel{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2.$$

Άρα η ευθεία $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της g στο $\pm\infty$.

Εφόσον έχει πλάγιες ασύμπτωτες δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$.

$$\epsilon) x^2 + 2x + \mu > x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + \mu > 0.$$

Οπότε $g(x) < 0$ στο $[-2, -1]$ και

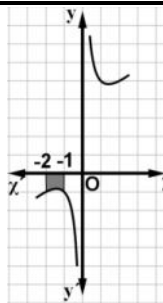
$$E = \int_{-2}^{-1} (-g(x)) dx = - \int_{-2}^{-1} \frac{-x^2 + 2x + \mu}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E = - \int_{-2}^{-1} \left(x + 2 + \frac{\mu}{x} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$2 = - \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \mu \ln|x| \right]_{-2}^{-1} \Leftrightarrow 2 = - \left(\frac{1}{2} - 2 + 4 - \mu \ln 2 \right) \Leftrightarrow$$

$$2 = -\frac{1}{2} + \mu \ln 2 \Leftrightarrow 4 = -1 + 2\mu \ln 2 \Leftrightarrow 5 = 2\mu \ln 2 \Leftrightarrow \mu = \frac{5}{2 \ln 2}.$$

$$\left(\frac{5}{2 \ln 2} > 1 \Leftrightarrow 5 > 2 \ln 2 \Leftrightarrow \ln e^5 > \ln 4 \Leftrightarrow e^5 > 4 \text{ ισχύει} \right).$$



9. α) i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f'(x) = 2\sin x - 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}. \text{ Είναι}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0, \text{ άρα}$$

$$f'(x) > 0 \text{ στο } \left[0, \frac{\pi}{3}\right]. \text{ Είναι}$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{2\pi}{3} - 1 = \sqrt{3} - 1 < 0, \text{ άρα}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
f'	+	0	-
f	↗		↘

$$f'(x) < 0 \text{ στο } \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right]. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } [0, \pi] \text{ είναι γνησίως}$$

$$\alphaύξουσα \text{ στο } \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ και γνησίως φθίνουσα στο } \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]. \text{ Παρουσιάζει ολικό}$$

$$\muέγιστο \text{ στο } \frac{\pi}{3} \text{ το } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 3 = \sqrt{3} + 3 - \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Επειδή } f(0) = 3 > f(\pi) = -\pi + 3 \text{ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο } \pi \text{ το}$$

$$f(\pi) = -\pi + 3 \text{ και τοπικό ελάχιστο στο } 0 \text{ το } f(0) = 3.$$

$$\beta) i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + 3 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3} + 9 - \pi}{3}. \text{ Έστω } A_1 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$A_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]. \text{ Είναι } f(A_1) = \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[3, \frac{3\sqrt{3} + 9 - \pi}{3}\right],$$

$$f(A_2) = \left[f(\pi), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) \right) = \left[f(\pi), f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \left[-\pi + 3, \frac{3\sqrt{3} + 9 - \pi}{3} \right), \text{ άρα}$$

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left[-\pi + 3, \frac{3\sqrt{3} + 9 - \pi}{3} \right].$$

ii) $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\eta\mu x = x - 3 \Leftrightarrow 2\eta\mu x - x + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$

Το $0 \notin f(A_1)$ οπότε δεν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο A_1 . Το $0 \in f(A_2)$ οπότε υπάρχει $x_0 \in A_2$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και 1-1 στο A_2 και διάφορο του π αφού $f(\pi) \neq 0$. Άρα η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, \pi)$.

γ) i) Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\eta\mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 3 = 5 - \frac{\pi}{2}$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - 1 = -1.$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $\frac{\pi}{2}$ είναι

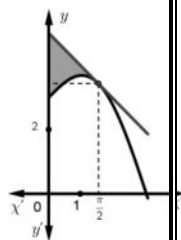
$$y - 5 + \frac{\pi}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y = -x + \cancel{\frac{\pi}{2}} + 5 - \cancel{\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow y = -x + 5.$$

ii) $f''(x) = -2\eta\mu x < 0$ στο $(0, \pi)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0, \pi]$ αφού είναι συνεχής στο $[0, \pi]$. Άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την ε για κάθε σημείο της εκτός από το σημείο επαφής οπότε $f(x) \leq -x + 5$.

δ) Επειδή $f(x) \leq -x + 5$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-x + 5 - f(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cancel{-x} + 5 - 2\eta\mu x - \cancel{x} - 3) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2\eta\mu x) dx = [2x + 2\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$



10. α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) =$

$$e^x (f(x) - x + 1) + e^x (f'(x) - 1) \Leftrightarrow g'(x) = e^x (f(x) - x + 1 + f'(x) - 1) =$$

$$e^x (f(x) - x - f(x) + x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c, c \in \mathbb{R}$$

β) Είναι $g(0) = f(0) + 1 = 1 \Leftrightarrow c = 1$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^x (f(x) - x + 1) = 1 \Leftrightarrow f(x) - x + 1 = e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x} + x - 1$$

γ) 1^{ος} τρόπος: Είναι $f'(x) = (e^{-x} + x - 1)' = -e^{-x} + 1$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$.

2^{ος} τρόπος: Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \geq x + 1$, οπότε αντικαθιστώντας όπου x το $-x$, είναι: $e^{-x} \geq -x + 1 \Leftrightarrow e^{-x} + x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

δ) Είναι $E(\Omega) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^{-x} + x - 1) dx = \left[-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_0^1 = \frac{e-2}{2e}$

ε) $e^{-x} + x = \alpha + 1 \Leftrightarrow f(x) = \alpha$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^{-x}}{x} + 1 - \frac{1}{x} \right) = -\infty(-\infty + 1 - 0) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + x - 1) = +\infty.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (0, +\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (0, +\infty)$. Επειδή $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, μια στο Δ_1 και μια στο Δ_2 .

11. α) Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα

$$A_f = (0, +\infty). \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}. \text{ Είναι } f'(x) > 0$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, άρα είναι και 1-1.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = y, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x - 1 = e^y \Leftrightarrow e^x = e^y + 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y + 1),$$

$$\text{άρα } f^{-1}(y) = \ln(e^y + 1), y \in \mathbb{R}, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}.$$

$$(x > 0 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) > \ln 1 \Leftrightarrow e^x + 1 > 1 \Leftrightarrow e^x > 0 \text{ ισχύει})$$

β) $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2} < 0 \Rightarrow f \cap (0, +\infty).$

γ) Αρκεί $f(x) < x \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) < x \Leftrightarrow e^x - 1 < e^x$ που ισχύει.

δ) Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$. Για $x = \ln(e-1)$ είναι $f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$ και για $x = \ln(e^e - 1)$ είναι $f(u) = f(e) \Leftrightarrow u = e$, οπότε

$$\Pi = \int_1^e f(x)dx + \int_{\ln(e-1)}^{\ln(e^e-1)} f^{-1}(x)dx = \int_1^e f(x)dx + \int_1^e uf'(u)du \Leftrightarrow$$

$$\Pi = \int_1^e f(x)dx + [uf(u)]_1^e - \int_1^e f(u)du = ef(e) - f(1) = e\ln(e^e - 1) - \ln(e - 1).$$

ε) Είναι $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow$

$$e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2. \quad E(\Omega) = \int_{\ln 2}^{\ln 3} g(x)dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \ln(e^x - 1)dx$$

Θέτουμε $e^x - 1 = u \Rightarrow e^x dx = du$. Για $x = \ln 2$ είναι $u = e^{\ln 2} - 1 = 2 - 1 = 1$ και για $x = \ln 3$ είναι $u = e^{\ln 3} - 1 = 3 - 1 = 2$, οπότε:

$$E(\Omega) = \int_1^2 \ln u du = \int_1^2 u' \ln u du = [u \ln u]_1^2 - \int_1^2 u' \cdot \frac{1}{u} du = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

12. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \lambda$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \text{ άρα } \lambda = 1.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1 - x}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}, \text{ άρα } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$.

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$. Για

κάθε $x < 0$ είναι $e^x < e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$. Επειδή και $f(0) = 1 > 0$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ) Είναι $f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x - 1) + 1}{e^x}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$

και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. $\beta e^a - a e^b < \beta - a \Leftrightarrow \beta e^a - \beta < a e^b - a \Leftrightarrow \beta(e^a - 1) < a(e^b - 1) \Leftrightarrow$

$$\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} < \frac{e^{\beta}-1}{\beta} \Leftrightarrow f(\alpha) < f(\beta) \stackrel{f'>0}{\Leftrightarrow} \alpha < \beta \text{ ισχύει}$$

ε) Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) = x^2 \frac{e^x - 1}{x} = xe^x - x > 0$.

$$E(\Omega) = \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 (xe^x - x) dx = \int_1^2 x(e^x)' dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = [xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx - \frac{3}{2} = 2e^2 - e - e^2 + e - \frac{3}{2} = e^2 - \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

13. α) Είναι $f(x) = x - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x} - 2)^2, x \geq 0$.

Είναι $A_{f,f} = \{x \in A_f / f(x) \in A_f\} = \{x \geq 0 / (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}\} = [0, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \left(\sqrt{(\sqrt{x} - 2)^2} - 2 \right)^2 =$

$(|\sqrt{x} - 2| - 2)^2$. Για κάθε $x \in [0, 4]$ είναι $0 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 2$ οπότε

$\sqrt{x} - 2 \leq 0$ και $(f \circ f)(x) = (2 - \sqrt{x} - 2)^2 = x$

β) i. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)} \stackrel{f(x)=u>0}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \Rightarrow \\ u \rightarrow 0^+}} \frac{1}{u} = +\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - 4\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{4}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x} \right)} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4\frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} + \frac{4}{x}}{1 + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} \right) = 1$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4\sqrt{x} + 4) = -\infty$, οπότε η f δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 2)^2 = +\infty$ οπότε η f δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

$$\delta) f(x) = x - e^{-x} \Leftrightarrow x' - 4\sqrt{x} + 4 - x' + e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - 4\sqrt{x} + 4 = 0.$$

Έστω $\varphi(x) = e^{-x} - 4\sqrt{x} + 4, x \geq 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi'(x) = -e^{-x} - 4 \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ επειδή η φ είναι συνεχής, είναι

γνησίως φθίνουσα, οπότε η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, +\infty)$.

ε) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_0^1 |f(x) - (f \circ f)(x)| dx = \int_0^1 |x' - 4\sqrt{x} + 4 - x'| dx = \int_0^1 \left(4 - 4x^{\frac{1}{2}}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \left[4x - 4 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[4x - \frac{8}{3} x\sqrt{x} \right]_0^1 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ τ.μ.}$$

(Είναι $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq -4\sqrt{x} \leq 0$ οπότε $-4\sqrt{x} + 4 \geq 0$)

$$14. \alpha) \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3x^3 - 1}{x}.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x^3 - 3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^3 \geq 3 \Leftrightarrow x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = 6x + \frac{3}{x^2} > 0 \Rightarrow f \cup (0, +\infty)$.

$$\beta) x^3 - 2 = 3 \ln x \Leftrightarrow x^3 - 3 \ln x = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2$$

Είναι $f(1) = 1, f(e) = e^3 - 3$ και $f(1) < 2 < f(e)$. Επειδή η f είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 2$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$, το x_0 είναι μοναδικό.

$$\gamma) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3 \ln x) = 0 + \infty = +\infty \text{ οπότε η ευθεία } x = 0,$$

δηλαδή ο άξονας $y'y$, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3 \ln x}{x^3} \right) \right] = +\infty(1-0) = +\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0 \text{ άρα η } C_f$$

δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - \frac{3 \ln x}{x} \right) = +\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ οπότε η } C_f \text{ δεν έχει πλάγια}$$

ασύμπτωτη.

δ)

$$\epsilon) F'(x) = x^3 - 3(\ln x - 1) - 3x \cdot \frac{1}{x} = x^3 - 3 \ln x + 3 - 3 = f(x),$$

άρα η F είναι αρχική της f.

$$E = \int_1^e f(x) dx = [F(x)]_1^e = F(e) - F(1) = \frac{e^4 - 13}{4} \text{ τ.μ.}$$

15. α) Η f ορίζεται όταν $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, άρα

$A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$. Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ έχουμε:

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x \neq -1 \text{ ισχύει}\} = \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

β) $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{\cancel{e^x} \cdot e^x + e^x - \cancel{e^x} \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R}$, οπότε η φ δεν έχει ακρότατα.

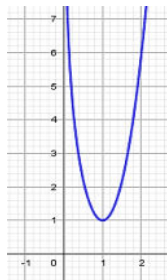
γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{e^x = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{u+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{u} = 1. \text{ Επειδή η } \varphi \text{ είναι συνεχής}$$

και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$.

Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

x	0	1	$+\infty$
f''	+	0	+
f'	-		+
f			



$$\text{είναι } \varphi(x) = y, y \in (0,1) \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = y \Leftrightarrow e^x = ye^x + y \Leftrightarrow e^x - ye^x = y \Leftrightarrow$$

$$e^x(1-y) = y \Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{1-y}, \text{ άρα } f^{-1}(y) = \ln \frac{y}{1-y}, y \in (0,1),$$

$$\text{οπότε } f^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}, x \in (0,1).$$

$$\delta) \text{ Είναι } \varphi''(x) = \left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \right)' = \frac{e^x(e^x+1)^2 - e^x \cdot 2(e^x+1) \cdot e^x}{(e^x+1)^4} \Leftrightarrow$$

$$\varphi''(x) = \frac{\cancel{(e^x+1)}(e^{2x} + e^x - 2e^{2x})}{(e^x+1)^{\cancel{4}^3}} = \frac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

$$\varphi''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} \geq 0 \Leftrightarrow 1-e^x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

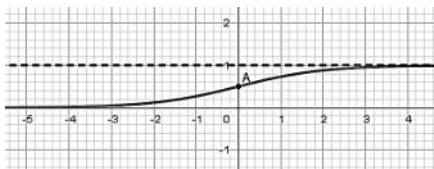
Για κάθε $x < 0$ είναι $\varphi''(x) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi''(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

$$\text{Η } \varphi \text{ έχει σημείο καμπής το } A(0, \varphi(0)) \equiv \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

ε) Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ η φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y = 0$, δηλαδή τον άξονα x' .

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 1$ η φ έχει

οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$.



$$\sigma\tau) \int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^x \cdot e^x}{e^x+1} dx$$

1^{ος} τρόπος: Θέτουμε $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$, για $x=0 \Rightarrow u=1$ και για $x=1 \Rightarrow u=e$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^x \cdot e^x}{e^x+1} dx &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} e^x dx = \int_1^e \frac{u}{u+1} du = \int_1^e \frac{u+1-1}{u+1} du = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = \\ &= [u - \ln|u+1|]_1^e = [u - \ln(u+1)]_1^e = e - \ln(e+1) - 1 + \ln 2 \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος: Θέτουμε $u = e^x + 1 \Rightarrow du = e^x dx$, για $x=0 \Rightarrow u=2$ και για $x=1 \Rightarrow u=e+1$

$$\int_0^1 \frac{e^x \cdot e^x}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} e^x dx = \int_2^{e+1} \frac{u-1}{u} du = \int_2^{e+1} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = [u - \ln|u|]_2^{e+1} = [u - \ln u]_2^{e+1} = e - \ln(e+1) - 1 + \ln 2$$

16. α) Είναι $f'(x) = 2(x - e^x)(1 - e^x)$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x + 1 > x \Rightarrow x - e^x < 0$, οπότε:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(x - e^x)(1 - e^x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - e^x \leq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 1$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x) = -\infty - 0 = -\infty$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - e^x)^2 \stackrel{x - e^x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \Rightarrow \\ u \rightarrow -\infty}} u^2 = +\infty.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{e^x}{x} \right) \right] = +\infty(-\infty) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x)^2 \stackrel{x - e^x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \Rightarrow \\ u \rightarrow -\infty}} u^2 = +\infty.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = [1, +\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = [1, +\infty)$. Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [1, +\infty)$. Το $f(1821)$ περιέχεται στα $f(\Delta_1), f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = f(1821)$ έχει από μια ρίζα σε καθένα από τα Δ_1, Δ_2 , οπότε έχει ακριβώς δύο λύσεις. ($f(1821) > f(1) = 1$ αφού $f(x) > f(1) = 1$ για $x \neq 1$)

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - e^x)^2}{2(x - e^x)(1 - e^x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - e^x}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^x} \right).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x}{2} = -\frac{1}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - e^x} \stackrel{1 - e^x = u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - e^x} \stackrel{1-e^x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1}{u} = -\infty, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{f'(x)} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{f'(x)} = +\infty \text{ και δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.}$$

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow$

$$(x - e^x)^2 = 2(x - e^x)(1 - e^x) \Leftrightarrow x - e^x - 2 + 2e^x = 0 \Leftrightarrow e^x + x - 2 = 0 \text{ έχει}$$

μοναδική ρίζα. Έστω $\varphi(x) = e^x + x - 2, x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$\varphi'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R}$$

Είναι $\varphi(0) = -1, \varphi(1) = e - 1$, άρα $\varphi(0)\varphi(1) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$. Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

2ος τρόπος: Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow (x - e^x)^2 = 2(x - e^x)(1 - e^x) \Leftrightarrow x - e^x - 2 + 2e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x + x - 2 = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα.}$$

Έστω $\varphi(x) = e^x + x - 2, x \in \mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R}$.

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το :

$$\varphi(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \right) = (0 - \infty - 2, +\infty + \infty - 2) = (-\infty, +\infty).$$

Το 0 ανήκει στο $\varphi(\mathbb{R})$ οπότε η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

$$\epsilon) \int_a^\beta (x^2 - 2xe^x + e^{2x}) dx > \beta - \alpha \Leftrightarrow \int_a^\beta (x - e^x)^2 dx > \beta - \alpha \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx > \beta - \alpha$$

Ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$.

$$\text{Επομένως } \int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta dx \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx > \beta - \alpha$$

στ) Είναι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x - e^x)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 2xe^x + e^{2x}) dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 + e^{2x}) dx - \int_0^1 2xe^x dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \left[2xe^x \right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \left[2xe^x \right]_0^1 + \left[2e^x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2e + 2e - 2 = \frac{3e^2 - 13}{6} \end{aligned}$$

17. α) Είναι

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x > 0 / \ln x \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty) = A_h = A_{-h}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\ln x} - \ln x = x - \ln x = -h(x)$$

β) Είναι $f'(x) = e^x - 1$ και $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 1$.

Είναι $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$. Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $h'(x) > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(0, 1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $h'(x) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η h έχει μέγιστο το $h(1) = -1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \geq f(1) = 1 > -1 = h(1) \geq h(x)$.

γ) Είναι $f'(0) = 0$ και $h'(1) = 0$. Επειδή $f'(0) = h'(1)$ η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0,0)$ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της C_h στο σημείο $B(1,-1)$.

δ) Είναι $g'(x) = \frac{1}{x}$ και $g'(1) = 1$. Η εφαπτομένη της C_g στο A είναι η ευθεία $\varepsilon: y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$.

Για να εφάπτεται η ε στην C_f πρέπει να υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_1) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow e^{x_1} - 1 = 1 \Leftrightarrow e^{x_1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = \ln 2.$$

Είναι $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - \ln 2 = 2 - \ln 2$ και η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = \ln 2$ έχει εξίσωση: $y - f(\ln 2) = f'(\ln 2)(x - \ln 2) \Leftrightarrow y = x + 2 - 2\ln 2$ και δεν είναι η ε .

Για να εφάπτεται η ε στην C_h πρέπει να υπάρχει $x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$h'(x_2) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2}. \text{ Είναι}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\ln 2 - \frac{1}{2} \text{ και η εφαπτομένη της } C_h \text{ στο } x_2 = \frac{1}{2} \text{ έχει}$$

εξίσωση: $y - h\left(\frac{1}{2}\right) = h'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = x - 1 - \ln 2$ και δεν είναι η ε .

ε) Έστω $\varphi(x) = g(x) + h(x) = \ln x + \ln x - x = 2\ln x - x, x > 0$.

Είναι $\varphi'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$. Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και επειδή η h

είναι συνεχής στο $(0, 2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει μέγιστο το $\varphi(2) = 2 \ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1) < 0$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi(x) \leq \varphi(2) < 0 \Leftrightarrow g(x) + h(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < -h(x)$

στ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 |k(x) - g(x)| dx = \int_1^2 |-h(x) - g(x)| dx = -\int_1^2 (h(x) + g(x)) dx = \\ &= -\int_1^2 (2 \ln x - x) dx = -\int_1^2 2 \ln x \, dx + \int_1^2 x \, dx = -[2x \ln x]_1^2 + \int_1^2 2 \, dx + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \\ &= -[2x \ln x]_1^2 + \int_1^2 2 \, dx + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = -4 \ln 2 + 2(2-1) + 2 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - 4 \ln 2 \, \text{τ.μ.} \end{aligned}$$

18. α) Η g ορίζεται όταν $x + 511 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -511$, οπότε $A_g = [-511, +\infty)$.

Για το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} A_{g \circ f} &= \{x \in A_f / f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 511 \geq -511\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x^3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0, +\infty) \end{aligned}$$

Είναι $h(x) = g(f(x)) = \sqrt[9]{x^3 - 511 + 511} = \sqrt[9]{x^3} = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$.

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η h' είναι

παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$h''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}. \text{ Για κάθε } x > 0 \text{ είναι}$$

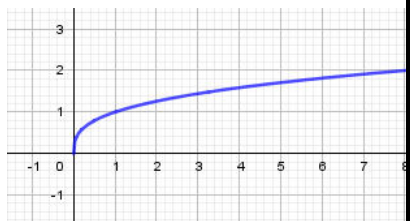
$h''(x) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

γ) Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $h(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$. Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $h(A) = [0, +\infty)$, οπότε $A_{h^{-1}} = [0, +\infty)$.

$$h(x) = y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = y \Leftrightarrow x = y^3, \text{ άρα } h^{-1}(y) = y^3, y \geq 0, \text{ οπότε}$$

$$h^{-1}(x) = x^3, x \geq 0.$$



$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g^3(x) - 9}{(f(x) + 510)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[9]{x + 511})^3 - 9}{(x^3 - 511 + 510)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 511} - 9}{(x^3 - 1)(x - 1)} =$$

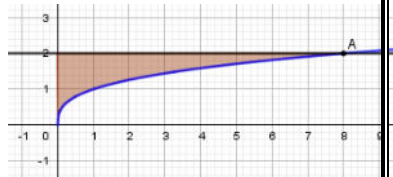
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 511} - 9}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x + 511} - 9}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{1}{(x - 1)^2} \right) = \frac{8 - 9}{3} (+\infty) = -\infty$$

ε) Αρχικά θα βρούμε το σημείο τομής των $y = 2$ και $y = h(x)$

$$h(x) = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8.$$

Από το σχήμα βλέπουμε ότι $h(x) \leq 2$ για

κάθε $x \in [0, 8]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:



$$E = \int_0^8 (2 - h(x)) dx = \int_0^8 \left(2 - x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \left[2x - \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} \right]_0^8 =$$

$$\left[2x - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^8 = \left[2x - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} \right]_0^8 = \left[2x - \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} \right]_0^8 = 16 - \frac{3}{4} \cdot 16 = 16 - 12 = 4$$

19. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^3}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$4x$	-	-	0	+	+
$x^2 - 3$	+	0	-	-	+
$(1+x^2)^3$	+	+	+	+	+
f''	-	0	+	0	+
f					

Για

$x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ είναι $f''(x) < 0$ και για κάθε $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$.

κάθε

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, \sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$ και κυρτή στα διαστήματα $[-\sqrt{3}, 0]$, $[\sqrt{3}, +\infty)$. Είναι

$$f(-\sqrt{3}) = -\frac{2\sqrt{3}}{4}, f(0) = 0, f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{4}. \text{ Η } f \text{ έχει σημεία καμπής τα}$$

$$A\left(-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{4}\right), O(0,0) \text{ και } B\left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{4}\right). \text{ Παρατηρούμε ότι το } O \text{ είναι το}$$

μέσο του τμήματος AB , οπότε τα A, B είναι συμμετρικά ως προς το O .

$$\beta) |f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1 \stackrel{1+x^2 > 0}{\Leftrightarrow} 1+x^2 \geq 2|x| \Leftrightarrow 1+|x|^2 - 2|x| \geq 0 \\ \Leftrightarrow (1-|x|)^2 \geq 0 \text{ ισχύει.}$$

$$\gamma) F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow F'(x) = \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} \Leftrightarrow F(x) = \ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$F(0) = 2022 \Leftrightarrow c = 2022, \text{ οπότε } F(x) = \ln(1+x^2) + 2022, x \in \mathbb{R}$$

δ) Αν $\alpha = \beta$ η σχέση ισχύει ως ισότητα

Αν $\alpha \neq \beta$. Έστω $\alpha < \beta$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως παραγωγίσιμη, η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ,

$$\text{δηλαδή υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta): F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Όμως } |f(\xi)| \leq 1 \text{ συνεπώς } \frac{|F(\beta) - F(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq 1 \Leftrightarrow |F(\beta) - F(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|.$$

$$\text{Όμοια για } \alpha > \beta. \text{ Οπότε σε κάθε περίπτωση } |F(\beta) - F(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|$$

ε) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \ln 2 \text{ τ.μ.}$$

Επίπεδο Β2

20. α) Είναι $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$, οπότε $f'(x) > 0$ στο

$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και η f συνεχής στο 0, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι και «1-1», οπότε ορίζεται η αντίστροφή της. Πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$ είναι το σύνολο τιμών $f(A)$.

Είναι $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ επομένως η } f^{-1}(x) \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}.$$

β) $f(x) \leq x \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 + 1} \leq x \Leftrightarrow x^3 \leq x(x^2 + 1) \Leftrightarrow x \geq 0$, που ισχύει. Αφού η f

είναι γνησίως αύξουσα τότε $x \leq f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) \leq f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f(x) \leq x$, που ισχύει από το προηγούμενο.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες

ασύμπτωτες. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0 \text{ άρα η ευθεία}$$

$y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και επειδή δεν διαφοροποιούνται τα όρια όταν $x \rightarrow -\infty$ τότε η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

δ) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_1^{\kappa} [x - f(x)] dx = \int_1^{\kappa} \left(x - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right) dx$

$$= \int_1^{\kappa} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^{\kappa} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_1^{\kappa} = \frac{1}{2} [\ln(\kappa^2 + 1) - \ln 2]$$

ε) Το κ άρα και το εμβαδόν E είναι συνάρτηση του χρόνου t και επομένως έχουμε $E(t) = \frac{1}{2} [\ln(\kappa^2(t) + 1) - \ln 2]$.

$$\text{Επομένως } E'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\kappa(t)\kappa'(t)}{\kappa^2(t) + 1} \right) = \frac{\kappa(t)}{\kappa^2(t) + 1} \quad (1)$$

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $\kappa(t_0) = 2$. Στην (1) για $t = t_0$ έχουμε

$$E'(t_0) = \frac{\kappa(t_0)}{\kappa^2(t_0) + 1} = \frac{2}{5} \text{ cm}^2 / \text{sec}.$$

21. α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 = -\frac{1}{e^x} + 1 = \frac{e^x - 1}{e^x}, \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Έχει ολικό ελάχιστο το $f(0) = 0$. Είναι $f''(x) = e^{-x} > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} + x - 1 \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} + x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} (1 + xe^x) - 1 \right) = +\infty, \text{ εφόσον}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)'}{(e^{-x})'} \stackrel{\text{(DLH)}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + xe^x) = 1 > 0$ άρα το σύνολο τιμών αφού έχει ελάχιστο το 0, είναι $f(A) = [0, +\infty)$. Η εξίσωση γίνεται

$$e^x(x-1) = 2e^x - 1 \stackrel{(e^x > 0)}{\Leftrightarrow} x-1 = 2 - e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} + x - 1 = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2.$$

Αν $A_1 = (-\infty, 0)$, $A_2 = [0, +\infty)$ τότε έχουμε

$f(A_1) = (0, +\infty)$, $f(A_2) = [0, +\infty)$ οπότε αφού $2 \in f(A_1)$, $2 \in f(A_2)$ και σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1, A_2 η f είναι γνησίως μονότονη η εξίσωση έχει δύο λύσεις.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ οπότε η ευθεία $y = x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\delta) \text{ Θεωρούμε την } g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}, \quad x \in (-\infty, 0].$$

Είναι $g'(x) = -1 + x + e^{-x} = f(x) > 0$ από ερώτημα α, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Για } x < 0 \stackrel{g'}{\Leftrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 1 - x + \frac{x^2}{2} < e^{-x}$$

ε) Η ανίσωση $f(x) < f(x^2) + \ln x$ ορίζεται για $x > 0$ ενώ η εξίσωση

$f(x) = f(x^2) + \ln x$ η έχει προφανή λύση $x = 1$.

• Για $x > 1$ τότε $\ln x > 0$, $x^2 > x > 1 \Leftrightarrow f(x^2) > f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x^2) < 0$,
δηλαδή $f(x) - f(x^2) < \ln x$ οπότε η ανίσωση αληθεύει στο $(1, +\infty)$.

• Αν $0 < x < 1$ τότε $\ln x < 0$, $0 < x^2 < x \Leftrightarrow f(x^2) < f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(x^2) > 0$,
οπότε $f(x) - f(x^2) > \ln x$ συνεπώς η ανίσωση είναι αδύνατη $(0, 1)$.

Επομένως η ανίσωση έχει λύση το διάστημα $(1, +\infty)$.

στ) Είναι $f(x) - (x-1) = e^{-x} > 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^2 [f(x) - (x-1)] dx = \int_1^2 e^{-x} dx = -[e^{-x}]_1^2 = -\left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right) = \frac{e-1}{e}$$

$$\begin{aligned} 22. \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\kappa x^2 + \lambda x + 1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\kappa x^2 + \lambda x + 1 - x^2 + x}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\kappa-1)x^2 + (\lambda+1)x + 1}{x-1} \right) \end{aligned}$$

• Αν $\kappa-1 > 0 \Leftrightarrow \kappa > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = +\infty$ (άτοπο)

• Αν $\kappa-1 < 0 \Leftrightarrow \kappa < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$ (άτοπο)

Συνεπώς, πρέπει $\kappa-1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(\lambda+1)x + 1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda + 1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right) = \lambda + 1 \text{ άρα}$$

$$\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{1\}$

$$\mu \epsilon f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1)'(x-1) - (x^2 - x + 1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \dots = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \text{ είναι}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2$$

Οπότε ο πίνακας προσήμου της f' και μονοτονίας της f διαμορφώνεται ως εξής

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-		-	+
$f(x)$	↗	↘		↘	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0, 1)$ και $(1, 2]$. Παρουσιάζει για $x=0$ τοπικό μέγιστο το $f(0)=-1$ και για $x=2$ τοπικό ελάχιστο το $f(2)=3$.

$$\gamma) \text{ Η } f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \text{ είναι παραγωγίσιμη } \mathbb{R} - \{1\}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \dots = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)^3} > 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ οπότε η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1)$ και κυρτή στο $(1, +\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

$$\text{Είναι } f(x) = \frac{1}{x-1}(x^2 - x + 1) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1) = 1 > 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty. \text{ Συνεπώς, η ευθεία } x=1 \text{ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της } C_f.$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$, επομένως η ευθεία $y=x$ είναι πλαγιά ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Επίσης, η ευθεία $y=x$ είναι πλαγιά

$$\text{ασύμπτωτη της } C_f \text{ και στο } -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2 + x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x-1} \right) = 0.$$

δ) Παρατηρούμε ότι αν $x \in (-\infty, 1)$ τότε $f(x) \leq f(0) = -1$, άρα εφόσον

$$1 - x^2, 1 - x^6 < 1 \text{ για κάθε } x \neq 0, \text{ για να ισχύει } f(1 - x^2) + f(1 - x^6) = -2$$

$$\text{πρέπει } f(1 - x^2) = f(1 - x^6) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ 1 - x^6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

.

$$\epsilon) E = \int_2^3 |f(x) - x| dx = \int_2^3 \left| \frac{x^2 - x + 1}{x-1} - x \right| dx = \int_2^3 \left| \frac{1}{x-1} \right| dx \stackrel{x-1 > 0}{=} \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = [\ln|x-1|]_2^3 = \ln 2.$$

23. α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 12$. Επειδή παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ τότε σύμφωνα με το Θ. Fermat θα είναι $f'(2) = 0 \Leftrightarrow 12\alpha + 4\beta - 12 = 0$ (1)

Επίσης $f'(1) = -9 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta - 12 = -9 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta - 3 = 0$ (2). Από το σύστημα των (1), (2) έχουμε:

$$\begin{cases} 12\alpha + 4\beta - 12 = 0 \\ 3\alpha + 2\beta - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\alpha + 4\beta - 12 = 0 \\ -6\alpha - 4\beta + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha - 6 = 0 \\ 3\alpha + 2\beta - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Είναι $f(x) = x^3 - 12x - 16$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2 - 12$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \geq 12 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 2]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -2$ το

$f(-2) = 0$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 2$ το $f(2) = -32$.

Η $f'(x) = 3x^2 - 12$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x$ και

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Συνεπώς, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$, παρουσιάζει σημείο καμπής στο $K(0, -16)$.

β) Έχουμε $x^3 = 12x + 16 \Leftrightarrow x^3 - 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 12x - 16) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 12x - 16) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

• Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -2]$ με

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-2) \right] = (-\infty, 0] .$$

Επειδή $0 \in f(A_1)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα τη $\rho_1 = -2$.

• Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [-2, 2]$ με

$$f(A_2) = [f(2), f(-2)] = [-32, 0] . \text{Επειδή } 0 \in f(A_2) \text{ η εξίσωση } f(x) = 0 \text{ έχει ρίζα τη } \rho_1 = -2 .$$

• Τέλος, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_3 = [2, +\infty)$ με

$$f(A_3) = \left[f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-32, +\infty) . \text{Επειδή } 0 \in f(A_3) \text{ η εξίσωση}$$

$$f(x) = 0 \text{ έχει μοναδική ρίζα } \rho_2 \in (2, +\infty) .$$

Τελικά, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δυο ρίζες τη $\rho_1 = -2$ και $\rho_2 \in (2, +\infty)$.

γ) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε η εφαπτομένη στο M έχει

εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 0)$ οπότε $0 - f(x_0) = f'(x_0)(-2 - x_0) \Leftrightarrow 2f'(x_0) + x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2(3x_0^2 - 12) + x_0(3x_0^2 - 12) - (x_0^3 - 12x_0 - 16) = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0 + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ ή $x_0 = -2$

Η εφαπτομένη στο $x_0 = -2$ είναι $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Leftrightarrow y = 0$, ενώ η εφαπτομένη στο $x_0 = 1$ είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -9x - 18$

δ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [-2, 2]$, οπότε για $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \geq f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow -27 \leq f(x) \leq -16$, άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Συνεπώς,

$$E(\Omega) = -\int_0^1 (x^3 - 12x - 16) dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + 6\left[x^2\right]_0^1 + 16\left[x\right]_0^1 = \frac{87}{4} \text{ τ.μ.}$$

24. α) Είναι $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x} - \frac{x^2 + 3}{x + 2} = \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

β) Αρχικά θα βρούμε το πρόσημο της f .

Για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι $2x^2 + 2x + 10 > 0$ και $x(x + 2) > 0$ οπότε $f(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό, το ζητούμενο εμβαδόν είναι το

$$E = \int_1^2 f(x) dx.$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x} = \frac{2x^2 + 4x - 2x + 10}{x^2 + 2x} = \frac{2(x^2 + 2x) - 2x + 10}{x^2 + 2x} = 2 + \frac{-2x + 10}{x^2 + 2x}$$

$$\frac{-2x + 10}{x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} = \frac{Ax + 2A + Bx}{x(x + 2)} = \frac{(A + B)x + 2A}{x^2 + 2x}$$

Η προηγούμενη ισότητα ισχύει για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq -2$, μόνο όταν

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2A = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -3 \\ A = 5 \end{cases}, \text{ άρα } f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 10}{x^2 + 2x} = 2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x + 2} \text{ και}$$

$$E = \int_1^2 \left(2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x + 2} \right) dx = \left[2x + 5 \ln x - 3 \ln(x + 2) \right]_1^2 = 2 + \ln \frac{27}{2}$$

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{0, -2\}$ ως πηλίκo παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{2x^2 - 20x - 20}{(x^2 + 2x)^2}.$$

$$\text{Είναι } f(2) = \frac{8+4+10}{4+4} = \frac{11}{4} \text{ και } f'(2) = \frac{8-40-20}{8^2} = -\frac{52}{64} = -\frac{13}{16}. \text{ Η}$$

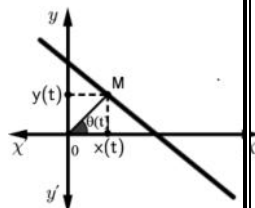
εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0 = 2$ έχει εξίσωση:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - \frac{11}{4} = -\frac{13}{16}x + \frac{26}{16} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{16}x + \frac{35}{8}.$$

δ) Επειδή οι συντεταγμένες του Μ μεταβάλλονται με βάση το χρόνο, οι συντεταγμένες του είναι

$(x(t), y(t))$ με $x'(t) = 1 \text{ cm/sec}$.

$$\text{Είναι } \varepsilon\phi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{-\frac{13}{16}x(t) + \frac{35}{8}}{x(t)} = -\frac{13}{16} + \frac{35}{8x(t)}$$



$$\text{και } (\varepsilon\phi\theta(t))' = \left(-\frac{13}{16} + \frac{35}{8x(t)} \right)' \Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\sin^2\theta(t)} = -\frac{35x'(t)}{8x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t) = -\frac{35x'(t)\sin^2\theta(t)}{8x^2(t)}. \text{ Έστω } t_0 \text{ η χρονική στιγμή που το Μ έχει}$$

συντεταγμένες $(2, 11/4)$, τότε: $x(t_0) = 2, y(t_0) = \frac{11}{4}$,

$$(OM)(t_0) = \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)} = \sqrt{4 + \frac{121}{16}} = \frac{\sqrt{185}}{4},$$

$$\sin\theta(t_0) = \frac{x(t_0)}{(OM)(t_0)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{185}}{4}} = \frac{8}{\sqrt{185}}.$$

$$\text{Είναι } \theta'(t_0) = -\frac{35x'(t_0)\sin^2\theta(t_0)}{8x^2(t_0)} = -\frac{\cancel{35}^{\frac{7}{\cancel{5}}} \cdot 1 \cdot \frac{\cancel{64}^{\frac{2}{\cancel{4}}}}{\cancel{185}^{\frac{37}{\cancel{5}}}}}{\cancel{8}^{\frac{2}{\cancel{4}}}} = -\frac{14}{37} \text{ rad/sec}$$

ε) Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, η ευθεία $y = 2$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στο $+\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x^2 + 2x + 10}{x + 2} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 2x + 10}{x + 2} = 5 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, άρα η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι κατακόρυφη

ασύμπτωτη της C_f . Είναι $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{2x^2 + 2x + 10}{x} \cdot \frac{1}{x+2} \right) = -\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x^2 + 2x + 10}{x} = -7 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty, \text{ άρα η ευθεία } x = -2 \text{ είναι}$$

κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

25. α) Είναι $f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$. Για κάθε $x > 1$ είναι

$f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα αυτό. Η f έχει μέγιστο το $f(1) = \frac{1}{e}$. Είναι $f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$.

Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η f έχει σημείο

καμπής στο $(2, f(2)) \equiv \left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

β) Η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα}$$

στο $A = [1, +\infty)$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \left(0, \frac{1}{e}\right]$. Το πεδίο ορισμού

της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f , οπότε $A_{f^{-1}} = \left(0, \frac{1}{e}\right]$. Έστω ότι

$$f^{-1}(2e^{-2}) = \lambda, \text{ τότε } f(\lambda) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(\lambda) = f(2) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} \lambda = 2, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(2e^{-2}) = 2$$

$$\gamma) A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x > 0 / \ln x \geq 1\} = \{x > 0 / x \geq e\} = [e, +\infty)$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{\ln x}{e^{\ln x}} = \frac{\ln x}{x}.$$

δ) i. Για $x \geq e$: $\ln x \geq 1 > 0$ οπότε $h(x) > 0$ και

$$E = \int_e^{e^e} h(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^{e^2} \ln x (\ln x)' dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_e^{e^2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

ii. Είναι $\frac{E(\Omega_1)}{E(\Omega_2)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E(\Omega_2) = 2E(\Omega_1)$. Όμως

$$E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = E = \frac{3}{2} \Leftrightarrow E(\Omega_1) + 2E(\Omega_1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3E(\Omega_1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow E(\Omega_1) = \frac{1}{2}$$

$$E(\Omega_1) = \int_e^a h(x) dx = \int_e^a \frac{\ln x}{x} dx = \int_e^a \ln x (\ln x)' dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_e^a = \frac{\ln^2 a - 1}{2}, \text{ άρα}$$

$$\frac{\ln^2 a - 1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln^2 a - 1 = 1 \Leftrightarrow \ln^2 a = 2 \Leftrightarrow \ln a = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow a = e^{\sqrt{2}} \text{ ή}$$

$$a = e^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} < e \text{ απορρίπτεται. Άρα } a = e^{\sqrt{2}}.$$

26. α) Εστω $g(x) = u \Leftrightarrow 2x - 2 = u \Leftrightarrow x = \frac{u+2}{2}$. Τότε η σχέση

$$f(g(x)) = 4x^2 - 8x + 3 \text{ γίνεται: } f(u) = 4\left(\frac{u+2}{2}\right)^2 - 8\frac{u+2}{2} + 3 \Leftrightarrow$$

$$f(u) = u^2 + 4u + 4 - 4u - 8 + 3 = u^2 - 1, \quad u \in \mathbb{R}, \text{ άρα } f(x) = x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Αρχικά θα αναζητήσουμε σημείο $M(x_0, f(x_0))$ στο οποίο $f'(x_0) = \lambda_g = 2$

. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x$.

Είναι $f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$A(1, 0)$ είναι η ευθεία $y = 2(x - 1) = 2x - 2$, άρα είναι η g .

γ) ε: $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = -2x - 2$

δ) Από το σύστημα των ε , C_g προκύπτει ότι $\Gamma(0, -2)$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει εμβαδόν:

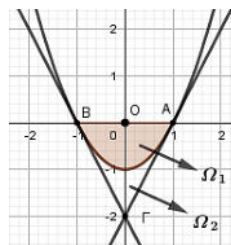
$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB)(\Gamma O) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ τ.μ.}$$

Το χωρίο Ω_1 που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x' έχει εμβαδόν:

$$E(\Omega_1) = -\int_{-1}^1 f(x) dx = -\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \text{ τ.μ.}$$

Το χωρίο Ω_2 έχει εμβαδόν: $E(\Omega_2) = (AB\Gamma) - E(\Omega_1) = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \text{ τ.μ.}$

$$\text{Είναι } \frac{E(\Omega_1)}{E(\Omega_2)} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{1}.$$



ε) Η συνάρτηση h έχει εφαπτομένη στο $B(-1, 0)$ την ε όταν $h(-1) = 0$ και

$h'(-1) = \lambda_\varepsilon = -2$. Έστω ότι $h(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + \beta x + \gamma}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ οπότε}$$

$h(x) = \frac{x^2}{2} + \beta x + \gamma, a \neq 0$ Η h είναι παραγωγίσιμη με τύπο $h'(x) = x + \beta$, τότε

$$h'(-1) = -2 \Leftrightarrow -1 + \beta = -2 \Leftrightarrow \beta = -1.$$

$$\text{Είναι } h(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 1 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{3}{2}, \text{ οπότε } h(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

$$27. \alpha) \text{ Είναι } f'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{(\sqrt{x})^2} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}. \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 2$.

$$\beta) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \leq 4 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) \leq 4 \quad (1)$$

Επειδή η f έχει ελάχιστο το 2, ισχύει ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x > 0$ και το ίσον

$$\text{ισχύει μόνο για } x = 1, \text{ άρα } f(\alpha) \geq 2, f(\beta) \geq 2 \text{ και } f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \quad (1)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

$$f(\alpha) + f(\beta) = 4 \Leftrightarrow f(\alpha) = f(\beta) = 2 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$$

γ) Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = f(x(t))$ το υλικό σημείο. Είναι

$$x'(t) = 0,5 \text{ cm/sec}. \text{ Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του } M \text{ είναι}$$

$$y'(t) = (f(x(t)))' = f'(x(t))x'(t). \text{ Έστω } t = t_0 \text{ η χρονική στιγμή που το } M$$

διέρχεται από το A , τότε $x(t_0) = 4$, οπότε

$$y'(t_0) = f'(x(t_0))x'(t_0) = f'(4) \cdot 0,5 = \frac{4-1}{2 \cdot 4\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32} \text{ cm/sec}$$

δ) i. Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ ισχύει ότι:

$$A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} = \mathbb{R}^*.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2}} = |x| + \frac{1}{|x|}.$$

ii. Για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi(x) = x + \frac{1}{x}$, οπότε $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x \geq 1.$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(0, 1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει τοπικό ελάχιστο το $\varphi(1) = 2$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $\varphi(x) = -x - \frac{1}{x}$, οπότε $\varphi'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - x^2}{x^2}$

$$\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[-1, 0)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η φ έχει τοπικό ελάχιστο το $\varphi(-1) = 2$.

2^{ος} τρόπος

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η φ είναι παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} \cdot 2x = \frac{x^2 - 1}{x|x|} = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2}, & x > 0 \\ -\frac{x^2 - 1}{x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

ε) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \frac{49}{6} \text{ τ.μ..}$$

28. α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^3 - ax^2 + \beta x + 2 \neq 0$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$, η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha}{x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha = 0 \text{ και}$$

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2 \neq 0, \quad x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha = 0,$$

$$\Delta = (\alpha - 1)^2 + 4\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 > 0 \text{ αφού } \alpha \neq -1$$

$$x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{\alpha - 1 \pm (\alpha + 1)}{2} \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -1$$

Επομένως για να είναι αδύνατη η εξίσωση $f(x) = 0$ πρέπει οι ρίζες του αριθμητή να είναι ρίζες του παρονομαστή για να απορριφθούν από το πεδίο ορισμού της. Άρα έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha\beta + 2 = 0 \\ -1 - \alpha - \beta + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta + 2 = 0 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 - \beta - 2 = 0 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \beta = 2 \text{ Απορρίπτεται ή } \beta = -1 \text{ Δεκτή} \\ \alpha = 2 \end{cases}. \text{ Επομένως για το πεδίο ορισμού της } f$$

$$\text{πρέπει: } x^3 - 2x^2 - x + 2 \neq 0 \quad \begin{matrix} \text{Σχήμα Homer} \\ \text{με } \rho = -1 \end{matrix} \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 3x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$$

$$\beta) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - 3x + 2)} = \frac{\cancel{(x+1)} \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)\cancel{(x-2)}} = \frac{1}{x-1},$$

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$. Η $g(x) = \frac{1}{x-1}$ ορίζεται αν $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ άρα έχει πεδίο ορισμού το $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$. Οι f, g δεν έχουν ίδια πεδία ορισμού επομένως δεν είναι ίσες. Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$ είναι $f(x) = g(x)$ άρα το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο $f = g$ είναι το $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$.

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ με παράγωγο

$$g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0 \text{ άρα } g \searrow (-\infty, 1) \text{ και } g \searrow (1, +\infty).$$

$$\text{Η } g \text{ συνεχής και } g \searrow (-\infty, 1) \text{ άρα: } g((-\infty, 1)) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = (-\infty, 0)$$

$$\text{Η } g \text{ συνεχής και } g \searrow (1, +\infty) \text{ άρα: } g((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \right) = (0, +\infty)$$

Άρα αν $x_1 < 1 < x_2$ τότε $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με $x_1 < x_2$ δεν είναι πάντα $g(x_1) > g(x_2)$ και επομένως η g δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

δ) Θα δείξουμε αρχικά ότι η g αντιστρέφεται.

1^{ος} τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η g είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

2^{ος} τρόπος: Είναι $g((-\infty, 1)) \cap g((1, +\infty)) = \emptyset$ άρα η εξίσωση $g(x) = y$ έχει μοναδική ρίζα ως προς x , επομένως η g είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

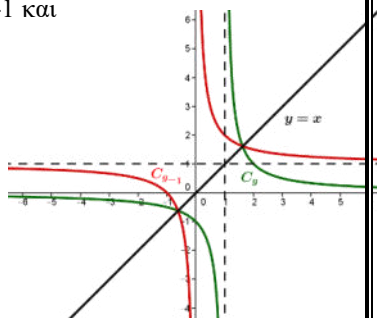
Έστω $g(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y$ (1). Είναι για

$x < 1 \Leftrightarrow g(x) < 0$ και για $x > 1 \Leftrightarrow g(x) > 0$

άρα $g(x) \neq 0$. Άρα για $y \neq 0$ είναι

$$(1) \Leftrightarrow yx - y = 1 \Leftrightarrow yx = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{y+1}{y} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \frac{y+1}{y}, y \neq 0$$



Η g είναι η καμπύλη $y = \frac{1}{x}$ μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Η αντίστροφη της g είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y=x$.

ε) i) Ισχύει ότι $g(x_0) = \lambda x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0 - 1} = \lambda x_0 \Leftrightarrow \lambda x_0^2 - \lambda x_0 = 1$ (A). Ισχύει ότι

$$g'(x_0) = \alpha \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0 - 1)^2} = \lambda \Leftrightarrow -\lambda(x_0^2 - 2x_0 + 1) = 1 \Leftrightarrow -\lambda x_0^2 + 2\lambda x_0 - \lambda = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda x_0^2 + \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda = 1 \stackrel{(A)}{\Leftrightarrow} -1 + \lambda x_0 - \lambda = 1 \stackrel{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} x_0 = \frac{\lambda + 2}{\lambda} \quad (B)$$

$$(A) \Leftrightarrow \cancel{\lambda} \frac{\lambda^2 + 4\lambda + 4}{\lambda^2} - \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{\lambda} = 1 \Leftrightarrow \frac{\cancel{\lambda}^2 + 4\lambda + 4 - \cancel{\lambda}^2 - 2\lambda - \lambda}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

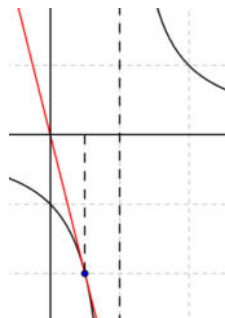
$$(B) \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

ii) Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ με

$$\text{παράγωγο } g''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}. \text{ Είναι } g''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0$$

για κάθε $x < 1$ άρα g κοίλη στο $(-\infty, 1)$.

Η $(\varepsilon): y = -4x$ τέμνει τους άξονες στην αρχή των



αξόνων. Για κάθε $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ η C_g βρίσκεται κάτω από την (ε) εκτός του

σημείου επαφής, δηλαδή $g(x) \leq -4x \Leftrightarrow g(x) + 4x \leq 0$

$$E = \int_0^{\frac{1}{2}} |g(x) + 4x| dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) + 4x) dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-1} + 4x \right) dx =$$

$$-\left[\ln|x-1| + 2x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\left[\ln(1-x) + 2x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

29. α) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{12} - \int_0^1 f(x) dx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $I = \int_0^1 f(x) dx$ τότε $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{12} - I$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Είναι $I = \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow I = \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{12} - I \right) dx \Leftrightarrow$

$$I = \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{12} \right) dx - \int_0^1 I dx \Leftrightarrow I = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}x \right]_0^1 - I(1-0) \Leftrightarrow$$

$$I = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12}x \right]_0^1 - I \Leftrightarrow 2I = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$2I = \frac{3-8+6+1}{12} \Leftrightarrow I = \frac{1}{12}.$$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad , \quad \Delta = 4 \quad , \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x < \frac{1}{3}$ άρα $f \nearrow \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$, $f'(x) < 0$ για κάθε

$x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ άρα $f \searrow \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα $f \nearrow [1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = \frac{1}{3}$ το $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$ και τοπικό ελάχιστο

για $x = 1$ το $f(1) = 0$.

γ) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f''(x) = 6x - 4$

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x < \frac{2}{3}$ άρα f κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x > \frac{2}{3}$ άρα η f κυρτή στο $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει καμπή για $x = \frac{2}{3}$ το $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \equiv \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{27}\right)$.

$$\delta) 3f(x) - 3f\left(\frac{2}{3}\right) = 3f'\left(\frac{2}{3}\right)x - 2f'\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow f(x) = f'\left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής είναι η

$$y = f'\left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Επειδή f κοίλη στο $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ είναι $f(x) \leq f'\left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)$ με την

ισότητα να ισχύει μόνον για $x = \frac{2}{3}$. Επειδή f κυρτή στο $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ είναι

$$f(x) \geq f'\left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνον για } x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Άρα } f(x) = f'\left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{2}{3}f'\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \text{ μόνον για } x = \frac{2}{3}.$$

$$\epsilon) \text{ i) Για το πεδίο ορισμού της } h \text{ πρέπει: } \begin{cases} x \in D_f \\ x \in D_g \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \\ x(x-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } D_h = \mathbb{R} - \{0, 1\} \text{ και } h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 + 2x - 2}{x(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$\text{ii) } h(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{\Gamma}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 2}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + \Gamma x}{x(x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{x(x-1)^2} = \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + \Gamma x}{x(x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + 2x - 2}{x(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+\Gamma)x + A}{x(x-1)^2}$$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B+\Gamma=2 \\ A=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=3 \\ \Gamma=1 \\ A=-2 \end{cases} \text{ . Άρα } h(x) = -\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\text{iii)} \int_2^3 h(x) dx = \int_2^3 \left(-\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \left[-2 \ln|x| + 3 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right]_2^3 =$$

$$= \left[-2 \ln x + 3 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \right]_2^3 = -2 \ln 3 + 3 \ln 2 - \frac{1}{2} + 2 \ln 2 + 1 = -2 \ln 3 + 5 \ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$30. \alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 4^x + \frac{14}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3^x - 4^x}{x} + \frac{14}{x^2} \right) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 4^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \left(\left(\frac{3}{4} \right)^x - 1 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4^x}{x} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^x - 1 \right) \right] = +\infty (0-1) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \ln 4}{1} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14}{x^2} \stackrel{x^2=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{14}{u} = 0$$

Άρα η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3^x - 4^x + \frac{14}{x} \right) = 1 - 1 + (+\infty) = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{14}{x} \stackrel{x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{14}{u} = +\infty$$

Άρα η $x=0$ δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Είναι $f(0)=0$ άρα το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με την ασύμπτωτή της είναι το κέντρο των αξόνων.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x - 4^x + \frac{14}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3^x - 4^x}{x} + \frac{14}{x^2} \right) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x - 4^x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\text{DLH } x \rightarrow 0^+} \frac{3^x \ln 3 - 4^x \ln 4}{1} = \ln 3 - \ln 4 = \ln \frac{3}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{14}{x^2} \stackrel{x^2=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{14}{u} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 επομένως δεν δέχεται εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων.

2ος τρόπος: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3^x - 4^x + \frac{14}{x} \right) = +\infty$ άρα η f δεν είναι συνεχής στο μηδέν επομένως δεν είναι και παραγωγίσιμη.

β) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο: $f'(x) = 3^x \ln 3 - 4^x \ln 4 - \frac{14}{x^2} < 0$

γιατί

- $1 < 3 < 4 \Rightarrow 0 < 3^x < 4^x$ και $1 < 3 < 4 \Leftrightarrow 0 < \ln 3 < \ln 4$ επομένως $3^x \ln 3 < 4^x \ln 4$
- $x^2 > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα $-\frac{14}{x^2} < 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

$(0, +\infty)$ και συνεχής άρα: $f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) =]\mathbb{R}$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3^x - 4^x + \frac{14}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4^x \left(\left(\frac{3}{4} \right)^x - 1 \right) + \frac{14}{x} \right] = -\infty$$

Για να είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \geq 0$ με $x_1 < x_2$ να ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Για $x_1 = 0$ υπάρχει $x_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$x_1 = 0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow 0 < f(x_2)$ αφού η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος: Παρατηρούμε ότι $f(1) = 3 - 4 + 14 = 13 > 0$ άρα

$0 < 1 \Rightarrow f(0) < f(1)$.

γ) Είναι $f(2) = 0$ και $f(0) = 0$.

Για $0 < x < 2 \Rightarrow f(x) > f(2) = 0$ και για $x > 2 \Rightarrow f(x) < f(2) = 0$.

δ) Είναι $g(x) = f(x) - 3^x + 4^x = \frac{14}{x}$, $x > 0$

Στο $[1, 2]$ είναι $g(x) > 0$ (προφανώς και στο $[1, \lambda]$ αφού $1 < \lambda < 2$) άρα το εμβαδόν που διχοτομείται είναι:

$$E_1 = \int_1^2 |g(x)| dx = \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \frac{14}{x} dx = [14 \ln |x|]_1^2 = [14 \ln x]_1^2 = 14 \ln 2 \text{ τ.μ.}$$

Άρα ισχύει $\int_1^\lambda g(x) dx = 7 \ln 2 \Leftrightarrow [14 \ln x]_1^\lambda = 7 \ln 2 \Leftrightarrow 14 \ln \lambda = 7 \ln 2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{2}$.

31. α) Επειδή η ευθεία ε εφαπτεται της C_f στο A ισχύει ότι $f'(1) = \lambda_\varepsilon = 1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda x} \cdot x - \ln(\lambda x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(\lambda x)}{x^2}$,

οπότε $f'(1) = 1 \Leftrightarrow 1 - \ln \lambda = 1 \Leftrightarrow \ln \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

β) Είναι $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$.

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (e, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως

φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Έχει ολικό μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty(+\infty) = -\infty$, οπότε η ευθεία

$x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$ οπότε η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f . Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

δ) $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha \Leftrightarrow \ln \alpha^{\alpha+1} > \ln (\alpha+1)^\alpha \Leftrightarrow (\alpha+1) \ln \alpha > \alpha \ln (\alpha+1) \Leftrightarrow$

$\frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln (\alpha+1)}{\alpha+1} \Leftrightarrow f(\alpha) > f(\alpha+1) \Leftrightarrow \alpha < \alpha+1 \stackrel{\searrow (e, +\infty)}{\text{ισχύει}}$

ε) $x^e \leq \alpha^x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln \alpha^x \Leftrightarrow e \ln x \leq x \ln \alpha \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln \alpha}{e} \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\ln \alpha}{e}$.

Είναι $f(x) \leq \frac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$, άρα πρέπει $\frac{1}{e} \leq \frac{\ln \alpha}{e} \Leftrightarrow \ln \alpha \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \geq e$.

στ) $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2}$

32. α) Είναι $f(x) \geq 0$ οπότε για $\lambda > 1$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^\lambda = -\frac{1}{\lambda} + 1$ και για $0 < \lambda < 1$ το ζητούμενο

εμβαδόν είναι $E(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x) dx = \int_\lambda^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_\lambda^1 = -1 + \frac{1}{\lambda}$.

β) Για $\lambda > 1$: $E(\lambda) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 + 2\lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$ δεκτή.

Για $0 < \lambda < 1$: $E(\lambda) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\lambda + 2 = \lambda \Leftrightarrow -3\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

δεκτή.

γ) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\lambda} \right) = +\infty$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) = 1$

δ) i) Για $x \neq 0$: $g(x) = \frac{1}{f(x)} + 1 = x^2 + 1$.

Είναι $g(x) \leq 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 5 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1 = g(0)$. Η g συνεχής στο $[-2, 0) \cup (0, 2]$ σαν πολυωνυμική. Άρα η g είναι συνεχής στο $[-2, 2]$.

Το εμβαδόν που περικλείεται από την C_g και την ευθεία $y = 5$, είναι:

$$E = \int_{-2}^2 (5 - x^2 - 1) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx =$$

$$\left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \text{ τ.μ.}$$

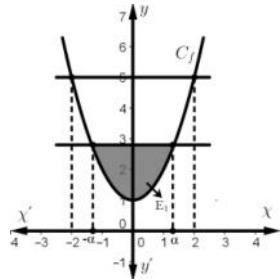
ii) Για τα σημεία τομής της ευθείας $y = \alpha^2 + 1$ με τη C_g , έχουμε:

$$g(x) = \alpha^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \alpha^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm \alpha.$$

Το χωρίο που περικλείεται από την ευθεία $y = \alpha^2 + 1$ και την C_f , έχει εμβαδόν:

$$E_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 + 1 - f(x)) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 + 1 - x^2 - 1) dx = \left[\alpha^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{4\alpha^3}{3}.$$

Πρέπει $E_1 = \frac{1}{2} E \Leftrightarrow \frac{4\alpha^3}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} \Leftrightarrow 4\alpha^3 = 16 \Leftrightarrow \alpha^3 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{4}$.



33. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2 \frac{(x^2 - x + 1)'}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1} = f'(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2(\sqrt{x^2 - x + 1} - x) - 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{x^{\cancel{x}} - x + 1 - x^{\cancel{x}}}{x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\cancel{x} \left(-1 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} - 1 \right) = -2$$

β) Η f είναι συνεχής στο $+\infty$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x}} = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -2, \text{ οπότε η ευθεία } y = 2x - 2 \text{ είναι}$$

πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - 1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(-2\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x}} = -2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1 + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2(\sqrt{x^2 - x + 1} + x) - 1) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} - 1 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} - x} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{x^{\cancel{x}} - x + 1 - x^{\cancel{x}}}{-x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{\cancel{x} \left(-1 + \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} - 1 \right) = 0, \text{ οπότε}$$

η ευθεία $y = -2x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Επειδή η f έχει πλάγιες ασύμπτωτες, δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

γ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$, είναι $\lambda = f'(0) = -1$. Όμως $\lambda = \varepsilon\varphi\omega$, άρα $\varepsilon\varphi\omega = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$.

δ) Είναι $f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \Leftrightarrow f'(x)\sqrt{x^2-x+1} = 2x-1$ (1) και

$$f(x) = 2\sqrt{x^2-x+1} - 1 \Leftrightarrow f(x) + 1 = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1} = \frac{f(x)+1}{2} \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f'(x) \frac{f(x)+1}{2} = 2x-1 \Leftrightarrow f'(x)(f(x)+1) =$

$$4x-2, \text{ άρα } [f'(x)(f(x)+1)]' = (4x-2)' \Leftrightarrow f''(x)(f(x)+1) +$$

$$f'(x)f'(x) = 4 \Leftrightarrow f''(x)(f(x)+1) + (f'(x))^2 = 4$$

ε) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$,

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι

$f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, είναι γνησίως αύξουσα

στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1 \leq x \leq 2$ είναι $f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 2\sqrt{3}-1$ και επειδή οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x = 1$ και $x = 2$ αντίστοιχα, είναι $\int_1^2 1 dx < \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 (2\sqrt{3}-1) dx \Leftrightarrow 1 < \int_1^2 f(x) dx < 2\sqrt{3}-1$.

34. Α. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η f συνεχής, πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + \lambda) = 1 + \lambda = f(0), \text{ άρα } 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1.$$

Β. α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x} = -\infty$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

β) Για $x < 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x$. Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x + 1$.

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, \frac{1}{e}\right]$ και για κάθε $x > \frac{1}{e}$ είναι

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(0) = 0$ και τοπικό

$$\text{ελάχιστο το } f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

$$\gamma) \alpha^a + \beta^b \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow e^{\ln \alpha^a} + e^{\ln \beta^b} \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow e^{a \ln \alpha} + e^{b \ln \beta} \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow e^{f(\alpha)} + e^{f(\beta)} \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}}$$

Στο $(0, +\infty)$ η f έχει ελάχιστο το $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ άρα $f(x) \geq -\frac{1}{e}$ για κάθε $x > 0$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{1}{e}$, οπότε

$$f(\alpha) \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow a \ln \alpha \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln \alpha^a \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha^a \geq e^{-\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \alpha^a \geq \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \quad (1) \text{ και}$$

$$f(\beta) \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow b \ln \beta \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \ln \beta^b \geq -\frac{1}{e} \Leftrightarrow \beta^b \geq e^{-\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \beta^b \geq \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \quad (2)$$

Από (1)+(2) $\Rightarrow \alpha^a + \beta^b \geq \frac{2}{\sqrt[e]{e}}$. Άρα η σχέση $\alpha^a + \beta^b \leq \frac{2}{\sqrt[e]{e}}$ ισχύει μόνο όταν

$$\alpha^a = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{e} \text{ και } \beta^b = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{e}.$$

$$\delta) E(\Omega) = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \ln x \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \left[\ln x \frac{x^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2 + 1}{4} \tau.μ.$$

Επίπεδο δυσκολίας Γ Θέματος

Επίπεδο Γ1

$$35. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(2x) + xf(0)}{x} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(3x) - f(2x)}{x} + \frac{xf(0)}{x} \right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(3x) - f(0) - f(2x) + f(0)}{x} + f(0) \right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(3x) - f(0)}{x} - \frac{f(2x) - f(0)}{x} + f(0) \right) = 3 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \frac{f(3x) - f(0)}{3x} - 2 \frac{f(2x) - f(0)}{2x} + f(0) \right) = 3 \quad (1). \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(0)}{x} \stackrel{3x=u \Leftrightarrow x=\frac{u}{3}}{=} \lim_{x \rightarrow 0 \Leftrightarrow u \rightarrow 0} \frac{f(u) - f(0)}{\frac{u}{3}} = \lim_{u \rightarrow 0} 3 \frac{f(u) - f(0)}{u} = 3f'(0) \text{ και}$$

$$\text{όμοια } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} = 2f'(0), \text{ οπότε η (1) γίνεται}$$

$$3f'(0) - 2f'(0) + f(0) = 3 \Leftrightarrow f'(0) + f(0) = 3$$

$$\beta) xf''(x) + f'(x) = 2xe^x + 2e^x - 4x \Leftrightarrow$$

$$(xf'(x))' = (2xe^x - 2x^2)' \Leftrightarrow xf'(x) = 2xe^x - 2x^2 + c, c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } 0 \cdot f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^0 - 2 \cdot 0^2 + c \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } xf'(x) = 2xe^x - 2x^2$$

και για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = 2e^x - 2x$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι συνεχής στο $x = 0$, οπότε

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2e^x - 2x) = 2 \text{ και } 2 + f(0) = 3 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

2ος τρόπος: Από τη σχέση $xf''(x) + f'(x) = 2xe^x + 2e^x - 4x$ έχουμε

$$0 + f'(0) = 0 + 2 - 0 \Leftrightarrow f'(0) = 2 \text{ και } 2 + f(0) = 3 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

γ) Για κάθε $x < 0$ είναι

$$f'(x) = 2e^x - 2x = (2e^x - x^2)' \Leftrightarrow f(x) = 2e^x - x^2 + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \text{ και για}$$

$$x > 0 \text{ είναι } f'(x) = 2e^x - 2x = (2e^x - x^2)' \Leftrightarrow f(x) = 2e^x - x^2 + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $x = 0$,

$$\text{οπότε } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2e^x - x^2 + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(2e^x - x^2 + c_2) \Leftrightarrow$$

$$1 = 2 + c_1 = 2 + c_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = -1. \text{ Άρα}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^x - x^2 - 1, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = 2e^x - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}.$$

δ) Είναι $f''(x) = 2e^x - 2$. Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f' έχει ελάχιστο το $f'(0) = 2$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 2$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος

$$f'(x) = 2e^x - 2x = 2(e^x - x) > 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

(από τη σχέση $\ln x \leq x - 1 < x$ έχουμε $\ln e^x < e^x \Leftrightarrow e^x > x$)

$$\epsilon) f(x) \geq (2e - 2 - \lambda)x + \lambda \Leftrightarrow f(x) - (2e - 2 - \lambda)x - \lambda \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Έστω } h(x) = f(x) - (2e - 2 - \lambda)x - \lambda, x \geq 0.$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } h(1) = f(1) - (2e - 2 - \lambda) - \lambda = 2e - 2 - 2e + 2 - \lambda + \lambda = 0,$$

Η (2) γίνεται $h(x) \geq h(1)$, οπότε η h έχει ελάχιστο στο $x = 1$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $h'(x) = f'(x) - (2e - 2 - \lambda)$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat, είναι $h'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) - 2e + 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 2e - 2 - 2e + 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x^2 - 1) = 0 - \infty - 1 = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(2 - \frac{x^2}{e^x} - e^{-x} \right) \right] = +\infty (2 - 0 - 0) = +\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα $A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

$$\text{Έστω } I = \int_1^{2e-2} f^{-1}(x) dx, \text{ θέτω } f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u) \text{ και } dx = f'(u) du. \text{ Για}$$

$$x = 1 \text{ είναι } f(u) = 1 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0 \text{ και για } x = 2e - 2 \text{ είναι}$$

$$f(u) = 2e - 2 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1. \text{ Άρα}$$

$$I = \int_1^{2e-2} f^{-1}(x) dx = \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^1 u(2e^u - 2u) du = 2 \int_0^1 (ue^u - u^2) du \Leftrightarrow$$

$$I = 2 \int_0^1 ue^u du - 2 \int_0^1 u^2 du = 2 \int_0^1 u(e^u)' du + 2 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$I = 2 \left[ue^u \right]_0^1 - 2 \int_0^1 e^u du - 2 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$I = 2 \left[ue^u \right]_0^1 - 2 \left[e^u \right]_0^1 - 2 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = 2e - 2e + 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \tau. \mu.$$

36. α) Έστω ότι $f(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_v \neq 0$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_v x^v}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_v x^{v-2}.$$

Αν $v > 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{v-2} = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{αν } \alpha_v > 0 \\ -\infty & \text{αν } \alpha_v < 0 \end{cases}$ που

απορρίπτεται.

Αν $v = 0$ ή 1 τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0 \neq 1$ απορρίπτεται. Άρα $v = 2$, οπότε

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0. \text{ Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Έστω $\frac{f(x)}{x-1} = g(x)$, $x \neq 1$ με $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$. Τότε

$$f(x) = g(x)(x-1) \Leftrightarrow x^2 + \beta x + \gamma = g(x)(x-1) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \beta x + \gamma) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x-1) \Leftrightarrow 1 + \beta + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\beta - 1. \text{ Τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \beta x - \beta - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1) + \beta(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+\beta)}{x-1} = 2 + \beta.$$

Είναι $2 + \beta = -1 \Leftrightarrow \beta = -3$ και $\gamma = -(-3) - 1 = 2$, οπότε

$$f(x) = x^2 - 3x + 2, x \in \mathbb{R}.$$

β) Έστω $N(x, f(x))$ σημείο της C_f .

Η απόσταση του N από την ευθεία $\varepsilon: y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$ είναι

$$d(N, \varepsilon) = \frac{|x + f(x)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x + x^2 - 3x + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |x^2 - 2x + 2|$$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x + 2$ έχει $\Delta = -4 < 0$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$x^2 - 2x + 2 > 0$, οπότε $d(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$. Η d είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με $d'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x - 2)$.

Για κάθε $x < 1$ είναι $d'(x) < 0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 1$ είναι $d'(x) > 0$ και επειδή η d είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για $x = 1$, τότε $N(1, 0)$.

γ) Έστω $K(x_0, f(x_0))$.

Επειδή το τρίγωνο που σχηματίζει η εφαπτομένη στο K με τους άξονες είναι ορθογώνιο, όταν θα είναι και ισοσκελές, οι οξείες γωνίες του θα είναι 45° . Τότε η γωνία κλίσης της εφαπτομένης θα είναι 45° ή 135° .

Άρα $\lambda = f'(x_0) = \tan 45^\circ = 1$ ή $\lambda = f'(x_0) = \tan 135^\circ = -1$

Είναι $f'(x) = 2x - 3$, άρα

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = 1 \Leftrightarrow 2x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 2 \text{ ή}$$

$$f'(x_0) = -1 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = -1 \Leftrightarrow 2x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1. \text{ Οι ζητούμενες εφαπτομένες}$$

είναι οι ευθείες $\varepsilon_1: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = x - 2$ και

$$\varepsilon_2: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 1.$$

δ) Έστω $M(x, f(x))$ σημείο της C_f με $1 < x < 2$.

Το τρίγωνο MAB έχει εμβαδό

$$E = \frac{1}{2}(AB)d(M, x'x) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |f(x)| = \frac{1}{2}(-x^2 + 3x - 2).$$

Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 3x - 2)$, $x \in (1, 2)$.

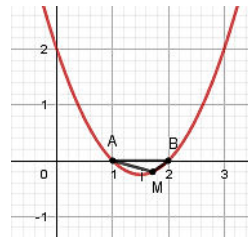
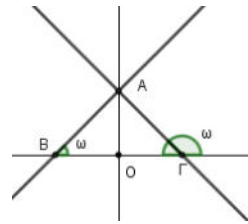
$$\text{Είναι } E'(x) = \frac{1}{2}(-2x + 3)$$

$$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-2x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}. \text{ Για κάθε } x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ είναι}$$

$$E'(x) > 0 \text{ και επειδή η } E \text{ είναι συνεχής στο } \left(1, \frac{3}{2}\right], \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο}$$

διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ είναι $E'(x) < 0$

και επειδή η E είναι συνεχής στο $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα



αυτό. Το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο για $x = \frac{3}{2}$, τότε

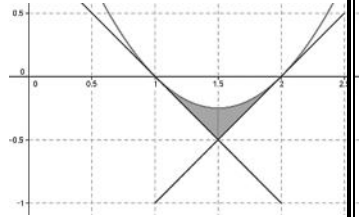
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4}, \text{ άρα } M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

ε) Επειδή το εμβαδόν περικλείεται από 3 συναρτήσεις χρειάζεται σχήμα.

Η f είναι μία παραβολή με κορυφή το $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ και ρίζες το 1 και το 2.

Είναι $f''(x) = 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Οι δύο ευθείες τέμνονται στο

$M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :



$$\begin{aligned} E &= \int_1^{\frac{3}{2}} |f(x) + x - 1| dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 |f(x) - x + 2| dx = \\ &= \int_1^{\frac{3}{2}} (f(x) + x - 1) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (f(x) - x + 2) dx = \\ &= \int_1^{\frac{3}{2}} (x^2 - 2x + 1) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (x-1)^2 dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (x-2)^2 dx = \\ &= \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \text{ τετραγωνικές μονάδες} \end{aligned}$$

37. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\epsilon\phi x - \sqrt{3}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\epsilon\phi x - \sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi x \leq -\sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x \leq \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x \leq -\frac{\pi}{3}.$$

Η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επομένως $f'(x) > 0$ στο $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$, $f'(x) < 0$ στο $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ οπότε η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα

παρουσιάζει μέγιστο στο $-\frac{\pi}{3}$ το

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \ln\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = \ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} = -\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (\ln(\sin x) - \sqrt{3} \cdot x) = -\infty$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \ln(\sin x) \stackrel{\sin x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+ \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\ln(\sin x) - \sqrt{3} \cdot x) = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(\sin x) \stackrel{\sin x = u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty$$

Έστω $A_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$ και $A_2 = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$. Λόγω της μονοτονίας στα

αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} f(x)\right) = \left(-\infty, f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\infty, -\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$f(A_2) = \left[\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x), f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = \left[-\infty, -\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right] = \left(-\infty, -\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right].$$

$$\text{Επομένως } f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = f(A_1) \cup f(A_2) = \left(-\infty, -\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\right].$$

γ) Έχουμε : $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} > \frac{\pi}{2} > 1 = \ln e > \ln 2$ οπότε $-\ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} > 0$.

Για να τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία πρέπει η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο ακριβώς ρίζες. Το 0 ανήκει στα $f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Τα x_1, x_2 μοναδικά, λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα A_1, A_2 .

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$k(x) = f(x) - x^2 + \sqrt{3} \cdot x = \ln(\sin(x)) - \cancel{\sqrt{3} \cdot x} - x^2 + \cancel{\sqrt{3} \cdot x} \Leftrightarrow$$

$$k(x) = \ln(\sin(x)) - x^2. \text{ Η } k \text{ είναι συνεχής στο } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \text{ παραγωγίσιμη στο}$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right). \text{ Είναι } k\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) - \frac{\pi^2}{16} = \ln\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi^2}{16} = k\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιος ώστε

$$k'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\varepsilon\phi x_0 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow -\varepsilon\phi x_0 = 2x_0 \Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon\phi x_0 - \sqrt{3} = 2x_0 - \sqrt{3} \Leftrightarrow f'(x_0) = 2x_0 - \sqrt{3}.$$

ε) Για την συνάρτηση f ισχύει το ΘΜΤ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow -\varepsilon\phi\xi - \sqrt{3} = \frac{\ln(\sin\beta) - \sqrt{3} \cdot \beta - \ln(\sin\alpha) + \sqrt{3} \cdot \alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon\phi\xi - \sqrt{3} = \frac{\ln(\sin\beta) - \ln(\sin\alpha)}{\beta - \alpha} - \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\xi = \frac{\ln(\sin\alpha) - \ln(\sin\beta)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi\xi = \frac{\ln \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}{\beta - \alpha}. \text{ Όμως } \alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow \varepsilon\phi\alpha < \varepsilon\phi\xi < \varepsilon\phi\beta \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi\alpha < \frac{\ln \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}{\beta - \alpha} < \varepsilon\phi\beta \Leftrightarrow (\beta - \alpha)\varepsilon\phi\alpha < \ln \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < (\beta - \alpha)\varepsilon\phi\beta$$

στ) Θέτω $\sin x = u$ τότε $-\eta\mu x \, dx = du$ και για $x=0$ είναι $u=1$ και για

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ είναι } u = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) \eta\mu x \, dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \ln u \, du = -[u \ln u]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du = \\ &= -[u \ln u]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [u]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) \eta\mu x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln(\sin x) \eta\mu x - \sqrt{3} x \eta\mu x) \, dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) \eta\mu x \, dx - \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \eta\mu x \, dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \sqrt{3} \left([-x \sin x]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \sqrt{3} [x \sin x]_0^{\pi/4} - \sqrt{3} \int_0^{\pi/4} \sin x \, dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \sqrt{3} \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} [\eta\mu x]_0^{\pi/4} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \sqrt{3} \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{\ln 2}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2 \ln 2 + 4 - 4\sqrt{2} + \pi\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2} \frac{\ln 4 - 4\sqrt{2} + \pi\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4}{4}. \end{aligned}$$

38. α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Έστω (ε) η εφαρμοσμένη της γραφικής παράστασης της f στο A . Για να ταυτίζεται με την (δ) πρέπει

$$\lambda_{(\varepsilon)} = \lambda_{(\delta)} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{\sqrt[3]{\xi} + \sqrt[3]{\xi}}{\xi + 5\xi} \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}} = \frac{2\sqrt[3]{\xi}}{6\xi} \Leftrightarrow \cancel{\delta}\xi = \cancel{\delta}\sqrt[3]{\xi} \Leftrightarrow \xi = \xi$$

ισχύει.

β) i) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - 2}{\sqrt{8x} - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{8x} - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt{8x} + 8)}{(\sqrt{8x}^2 - 64)(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x - 8)(\sqrt{8x} + 8)}{(8x - 64)(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\cancel{(x - 8)}(\sqrt{8x} + 8)}{8\cancel{(x - 8)}(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{8x} + 8}{8(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{16}{96} = \frac{1}{6}.$$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x+2) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}) \stackrel{u = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow 0^+}} \ln u = -\infty$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+2}^3 - \sqrt[3]{x}^3}{\sqrt[3]{x+2}^2 + \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x}}{\sqrt[3]{x+2}^2 + \sqrt[3]{x+2} \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x}^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} + 1} = 0$$

iii) $\lim_{x \rightarrow 6} \left[\eta\mu(f(x+2) - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 45} - 9} \right] = \lim_{x \rightarrow 6} \left[\frac{\eta\mu(f(x+2) - 2)}{f(x+2) - 2} \cdot \frac{f(x+2) - 2}{\sqrt{x^2 + 45} - 9} \right] = \frac{1}{8}$

αφού $\lim_{x \rightarrow 6} \left[\frac{\eta\mu(f(x+2) - 2)}{f(x+2) - 2} \right] \stackrel{u = f(x+2) - 2 = \sqrt[3]{x+2} - 2}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 6, \\ u \rightarrow 0}} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x+2) - 2}{\sqrt{x^2 + 45} - 9} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt[3]{x+2} - 2}{\sqrt{x^2 + 45} - 9} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt[3]{x+2} - 8)(\sqrt{x^2 + 45} + 9)}{(\sqrt{x^2 + 45}^2 - 81)(\sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt[3]{x+2} + 4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x+2-8)(\sqrt{x^2+45}+9)}{(x^2+45-81)(\sqrt[3]{x+2}^2+2 \cdot \sqrt[3]{x+2}+4)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-6)(\sqrt{x^2+45}+9)}{(x^2-36)(\sqrt[3]{x+2}^2+2 \cdot \sqrt[3]{x+2}+4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\cancel{(x-6)}(\sqrt{x^2+45}+9)}{\cancel{(x-6)}(x+6)(\sqrt[3]{x+2}^2+2 \cdot \sqrt[3]{x+2}+4)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x^2+45}+9}{(x+6)(\sqrt[3]{x+2}^2+2 \cdot \sqrt[3]{x+2}+4)} = \frac{\sqrt{36+45}+9}{\cancel{1}^{\frac{3}{2}} \cdot 12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

γ) Για το πεδίο ορισμού της g έχουμε : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{R} .$ Επίσης

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, x < 0 \end{cases} . \text{ Η g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα } (-\infty, 0), (0, +\infty)$$

$$\text{με παραγώγους αντίστοιχα } g'(x) = -\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}, g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} .$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \text{ άρα δεν είναι}$$

παραγωγίσιμη στο 0.

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f''(x) = \frac{1}{3} \left(x^{-\frac{2}{3}} \right)' = -\frac{2}{9} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^5}} < 0 \text{ άρα η } f' \text{ είναι γνησίως φθίνουσα}$$

στο $(0, +\infty)$. Για $x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x \xrightarrow{f'} \Leftrightarrow f(x^2) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < f(x^2) \Rightarrow$

$$\int_a^{\beta} f(x) dx < \int_a^{\beta} f(x^2) dx \quad (1) \text{ και}$$

$$x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x \xrightarrow{f'} \Leftrightarrow f'(x^2) < f'(x) \Rightarrow \int_a^{\beta} f'(x^2) dx < \int_a^{\beta} f'(x) dx \quad (2).$$

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε

$$\int_a^{\beta} f(x) dx + \int_a^{\beta} f'(x^2) dx < \int_a^{\beta} f(x^2) dx + \int_a^{\beta} f'(x) dx .$$

39. α) Έστω $M(x, 3 \ln x)$ σημείο της γραφικής παράστασης της f .

Η απόσταση των σημείων A, M είναι ίση με $d(x) = (AM) = \sqrt{x^2 + \left(3 \ln x - \frac{1}{3}\right)^2}$.

Η d είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$d'(x) = \frac{2x + 2 \cdot \frac{3 \left(3 \ln x - \frac{1}{3}\right)}{x}}{2 \sqrt{x^2 + (3 \ln x - 1)^2}} = \frac{x^2 + 9 \ln x - 1}{x \cdot \sqrt{x^2 + (3 \ln x - 1)^2}}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + 9 \ln x - 1, x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2x + \frac{9}{x} > 0$ οπότε η g είναι γνησίως

αύξουσα. Έχουμε $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow x \geq 1$. Η d είναι συνεχής στο

$(0, +\infty)$. Είναι $d'(x) = \frac{g(x)}{x \sqrt{x^2 + (3 \ln x - 1)^2}} > 0$ για $x > 1$,

$d'(x) = \frac{g(x)}{x \sqrt{x^2 + (3 \ln x - 1)^2}} < 0$ για $x < 1$, οπότε η d είναι γνησίως αύξουσα

στο $[1, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $d(1) = \sqrt{2}$. Το ζητούμενο σημείο είναι το $(1, 0)$.

β) Έστω $\Gamma(x_0, f(x_0))$, $x_0 > 0$ το σημείο επαφής της (ε) με την γραφική παράσταση της f . Η (ε) έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 3 \ln x_0 = \frac{3}{x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3}{x_0} \cdot x + 3 \ln x_0 - 3. \text{ Το σημείο } B \text{ ανήκει στην } (\varepsilon) \text{ οπότε:}$$

$$3 = 3 \ln x_0 - 3 \Leftrightarrow 3 \ln x_0 = 6 \Leftrightarrow \ln x_0 = 2 \Leftrightarrow x_0 = e^2 \text{ και } (\varepsilon): y = \frac{3}{e^2} x + 3.$$

γ) Έστω (ζ) κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων της

$$g(x) = \frac{f(x)}{3} = \ln x \text{ και της παραβολής } h(x) = y = \frac{x^2}{2}.$$

Έστω $\Delta(x_1, g(x_1))$, $x_1 > 0$, $E(x_2, h(x_2))$, τα σημεία επαφής της (ζ) με τις γραφικές παραστάσεις των g, h αντίστοιχα. Η (ζ) έχει εξισώσεις αντίστοιχα

$$\zeta: y - g(x_1) = g'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x_1} \cdot x + \ln x_1 - 1.$$

$$\text{και } y - h(x_2) = h'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y - \frac{x_2^2}{2} = x_2(x - x_2) \Leftrightarrow y = x_2 \cdot x - \frac{x_2^2}{2}.$$

$$\text{Εφ' όσον πρόκειται για την ίδια ευθεία πρέπει : } \begin{cases} x_2 = \frac{1}{x_1} \\ \ln x_1 - 1 = -\frac{x_2^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{x_1} \\ \ln x_1 - 1 = -\frac{1}{2x_1^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{x_1} \\ 2x_1^2 \ln x_1 - 2x_1^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{1}{x_1} \\ 2x_1^2 (\ln x_1 - 1) + 1 = 0(1) \end{cases}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x) = 2x^2 (\ln x - 1) + 1$.

Η k είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$k'(x) = 4x(\ln x - 1) + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} = 4x(\ln x - 1) + 2x \Leftrightarrow k'(x) = 2x(2\ln x - 1).$$

$$\text{Έχουμε : } k'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x(2\ln x - 1) \geq 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x \geq 1$$

$$\ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Η k συνεχής στο πεδίο ορισμού της σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $k'(x) > 0$ στο $(\sqrt{e}, +\infty)$, $k'(x) < 0$ στο $(0, \sqrt{e})$ οπότε η k είναι

γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{e}, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0, \sqrt{e}]$ άρα

παρουσιάζει μέγιστο στο $\sqrt{e}$ το $k(\sqrt{e}) = 2e\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -e + 1$.

Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα $A_1 = (0, \sqrt{e}]$, $A_2 = (\sqrt{e}, +\infty)$ έχουμε λόγω της

μονοτονίας στα διαστήματα αυτά : $k(A_1) = \left[k(\sqrt{e}), \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) \right) = [-e + 1, -1)$,

$k(A_2) = \left[k(\sqrt{e}), \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) \right) = [-e + 1, +\infty)$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [2x^2 (\ln x - 1)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{\frac{1}{2x^2}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2) = 0 \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [2x^2 (\ln x - 1) - 1] = 0 - 1 = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x^2 (\ln x - 1) - 1] = +\infty \cdot (+\infty - 1) - 1 = +\infty.$$

Το 0 ανήκει μόνο στο $k(A_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικός (λόγω της μονοτονίας της k) $\xi \in A_2$ τέτοιος ώστε $k(\xi) = 0$. Άρα η εξίσωση $2x^2(\ln x - 1) - 1 = 0$ έχει μοναδική λύση, οπότε υπάρχει μοναδική κοινή εφαπτομένη.

$$\delta) f'(x) = x \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt \Leftrightarrow f'(x) = x \left[f(\ln t) \right]_e^{e^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = xf(2) - xf(1) \Leftrightarrow f'(x) - xf(2) = 0.$$

$$\text{Έστω η συνάρτηση } b(x) = f'(x) - xf(2) = \frac{3}{x} - 3x \ln 2, \quad x \in [1, 3].$$

$$\text{Είναι } b(1) = 3 - 3 \ln 2 = 3(1 - \ln 2) > 0 \text{ και } b(3) = 1 - 9 \ln 2 = \ln e - \ln 2^9 < 0.$$

Επειδή $b(1)b(3) < 0$ και η b είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, οπότε από θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$$b(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - xf(2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt \text{ έχει ρίζα στο } (1, 3).$$

$$\text{Η } b \text{ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο } b'(x) = -\frac{3}{x^2} - 3 \ln 2 < 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

άρα η b είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

40. α) Με παραγωγή της σχέσης που μας δίνεται κατά μέλη έχουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) + f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\underbrace{3f^2(x) + 2f(x) + 1}_{>0} \right) f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{e^x - 1}{3f^2(x) + 2f(x) + 1}. \text{ (Θέτουμε}$$

$$f(x) = \omega \text{ οπότε έχουμε το τριώνυμο } 3\omega^2 + 2\omega + 1, \text{ το οποίο έχει διακρίνουσα}$$

$$\Delta = -8 < 0 \text{ άρα είναι θετικό για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Επομένως } 3f^2(x) + 2f(x) + 1 > 0$$

$$). \text{ Έχουμε } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{3f^2(x) + 2f(x) + 1} \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R}, \text{ άρα συνεχής στο } \mathbb{R}.$$

Όμως $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 το $f(0) = 0$ γιατί

$$f^3(0) + f^2(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) \left(\underbrace{f^2(0) + f(0) + 1}_{\neq 0} \right) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

$$\text{Θέτουμε } f(x) = \omega \text{ οπότε έχουμε το τριώνυμο } \omega^2 + \omega + 1, \text{ το οποίο έχει}$$

διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$ άρα είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $f^2(0) + f(0) + 1 \neq 0$

β) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 άρα $f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

γ) Έστω $A_1 = (-\infty, 0)$ και $A_2 = [0, +\infty)$.

Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left(f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left(0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right),$$

$$f(A_2) = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \left[0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right].$$

Έστω $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^3(x) + f^2(x) + f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) \Leftrightarrow k^3 + k^2 + k = +\infty \text{ άτοπο ,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^3(x) + f^2(x) + f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty \Leftrightarrow$$

$$l^3 + l^2 + l = +\infty \text{ άτοπο αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{+\infty}{\stackrel{+\infty}{\text{DLH}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty . \text{ Άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Τότε : $f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) = (0, +\infty) \cup [0, +\infty) = [0, +\infty)$.

δ) Το $2024 \in f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 2024$.

Τα x_1, x_2 μοναδικά λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα.

$$\begin{aligned} \epsilon) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right) \right) \eta \mu \frac{1}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} \right) &= +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta \mu u}{u} = 1 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την F στο $\left[\frac{x}{2}, x \right]$ και έχουμε ότι υπάρχει

$\xi \in \left(\frac{x}{2}, x\right)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)}{x - \frac{x}{2}} \Leftrightarrow f(x) = 2 \frac{F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)}{x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{2} = \frac{F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)}{x}.$$

$$\text{Για } 0 \leq \frac{x}{2} < \xi < x \Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) < f(\xi) < f(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) < \frac{F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)}{x} < f(x)$$

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{2}\right) \stackrel{\frac{x}{2}=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x) - F\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = +\infty.$$

41. α) Το σημείο $M(x, y)$ είναι σημείο της $y = x - 2$

άρα είναι $M(x, x-2)$. Το εμβαδόν του $OAMB$ είναι :

$$E(x) = (AM) \cdot (BM) = |x-2||x| \Leftrightarrow$$

$$E(x) = |x(x-2)| = |x^2 - 2x|, x \in \mathbb{R}$$

β) $f(x) = E(x) = x|x-2| = x(-x+2) = -x^2 + 2x = -x^2 + 2x - 1 + 1 \Leftrightarrow$

$f(x) = -(x-1)^2 + 1, x \in [0, 1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με παράγωγο $f'(x) = -2x + 2 = -2(x-1) > 0$ για κάθε $0 < x < 1$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

Ισχύει $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$. Έστω

$$y = f(x) \stackrel{y \in [0, 1]}{\Leftrightarrow} y = -(x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1-y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow$$

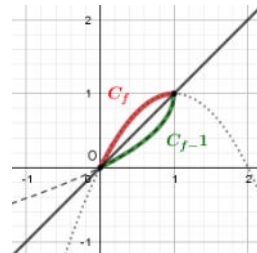
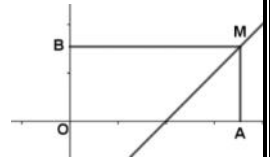
$$-x+1 = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{1-y}, y \in [0, 1]$$

Άρα είναι $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1-y}, y \in [0, 1]$ και

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}, x \in [0, 1]$$

γ)

δ) Είναι $f(x) \geq f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:



$$E = \int_0^1 |f(x) - f^{-1}(x)| dx = \int_0^1 [f(x) - f^{-1}(x)] dx = \int_0^1 [-(x-1)^2 + \sqrt{1-x}] dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_0^1 \left[-(x-1)^2 + |1-x|^{\frac{1}{2}} \right] dx \Leftrightarrow E = \int_0^1 \left[-(x-1)^2 + (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] dx \Leftrightarrow$$

$$E = \left[-\frac{(x-1)^3}{3} - \frac{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ε) Αν $x \in [0, 2]$ τότε

$$E(x) = |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x =$$

$$-x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1$$

ι) Για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι

$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow E(x) \leq E(1)$, άρα το εμβαδό γίνεται μέγιστο για $x = 1$, τότε $M(1,1)$ και το $OAMB$ είναι τετράγωνο πλευράς 1.

ii) Είναι $d(M, y'y) = (OB) = |x| = x$ και

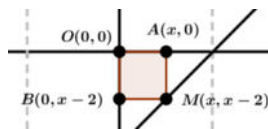
$$d(M, x'x) = (OA) = |y| = |x-2| = (-x+2). \text{ Είναι}$$

$$d^2(M, y'y) + d^2(M, x'x) = x^2 + (-x+2)^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 4 =$$

$$= 2(x^2 - 2x + 2) = 2[(x-1)^2 + 1]. \text{ Για κάθε } x \in [0, 2] \text{ είναι } (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2[(x-1)^2 + 1] \geq 2 \Leftrightarrow d^2(M, y'y) + d^2(M, x'x) =$$

$x^2 + (-x+2)^2 \geq 2$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 1$, άρα το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του M από τους άξονες να γίνει ελάχιστο για $x = 1$, δηλαδή όταν $M(1,1)$.



42. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} + 1$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$.

$$\beta) e^{-x} (\ln x + x) = -1 \Leftrightarrow \ln x + x = -\frac{1}{e^{-x}} \Leftrightarrow \ln x + x = -e^x \Leftrightarrow$$

$$\ln x + x + e^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \ln x + x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln x + x) = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $A = (0, +\infty)$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f που είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $x_1 > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow f(u) = x \Rightarrow f'(u)du = dx$

Για $x = e+1$ είναι $f(u) = e+1 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} u = 1$

Για $x = e^e + e+1$ είναι $f(u) = e^e + e+1 \Leftrightarrow f(u) = f(e) \stackrel{f \text{ 1-1}}{\Leftrightarrow} u = e$

$$\begin{aligned} \int_{e+1}^{e^e+e+1} f^{-1}(x) dx &= \int_1^e u f'(u) du = [u f(u)]_1^e - \int_1^e f(u) du = \\ &= [u f(u)]_1^e - \int_1^e (e^u + \ln u + u) du = [u f(u)]_1^e - \int_1^e (e^u + u) du - \int_1^e \ln u du = \\ &= [u f(u)]_1^e - \left[e^u + \frac{u^2}{2} \right]_1^e - [u \ln u]_1^e + \int_1^e du = \\ &= [u f(u)]_1^e - \left[e^u + \frac{u^2}{2} \right]_1^e - [u \ln u]_1^e + e - 1 = e^{e+1} + \frac{e^2}{2} - e^e + e - 2 \end{aligned}$$

δ) Έστω $g(x) = f(x) - x^4$, $x \in [1, 2]$.

Είναι $g(1) = f(1) - 1 = e > 0$, $g(2) = f(2) - 16 = e^2 + \ln 2 + 2 - 16 = e^2 + \ln 2 - 14$.

Είναι $e < 3 \Leftrightarrow e^2 < 9$ και $\ln 2 < \ln e = 1$, άρα

$e^2 + \ln 2 < 10 \Leftrightarrow e^2 + \ln 2 - 14 < -4 \Rightarrow g(2) < 0$.

Επειδή $g(1)g(2) < 0$ η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^4$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

ε) Έστω $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 > 0$ σημείο της C_f . Αρκεί να αποδείξουμε ότι η

εξίσωση $f'(x_0) = 1$ είναι αδύνατη. Είναι $f'(x_0) = e^{x_0} + \frac{1}{x_0} + 1 > 1$ γιατί

$e^{x_0} > 0$ και $\frac{1}{x_0} > 0$, οπότε η εξίσωση $f'(x_0) = 1$ είναι αδύνατη.

στ) Είναι $f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$ και $f^{(3)}(x) = e^x + \frac{2}{x^3}$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow (0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$.

Επειδή η f'' είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f''(A) = \mathbb{R}$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f'' υπάρχει $x_1 \in (0, +\infty)$ τέτοιο,

ώστε $f''(x_1) = 0$. Για κάθε $0 < x < x_1 \xrightarrow{f'' \nearrow} f''(x) < f''(x_1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, x_1]$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > x_1 \xrightarrow{f'' \nearrow} f''(x) > f''(x_1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, +\infty)$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $(x_1, f(x_1))$.

43. α) Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδία ορισμού $A_f = [1, +\infty)$ και $A_g = (0, +\infty)$. Είναι $A_{f \circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x > 0 / \ln x \geq 1\} = \{x > 0 / x \geq e\} = [e, +\infty)$ και $\varphi(x) = (f \circ g)(x) = \sqrt{g(x)-1} = \sqrt{\ln x - 1}$.

β) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(e, +\infty)$ με $\varphi'(x) = \frac{(\ln x - 1)'}{2\sqrt{\ln x - 1}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x - 1}}$.

Για κάθε $x > e$ είναι $\varphi'(x) > 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[e, +\infty)$. Για $x \geq e \xrightarrow{\varphi \nearrow} \varphi(x) \geq \varphi(e) = 0$ άρα για $x \geq e$ και $y \geq 0$:

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{\ln x - 1} = y \Leftrightarrow \ln x - 1 = y^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = y^2 + 1 \Leftrightarrow x = e^{y^2+1} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = e^{y^2+1}, y \geq 0 \text{ άρα } \varphi^{-1}(x) = e^{x^2+1}, x \geq 0$$

$$\gamma) f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq \ln x \Leftrightarrow x-1 \leq \ln^2 x \Leftrightarrow \ln^2 x - x + 1 \geq 0.$$

Έστω $h(x) = \ln^2 x - x + 1, x \geq 1$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$h'(x) = \frac{2 \ln x}{x} - 1 \text{ και } h''(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}. \text{ Για κάθε } x \in (1, e) \text{ είναι } h''(x) > 0,$$

ενώ για κάθε $x > e$ είναι $h''(x) < 0$. Επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Η h έχει μέγιστο το

$$h'(e) = \frac{2-e}{e} < 0, \text{ οπότε για κάθε } x > 1 \text{ είναι } h'(x) \leq h'(e) < 0 \text{ και επειδή η } h$$

είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Για κάθε $x \geq 1$ είναι

$$h(x) \leq h(1) = 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x).$$

$$\delta) E = \int_1^5 |f(x) - g(x)| dx = \int_1^5 (g(x) - f(x)) dx = \int_1^5 (\ln x - \sqrt{x-1}) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_1^5 \ln x (x)' dx - \int_1^5 (x-1)^{\frac{1}{2}} dx = [x \ln x]_1^5 - \int_1^5 x \frac{1}{x} dx - \left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^5 \Leftrightarrow$$

$$E = 5 \ln 5 - (5-1) - \left[\frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^5 = 5 \ln 5 - 4 - \frac{2}{3} \cdot 8 = 5 \ln 5 - \frac{28}{3}$$

44. α) Επειδή κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη από τη διάμετρο, ισχύει ότι: $0 < x < 2\rho = 10$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ

$$\text{έχουμε: } AD^2 = DB^2 - AB^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow AD = \sqrt{100 - x^2}$$

Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι:

$$(AB\Gamma\Delta) = (AD) \cdot (AB) = x\sqrt{100 - x^2}. \text{ Άρα } f(x) = x\sqrt{100 - x^2}, 0 < x < 10$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων

$$\text{συναρτήσεων με } f'(x) = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} > 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 50 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Για κάθε $x \in (0, 5\sqrt{2})$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο

$(0, 5\sqrt{2}]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (5\sqrt{2}, 10)$

είναι $f'(x) < 0$, και επειδή η f είναι συνεχής στο $[5\sqrt{2}, 10)$ είναι γνησίως

φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$, τότε

$$AD = \sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2} = x, \text{ οπότε το } AB\Gamma\Delta \text{ είναι τετράγωνο.}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{98x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{98} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} =$$

$$\frac{1}{98} \cdot f'(1) = \frac{1}{98} \cdot \frac{98}{\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

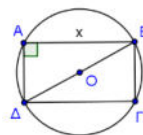
δ) Για κάθε $x \in [6, 8]$ η f είναι συνεχής και $f(x) \geq 0$, οπότε το ζητούμενο

$$\text{εμβαδό είναι: } E(\Omega) = \int_6^8 f(x) dx = \int_6^8 x \cdot \sqrt{100 - x^2} dx. \text{ Θέτουμε } 100 - x^2 = u,$$

$$\text{τότε } -2x dx = du \text{ και } x dx = -\frac{1}{2} du.$$

Για $x = 6$ είναι $u = 100 - 36 = 64$ και για $x = 8$ είναι $u = 100 - 64 = 36$. Τότε

$$E(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{64}^{36} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int_{36}^{64} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{36}^{64} = \frac{1}{3} [u\sqrt{u}]_{36}^{64} = \frac{296}{3} \text{ τ.μ.}$$



$$45. \alpha) f(1-x) = \ln \frac{e^{1-x} + e}{e^{1-x} + 1} = \ln \frac{\frac{e}{e^x} + e}{\frac{e}{e^x} + 1} = \ln \frac{e \frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{e+e^x}{e^x}} = \ln \left(e \frac{1+e^x}{e+e^x} \right) \Leftrightarrow$$

$$f(1-x) = \ln e + \ln \frac{1+e^x}{e+e^x} = 1 + \ln \left(\frac{e+e^x}{1+e^x} \right)^{-1} = 1 - \ln \frac{e+e^x}{1+e^x} = 1 - f(x).$$

β) Είναι $e^x + e > e^x + 1 \Leftrightarrow \frac{e^x + e}{e^x + 1} > 1 \Leftrightarrow \ln \frac{e^x + e}{e^x + 1} > \ln 1 \Leftrightarrow f(x) > 0$. Από τη

σχέση $f(1-x) = 1 - f(x)$, προκύπτει: $\int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 f(x) dx$ (1)

Θέτουμε $1-x = u$, τότε $dx = -du$. Για $x=0$ είναι $u=1$, ενώ για $x=1$ είναι $u=0$. Η σχέση (1) γίνεται: $-\int_1^0 f(u) du = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } E = \frac{1}{2}.$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x + e}{e^x + 1} = \lim_{\substack{\frac{e^x + e}{e^x + 1} = u \\ u \rightarrow 1}} \ln u = 0,$$

άρα η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) Έστω $g(x) = (x-1)f(x-1) - (2x-x^2)f(x) + x^2 - x$, $x \in [1, 2]$. Είναι

$$g(1) = -f(1) = -\ln \frac{2e}{e+1} < 0, \quad g(2) = f(1) + 2 > 0, \text{ δηλαδή } g(1)g(2) < 0 \text{ και}$$

επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, λόγω του θ. Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

46. α) Είναι $f^2(x) + x^2 = 2x \Leftrightarrow f^2(x) = 2x - x^2$ (1) οπότε η εξίσωση

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \text{ γίνεται } 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

β) Έστω ότι η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, 2)$ τότε αφού η f είναι συνεχής και θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 2)$ τέτοια ώρα $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ από Θ.

Bolzano θα υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Οπότε η (1) για $x = x_0$ γίνεται $2x_0 - x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0(2-x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ή $x_0 = 2$ (άτοπο) γιατί $x_0 \in (0, 2)$

γ) Οπότε αφού $f(x) \neq 0$ για $x \in (0, 2)$ και η f συνεχής στο $(0, 2)$. Επειδή

$f(1)=1>0$ τότε $f(x)>0$ για $x \in (0,2)$ άρα η (1) θα

είναι $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$.

δ) Επειδή $f(x)>0$ τότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega)=\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx. \text{ Έστω}$$

$$\sqrt{2x-x^2}=y \Leftrightarrow 2x-x^2-y^2 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2=0 \Leftrightarrow$$

$x^2+2x+1+y^2=1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου του κυκλικού δίσκου με κέντρο $K(1,0)$ και $\rho=1$.

$$E=\frac{\pi \rho^2}{4}=\frac{\pi \cdot 1^2}{4}=\frac{\pi}{4} \text{ οπότε } E(\Omega)=\frac{\pi}{4}.$$

ε) Η $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ γίνεται $f(x)=\sqrt{1-1+2x-x^2} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{1-(1-x)^2}$.

Έστω $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 > 0 \Leftrightarrow (1-x_1)^2 > (1-x_2)^2 \Leftrightarrow$
 $\sqrt{1-(1-x_1)^2} < \sqrt{1-(1-x_2)^2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η $f \nearrow$ στο $[0,1]$ άρα και

$1-1$ συνεπώς αντιστρέφεται. Έστω

$$f(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{1-(1-x)^2}=y^2 \Leftrightarrow 1-(1-x)^2=y^2 \Leftrightarrow (1-x)^2=1-y^2 \Leftrightarrow$$

$$1-x=\pm\sqrt{1-y^2} \text{ αφού } x \leq 1 \text{ τότε } 1-x > 0 \text{ άρα } 1-x=\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow$$

$$x=1-\sqrt{1-y^2} \text{ με } \left. \begin{matrix} y \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{matrix} \right\} y \in [0,1]. \text{ Άρα } f^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x^2}, x \in [0,1].$$

47. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{ax+\beta}+axe^{ax+\beta}=e^{ax+\beta}(1+ax)$.

Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο A , ισχύει:

$$f(-1)=-e^2 \Leftrightarrow -e^{-a+\beta}=-e^2 \Leftrightarrow -a+\beta=2 \quad (1) \text{ .Επειδή η εφαπτομένη της } C_f$$

στο A είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2e^2x-e$, ισχύει:

$$f'(-1)=\lambda=2e^2 \Leftrightarrow e^{-a+\beta}(1-a)=2e^2 \Leftrightarrow e^2(1-a)=2e^2 \Leftrightarrow 1-a=2 \Leftrightarrow a=-1$$

Τότε από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $1+\beta=2 \Leftrightarrow \beta=1$.

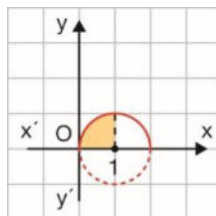
β) Για $a=-1$ και $\beta=1$ είναι $f(x)=xe^{1-x}$ και $f'(x)=e^{1-x}(1-x)$.

Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x)<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{1-x}=-\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x} \stackrel{\infty \cdot 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0 \text{ και } f(1)=1. \text{ Για το}$$



σύνολο τιμών του διαστήματος $\Delta_1 = (-\infty, 1]$, έχουμε:

$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$. Για το σύνολο τιμών του διαστήματος

$\Delta_2 = [1, +\infty)$, έχουμε: $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(1) \right] = (0, 1]$. Άρα

$f(A) = (-\infty, 1] \cup (0, 1] = (-\infty, 1]$.

γ) Αρκεί να βρούμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = k$.

• Αν $k > 1$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί λόγω του συνόλου τιμών της f ισχύει: $f(x) \leq 1$.

• Αν $k = 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$ ($f(1) = 1$).

• Αν $0 < k < 1$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς 2 ρίζες, μία στο $(-\infty, 1)$ και μία στο $(1, +\infty)$.

• Αν $k < 0$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty, 1)$.

δ) Για κάθε $0 \leq x \leq 1$, είναι $f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$, οπότε το

ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 x e^{1-x} dx = -\int_0^1 x (e^{1-x})' dx = -[x e^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = e - 2 \text{ τ.μ.}$$

48. α) Αφού η f είναι συνεχής ισχύει $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \frac{a}{e} = \ln a$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\frac{a}{e} = \ln a$ έχει μοναδική ρίζα τη $a = e$.

Έστω $g(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, $x > 0$ με $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e-x}{ex} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq e$. Για κάθε

$x \in (0, e)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, e]$ και για κάθε $x > e$ είναι

$g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [e, +\infty)$. Μέγιστο της g το $g(e) = 0$. Άρα $g(x) \leq 0$ για κάθε

$x > 0$ και το $=$ ισχύει μόνο για $x = e$. Συνεπώς $a = e$ και $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e}, & x \leq e \\ \ln x, & x > e \end{cases}$

β) Για $x < e$ είναι $f'(x) = \frac{1}{e}$ και για $x > e$ είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$. Στο $x_0 = e$

$$\text{έχουμε } \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{\frac{x}{e} - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^-} \frac{x - e}{e(x - e)} = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e^+} \frac{\frac{0}{0}}{1} = \frac{1}{e}. \text{ Άρα } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{e}, & x \leq e \\ \frac{1}{x}, & x > e \end{cases}$$

γ) Από τον προηγούμενο τύπο διαπιστώνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f \nearrow$ οπότε και 1-1 οπότε η f αντιστρέφεται. Για $x \leq e$ είναι:

$$\frac{x}{e} = y \Leftrightarrow x = ey \text{ με } ey \leq e \Leftrightarrow y \leq 1 \text{ και για } x > e \text{ είναι } \ln x = y \Leftrightarrow x = e^y \text{ με}$$

$$e^y > e \Leftrightarrow y > 1. \text{ Άρα } f^{-1}(x) = \begin{cases} ex, & x \leq 1 \\ e^x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\delta) E = -\int_{-e^2}^0 \frac{x}{e} dx + \int_0^e \frac{x}{e} dx + \int_e^{e^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-e^2}^0 + \frac{1}{e} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^e +$$

$$\int_e^{e^2} (x)' \ln x dx = \frac{e^4}{2e} + \frac{e^2}{2e} + [x \ln x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} 1 dx = \dots = \frac{e^3 + 2e^2 + e}{2} \text{ τ.μ..}$$

49. α) Επειδή η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 3$ είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

Αν $\alpha = 2$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x + \beta} = 0 \neq 3$ άρα $\alpha \neq 2$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 2)x}{x} = \alpha - 2. \text{ Είναι } \alpha - 2 = 3 \Leftrightarrow \alpha = 5.$$

Επειδή $D_f = \mathbb{R} - \{-\beta\}$, αν η f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αυτή θα είναι η

$$x = -\beta, \text{ άρα } -\beta = -1 \Leftrightarrow \beta = 1. \text{ Τότε } f(x) = \frac{3x + 9}{x + 1} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 9}{x + 1} = +\infty$$

β) Είναι $G'(x) = f(x) = \frac{3x + 9}{x + 1} = \frac{3x + 3 + 6}{x + 1} = 3 + \frac{6}{x + 1} = (3x + 6 \ln(x + 1))' \Leftrightarrow$

$$G(x) = 3x + 6 \ln(x + 1) + c. \text{ Είναι } G(0) = 3 \Leftrightarrow c = 3, \text{ άρα}$$

$$G(x) = 3x + 6 \ln(x + 1) + 3$$

$$\gamma) g(x) = \frac{G(x)}{x + 1} = \frac{3(x + 1) + \ln(x + 1)}{x + 1} = 3 + \frac{\ln(x + 1)}{x + 1}, x > -1$$

$$g'(x) = \frac{1 - \ln(x + 1)}{(x + 1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e - 1$$

Για κάθε $x \in (0, e - 1)$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, e - 1]$ και για κάθε $x > e - 1$

είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [e-1, +\infty)$. Η g έχει μέγιστο το $g(e-1) = 3 + \frac{1}{e}$

δ) Για κάθε $x < 0$ είναι $\ln x \leq x-1$. Αντικαθιστώντας όπου x το $x+1$ είναι:
 $\ln(x+1) \leq x$, $x > -1$, άρα $6\ln(x+1) \leq 6x \Leftrightarrow 3x+3+6\ln(x+1) \leq 9x+3 \Leftrightarrow$
 $G(x) \leq 9x+3$

ε) $(x+1)^{x+2} > (x+2)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(x+1)^{x+2} > \ln(x+2)^{x+1} \Leftrightarrow$
 $(x+2)\ln(x+1) > (x+1)\ln(x+2) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)}{x+1} > \frac{\ln(x+2)}{x+2} \Leftrightarrow$
 $3 + \frac{\ln(x+1)}{x+1} > 3 + \frac{\ln(x+2)}{x+2} \Leftrightarrow g(x+1) > g(x+2) \Leftrightarrow \overset{g \searrow (e, +\infty)}{x+1 < x+2} \text{ ισχύει}$

50. α) Είναι $f(x) = \ln x$ με $D_f = (0, +\infty)$ και $g(x) = e^x - x$ με $D_g = \mathbb{R}$, οπότε
 $D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x - x > 0\} = \mathbb{R}$ αφού όπως
γνωρίζουμε $e^x > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(e^x - x) = \ln(e^x - x)$$

β) Η $h(x) = \ln(e^x - x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}. \text{ Έχουμε } h'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$ το $h(0)=0$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} \overset{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - x} \overset{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \overset{+\infty}{=}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \text{ Γιατί, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \overset{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) \right] = +\infty. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - x) \overset{e^x - x = y}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - x) - \ln e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x - x}{e^x} \right) \overset{\frac{e^x - x}{e^x} = \omega}{=} \lim_{\omega \rightarrow 1} \ln \omega = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} \ln \omega = 0 \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{e^x} \overset{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x} \overset{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Επομένως η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

δ) $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(\rho-1)x^3 + 2x - 11}{h(\rho+2)x^2 - 3x + 21}$. Γνωρίζουμε ότι $h(x) \geq 0$ και μηδενίζεται για $x=0$.

Αν $\rho-1 \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq 1$ και $\rho+2 \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq -2$ τότε $h(\rho-1) > 0, h(\rho+2) > 0$

άρα $\frac{h(\rho-1)}{h(\rho+2)} > 0$ επομένως $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(\rho-1)}{h(\rho+2)} x = -\infty$. Αν $\rho=1$ τότε

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-11}{h(3)x^2-3x+21} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-11}{h(3)x^2-3x+21} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{h(3)x} = 0$$

Αν $\rho=-2$ τότε

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(-3)x^3 + 2x - 11}{-3x + 21} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(-3)x^3 + 2x - 11}{-3x + 21} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(-3)}{-3} x^2 = -\infty$$

ε) Είναι $e^x > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε $e^{x^2} > x^2$ συνεπώς

$$\int_0^1 e^{x^2} dx > \int_0^1 x^2 dx \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \int_0^1 e^{x^2} dx - 1 > 0$$

στ) Η εξίσωση $h(x-f(x)) = h(x+g(x))$ γίνεται

$$h(x-\ln x) = h(x+e^x-x) \Leftrightarrow h(x-\ln x) = h(e^x) \quad (1). \text{ Είναι } x-\ln x > 0 \text{ και}$$

$e^x > 0$, επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ τότε θα είναι και 1-1

άρα από την (1) προκύπτει $x-\ln x = e^x \Leftrightarrow e^x + \ln x - x = 0$. Έστω

$$\alpha(x) = e^x + \ln x - x, x > 0$$

$$\text{Είναι } \alpha'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 1 = e^x - 1 + \frac{1}{x} > 0 \text{ γιατί για } x > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow e^x > 1$$

Επομένως, η συνάρτηση α είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο

$$\text{τιμών } \alpha(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \ln x - x) = -\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - x) = 1$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{\ln x}{x} - 1 \right) \right] = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ Επειδή το } 0 \in \alpha(A)$$

η εξίσωση $\alpha(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$, άρα και η ισοδύναμη

εξίσωση $h(x-f(x)) = h(x+g(x))$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

51. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 2 \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = 1 - \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - \cancel{e^{2x}} - e^x + \cancel{e^{2x}}}{(e^x + 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2} > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}.$$

β) Είναι $f \cup \mathbb{R} \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = +\infty - 1 = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}(1 + e^{-x})} = 1.$$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Επειδή $0 \in f'(\mathbb{R})$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Για κάθε $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, x_0]$ και για κάθε

$$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [x_0, +\infty).$$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 .

γ) Η f έχει ελάχιστο το $f(x_0) = x_0^2 - 2 \ln(e^{x_0} + 1)$.

Παρατηρούμε ότι $f'(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $f'(1) = 1 - \frac{e}{e+1} > 0$, δηλαδή $f'(0)f'(1) < 0$

και επειδή η f είναι συνεχής, λόγω του Θ. Bolzano, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, 1)$. Όμως η f' έχει μοναδική ρίζα το x_0 , άρα

$$x_0 \in (0, 1). \text{ Είναι } 0 < x_0 < 1 \Leftrightarrow 0 < x_0^2 < 1 \text{ (1) ,}$$

$$e^0 < e^{x_0} < e^1 \Leftrightarrow 2 < e^{x_0} + 1 < e + 1 \Leftrightarrow \ln 2 < \ln(e^{x_0} + 1) < \ln(e + 1) \Leftrightarrow$$

$$-2 \ln(e + 1) < -2 \ln(e^{x_0} + 1) < -2 \ln 2 \text{ (2) .}$$

Από (1) + (2) $\Rightarrow -2 \ln(e + 1) < x_0^2 - 2 \ln(e^{x_0} + 1) < 1 - 2 \ln 2$, άρα $f(x_0) < 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x^2 - 2 \ln(e^x + 1)] = +\infty - 2 \cdot 0 = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln(e^x + 1)}{x^2} \right) \right] = +\infty (1 - 2 \cdot 0) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x} \cdot \frac{e^x}{e^x + 1} \right) = 0.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, x_0)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (f(x_0), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$, υπάρχει μοναδικό $x_1 < x_0$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Είναι $f(0) = -2 \ln 2 < 0$, οπότε $f((-\infty, 0)) = (-2 \ln 2, +\infty)$. Επειδή $0 \in f((-\infty, 0))$ η f έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, 0) \subseteq (-\infty, x_0)$. Επειδή το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(-\infty, x_0)$, είναι $x_1 < 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = (x_0, +\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (f(x_0), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$, υπάρχει μοναδικό $x_2 > x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Τελικά η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, μια θετική και μια αρνητική.

δ) Αρχικά θα βρούμε σημείο $A(a, f(a))$ τέτοιο, ώστε $f'(a) = \lambda_e = -1$.

Επειδή $f'(0) = -1$, είναι $f'(a) = f'(0) \stackrel{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} a = 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι η ευθεία ε_1 :

$$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = -x - 2 \ln 2.$$

ε) Επειδή η f είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από την ε_1 εκτός του σημείου A , οπότε $f(x) \geq -x - 2 \ln 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 (-x - 2 \ln 2) dx = -\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 - 2 \ln 2 = -\frac{1}{2} - 2 \ln 2$$

52. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = 3x^2 + 6(\ln x - 2) + 6 \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = 3x^2 + 6 \ln x - 6.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = 6x + \frac{6}{x} > 0 \Rightarrow f' \nearrow (0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + 6 \ln x - 6) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 6 \ln x - 6) = +\infty$. Επειδή η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι $f'(\Delta) = \mathbb{R}$.

Επειδή $0 \in f'(\Delta)$, υπάρχει $x_0 \in \Delta = (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

Για κάθε $0 < x < x_0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \searrow (0, x_0]$ και για κάθε

$x > x_0 \xrightarrow{f' \nearrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_0, +\infty)$. Η f έχει ελάχιστο στο x_0 .

β) Είναι $f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 6 \ln 1 - 6 = -3 < 0$ και

$f'(2) = 12 + 6 \ln 2 - 6 = 6 + 6 \ln 2 > 0$, και επειδή η f' είναι συνεχής, η εξίσωση

$f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$. Όμως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f' , άρα $x_0 \in (1, 2)$.

γ) $x(x^2 + 6 \ln x) = 2(6x - 1) \Leftrightarrow x^3 + 6x \ln x - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Είναι

$1 < x_0 \xrightarrow{f \searrow (0, x_0]} f(x_0) < f(1) = -9 < 0$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2] = 2$, γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x - 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 2}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2] = +\infty$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0, x_0]$, το αντίστοιχο

σύνολο τιμών της είναι το $f(\Delta_1) = [f(x_0), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [f(x_0), 2]$

Επειδή $0 \in f(\Delta_1)$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [x_0, +\infty)$, το

αντίστοιχο σύνολο τιμών της είναι: $f(\Delta_2) = [f(x_0), +\infty)$

Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

δ) Είναι $x_0 \leq x \leq 2 \xrightarrow{f \nearrow} f(x_0) \leq f(x) \leq f(2) = 12 \ln 2 - 14$ Επειδή

Όμως $2 < e \Leftrightarrow \ln 2 < \ln e = 1 \Leftrightarrow 12 \ln 2 < 12 < 14 \Leftrightarrow 12 \ln 2 - 14 < 0 \Leftrightarrow f(2) < 0$,

άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_0, 2]$.

Επειδή $1 \leq x \leq x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(1) = -9 < 0$, είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$,
οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega) = -\int_1^2 f(x) dx = -\int_1^2 [x^3 + 6x(\ln x - 2) + 2] dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 6x \ln x dx + \int_1^2 12x dx - \int_1^2 2 dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 - \int_1^2 (3x^2)' \ln x dx + [6x^2]_1^2 - 2 =$$

$$-\frac{15}{4} - [3x^2 \ln x]_1^2 + \int_1^2 3x^2 \cdot \frac{1}{x} dx + 18 - 2 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\frac{15}{4} + 16 - 12 \ln 2 + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{67}{4} - 12 \ln 2$$

53. α) Για $x=0$ είναι $f'(0)f(0) = -f'(0) \Leftrightarrow f'(0) = 0$ οπότε το $x_0 = 0$ είναι
κρίσιμο σημείο της f .

β) $f'(x)f(x) = x - f'(x) \Leftrightarrow f'(x)f(x) + f'(x) = x \Leftrightarrow f'(x)(f(x) + 1) = x$ (1)

Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $f(x) + 1 > 0$ Οπότε:

Αν $x > 0$ από την (1) είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής (είναι
παραγωγίσιμη), είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Αν $x < 0$ από την (1) είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$.

γ) $f'(x)(f(x) + 1) = x \Leftrightarrow 2(f'(x) + 1)(f(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow$

$$\left[(f(x) + 1)^2\right]' = (x^2)' \Leftrightarrow (f(x) + 1)^2 = x^2 + c, c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = 0$ είναι $c = 1$ οπότε

$$(f(x) + 1)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) + 1 = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\delta) I = 2 \int_0^1 \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \int_0^1 \frac{x\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2 \int_0^1 \left(x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$I = 2 \int_0^1 (x - f'(x)) dx \Leftrightarrow$$

$$I = 2 \int_0^1 f(x) f'(x) dx = \int_0^1 [f^2(x)]' dx = [f^2(x)]_0^1 = f^2(1) = (\sqrt{2} - 1)^2$$

ε) Για κάθε $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \leq f(x) \leq \sqrt{5}-1$ και

επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1, 2]$ έχουμε:

$$\int_1^2 (\sqrt{2}-1) dx < \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 (\sqrt{5}-1) dx \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 < \int_1^2 f(x) dx < \sqrt{5}-1.$$

54. α) Αν το Μ βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ τότε $0 < x \leq 1$.

Τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΑΒΕ είναι όμοια γιατί είναι ορθογώνια και έχουν κοινή την γωνία Α.

$$\text{Άρα ισχύει } \frac{(AM)}{(AB)} = \frac{(MN)}{(BE)} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{(MN)}{2} \Leftrightarrow (MN) = 2x. \text{ Το εμβαδόν του}$$

γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

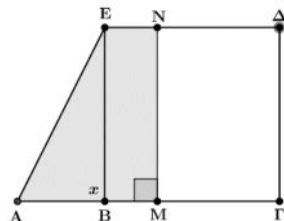
$$E(x) = \frac{1}{2}(AM)(MN) = \frac{1}{2}x(2x) = x^2, \quad 0 < x \leq 1.$$

Αν το Μ βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ τότε $1 < x \leq 3$.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

$$E(x) = \frac{1}{2}(AB)(BE) + (BM)(MN) = \\ = \frac{1}{2}2 + (x-1)2 = 1 + 2x - 2 = 2x - 1, \quad 1 < x \leq 3$$

$$\text{Άρα είναι } E(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x-1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}.$$



β) Η Ε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $E'(x) = 2x > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Η Ε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,3)$ με $E'(x) = 2 > 0$ για κάθε $x \in (1,3)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = E(1) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1$ άρα η Ε είναι συνεχής στο $x_1 = 1$.

Είναι και $\lim_{x \rightarrow 3^-} E(x) = E(3) = 5$ επομένως η Ε είναι συνεχής στο $(0,3]$ και αφού $E'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,3)$ τότε η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3]$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=3$ το $E(3) = 5$.

γ) Η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3]$ άρα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

$$H \in \mathcal{J}(0,1] \text{ και συνεχής άρα } E((0,1]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} E(x), E(1) \right] = (0,1].$$

$$H \in \mathcal{J}(1,3] \text{ και συνεχής άρα } E((1,3]) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x), E(3) \right] = (1,5].$$

Για $0 < x \leq 1$ και $0 < y \leq 1$ είναι

$$y = E(x) \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad \begin{matrix} 0 < y \leq 1 \\ 0 < x \leq 1 \end{matrix}$$

Για $1 < x \leq 3$ και $1 < y \leq 5$ είναι $y = E(x) \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow$

$$2x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}. \text{ Άρα } E^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & , 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

δ) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = E(x) - \sin x = x^2 - \sin x$, $x \in (0, 1]$

Η g είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1 < 0$ άρα υπάρχει $\alpha > 0$, πολύ κοντά

στο μηδέν, τέτοιο ώστε $g(\alpha) < 0$. Είναι

$$g(1) = 1 - \sin 1 > 0 \text{ αφού για}$$

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow \sin x \leq \sin x < 1. \text{ Άρα σύμφωνα με το}$$

θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in (\alpha, 1) \subseteq (0, 1) \text{ τέτοιο ώστε}$$

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow E(x_0) = \sin x_0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με

$$g'(x) = 2x + \eta \mu x > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \text{ άρα η } g \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ άρα το x_0 είναι μοναδικό.

$$\text{Είναι } E((1, 3]) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x), E(3) \right] = (1, 5] \text{ και για}$$

$$1 < x < 3 < \pi \Rightarrow \sin x < \sin 1 < 1 \text{ άρα η εξίσωση } E(x) = \sin x \text{ είναι}$$

αδύνατη στο $(1, 3]$. Άρα η εξίσωση $E(x) = \sin x$ έχει μοναδική λύση το

$$x_0 \in (\alpha, 1) \subseteq (0, 1).$$

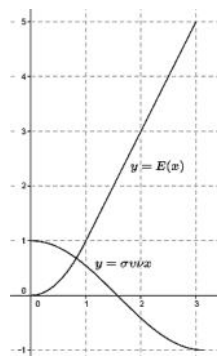
ε) Για $0 < x \leq 1$ είναι

$$E(x) = E^{-1}(x) \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \text{ απορρίπτεται}) \text{ ή } (x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ δεκτή})$$

$$\text{Για } 1 < x \leq 3 \text{ είναι } E(x) = E^{-1}(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{απορρίπτεται. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι } E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^1 |E(x) - E^{-1}(x)| dx$$



Για $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ είναι $E(x) < E^{-1}(x) \Leftrightarrow x^2 < \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x^3 - 1) < 0 \Leftrightarrow x^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ άρα είναι $E(x) < E^{-1}(x)$ για κάθε

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Άρα $E(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^1 |E(x) - E^{-1}(x)| dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (\sqrt{x} - x^2) dx =$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 (x^{1/2} - x^2) dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{9\sqrt{2} - 8}{24\sqrt{2}}.$$

55. α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{1\}$ ως παραγωγίσιμη με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ άρα $f \nearrow (-\infty, 0]$ ως συνεχής στο 0 και $f \nearrow (1, +\infty)$. Επίσης είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ άρα $f \searrow [0, 1)$ ως συνεχής στο 0.

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ το $f(0) = -1$.

Είναι επίσης $f' \searrow (-\infty, 1)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1)$ και $f' \searrow (1, +\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$. Η f προφανώς δεν έχει σημεία καμπής.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = f'(-1)x + f'(-1) + f(-1).$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1)$ τότε η C_f στο διάστημα αυτό βρίσκεται

κάτω από κάθε εφαπτόμενή της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x) \leq f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = -1$ άρα για κάθε $x < -1$ είναι $f(x) < f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(-1)x] = -\infty$ επειδή

$$f'(-1) > 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

γ) i) Είναι $f(x) \leq f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)$ για κάθε $x \in [-1, 0]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = -1$ άρα είναι

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &< \int_{-1}^0 [f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)] dx = \\ &= \left[\frac{f'(-1)x^2}{2} + [f'(-1) + f(-1)]x \right]_{-1}^0 = - \left[\frac{f'(-1)}{2} - f'(-1) - f(-1) \right] = \\ &= - \frac{f'(-1)}{2} + f'(-1) + f(-1) = \frac{f'(-1)}{2} + f(-1) = \frac{f'(-1) + 2f(-1)}{2} \end{aligned}$$

ii) 1^{ος} τρόπος: $\alpha \leq x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) = -1$ με το ίσον να ισχύει μόνον για $x=0$

$$\text{άρα } \int_{\alpha}^0 f(x) dx < -\int_{\alpha}^0 dx = \alpha$$

2^{ος} τρόπος: Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0,0)$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) = -1 \text{ αφού } f'(0) = 0 \text{ από το σχήμα}$$

Η f είναι κοίλη στο $[\alpha, 0]$ με $\alpha < 0$ άρα $f(x) \leq f(0) = -1$ με την ισότητα να

$$\text{ισχύει μόνον για } x=0 \text{ άρα } \int_{\alpha}^0 f(x) dx < -\int_{\alpha}^0 dx = \alpha$$

δ) Πρέπει να βρούμε να πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Γνωρίζουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες για κάθε $\lambda < -1$

άρα αφού η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$,

$[0, 1]$ και $(1, +\infty)$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα για κάθε $\lambda < -1$.

$$\text{Είναι } f \nearrow (-\infty, 0] \text{ και συνεχής άρα } f((-\infty, 0]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, -1] \text{ και}$$

στο διάστημα αυτό η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα.

$$\text{Είναι } f \searrow (0, 1) \text{ και συνεχής άρα } f((0, 1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), f(0) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), -1 \right)$$

οπότε για να έχει στο διάστημα αυτό ρίζα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ για κάθε $\lambda < -1$

$$\text{πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \text{ άρα } f((0, 1)) = (-\infty, -1) \text{ και στο διάστημα αυτό η}$$

εξίσωση δεν έχει ρίζα. Είναι $f \nearrow (1, +\infty)$ και συνεχής άρα

$$f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), +\infty \right) \text{ οπότε για να έχει στο}$$

διάστημα αυτό ρίζα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ για κάθε $\lambda < -1$ πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty, \text{ άρα } f((1, +\infty)) = \mathbb{R}. \text{ Επομένως στο διάστημα αυτό η εξίσωση}$$

$f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα άρα

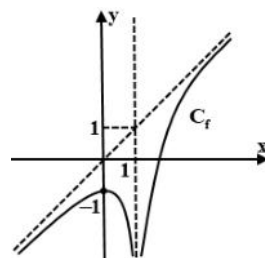
η C_f τέμνει τον x σε 1 σημείο.

ε) Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ άρα η

ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{\infty}{-\infty} \right)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 1,$$



$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ και επειδή η C_f δέχεται πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$ η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε αυτή είναι η $y = x$.

56. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 4x^3 - 4$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^3 \geq 4 \Leftrightarrow x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1 - 4 + \ln^2 \alpha = \ln^2 \alpha - 3$.

β) Το ελάχιστο της f είναι το $\ln^2 \alpha - 3$.

Έστω $g(\alpha) = \ln^2 \alpha - 3$, $\alpha > 0$. Είναι $g'(\alpha) = 2 \ln \alpha (\ln \alpha)' = \frac{2 \ln \alpha}{\alpha}$.

Για κάθε $\alpha < 1$ είναι $g'(\alpha) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(0, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha > 1$ είναι $g'(\alpha) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η g έχει ελάχιστο για $\alpha=1$, οπότε το ελάχιστο της f παίρνει τη μικρότερη τιμή του για $\alpha = 1$.

γ) i. Επειδή το ελάχιστο της f είναι το $\ln^2 \alpha - 3$, ισχύει ότι

$$\ln^2 \alpha - 3 = \alpha^2 - 2\alpha - 2 \Leftrightarrow \ln^2 \alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln^2 \alpha = (\alpha - 1)^2 \Leftrightarrow |\ln \alpha| = |\alpha - 1| \quad (1).$$

Αν $\alpha \geq 1$ τότε η (1) γίνεται $\ln \alpha = \alpha - 1$ και αληθεύει μόνο για $\alpha=1$ γιατί για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x \leq x - 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε η (1) γίνεται $-\ln \alpha = -\alpha + 1 \Leftrightarrow \ln \alpha = \alpha - 1$ και είναι αδύνατη στο διάστημα $(0, 1)$.

ii. $f(\xi) = 3\xi^2 - 6 \Leftrightarrow \xi^4 - 4\xi - 3\xi^2 + 6 = 0$.

Έστω $h(x) = x^4 - 3x^2 - 4x + 6$, $x \in [1, 2]$. Παρατηρούμε ότι $h(1) = 0$, οπότε από το σχήμα Horner παίρνουμε: $h(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 - 2x - 6)$.

Έστω $\varphi(x) = x^3 + x^2 - 2x - 6$, $x \in [1, 2]$. Είναι $\varphi(1) = -6$, $\varphi(2) = 2$, δηλαδή $\varphi(1)\varphi(2) < 0$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(\xi) = 0$.

Τότε $h(\xi) = (\xi - 1)\varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 3\xi^2 - 6$

iii. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε τέτοια εφαιπτόμενη διέρχεται από την αρχή των

αξόνων. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ και σημείο $A(0, \lambda)$, $\lambda > 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Για να διέρχεται από το A πρέπει:

$$\lambda - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow \lambda - x_0^4 + 4x_0 = (4x_0^3 - 4)(-x_0) \Leftrightarrow$$

$\lambda - x_0^4 + 4x_0 = -4x_0^4 + 4x_0 \Leftrightarrow 3x_0^4 = -\lambda$ αδύνατη. Άρα καμία εφαπτόμενη δεν τέμνει τον θετικό ημιάξονα σε σημείο $A(0, \lambda)$, $\lambda > 0$.

Τώρα θα εξετάσουμε αν υπάρχει εφαπτόμενη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ώστε να επιβεβαιώνει ότι είναι της μορφής $y = \beta x$ με $\beta \in \mathbb{R}$.

Αν $\lambda = 0$ δηλαδή το A είναι η αρχή των αξόνων τότε καταλήγουμε στην σχέση $3x_0^4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων είναι:

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -4x$ και είναι της παραπάνω μορφής. Επομένως $\beta = -4$.

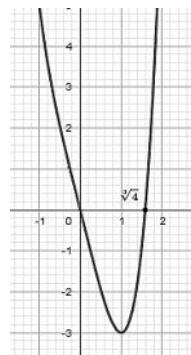
iv. Είναι $f''(x) = 12x^2 > 0$ για κάθε $x \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Είναι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x^3 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	+		+
f'	-		+
f	$\searrow$	-3	$\nearrow$



v. Είναι $f(x) \geq f(1) = -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$, άρα

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 -3 dx = [-3x]_0^1 = -3.$$

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα κάθε εφαπτόμενη της βρίσκεται κάτω από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Άρα $f(x) \geq -4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 -4x dx = [-2x^2]_0^1 = -2 = \frac{\beta}{2}$$

57. α) Η f είναι συνεχής στο $[2, e]$, παραγωγίσιμη στο $(2, e)$, $f(2) = f(e) = 0$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, e)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$.

β) Η k είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$k'(x) = e^x + (\ln x - 1)e^x + e^x + x(\ln x - 1)e^x \Leftrightarrow$$

$$k'(x) = e^x (1 + \ln x - 1 + 1 + x \ln x - x) \Leftrightarrow k'(x) = e^x (1 - x + (x+1) \ln x).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $l(x) = 1 - x + (x+1) \ln x, x > 0$.

Η l είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$l'(x) = -1 + \ln x + \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow l'(x) = -1 + \ln x + 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow l'(x) = \ln x + \frac{1}{x}.$$

Η l' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $l''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow l''(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

Για $x > 1$ έχουμε $l''(x) > 0$, για $0 < x < 1$ έχουμε $l''(x) < 0$, η l' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε η l' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $l'(1) = 1$.

Επομένως $l'(x) \geq l'(1) \Leftrightarrow l'(x) \geq 1 > 0$ άρα η l είναι γνησίως αύξουσα στο

$(0, +\infty)$. Έχουμε $l(x) \geq 0 \Leftrightarrow l(x) \geq l(1) \stackrel{l'}{\Leftrightarrow} x \geq 1$ οπότε $k'(x) = e^x \cdot l(x) \geq 0$ για $x \geq 1$. Η k είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

Είναι $k'(x) > 0$ για $x > 1$, $k'(x) < 0$ για $x < 1$ οπότε η k είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $k(1) = -e^2$. Έστω $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = [1, +\infty)$. Λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα έχουμε :

$$k(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) \right) = (k(1), 1 - e^2) = (-e^2, 1 - e^2) \text{ και}$$

$$k(A_2) = \left[k(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) \right) = [1 - e^2, +\infty).$$

Επειδή $1 - e^2 < 0$, το 0 ανήκει μόνο στο $k(A_2)$ οπότε υπάρχει μοναδικό λόγω της μονοτονίας η, τέτοιο ώστε $k(\eta) = 0$. Όπως φαίνεται από το $k(A_1)$, η k

είναι αρνητική στο A_1 . Για $1 < x < \eta \stackrel{k \nearrow \text{ στο } [1, +\infty)}{\Rightarrow} k(x) < k(\eta) = 0$ και για $x > \eta \Leftrightarrow k(x) > k(\eta) > 0$, άρα η k είναι αρνητική στο $(0, \eta)$ και θετική στο $(\eta, +\infty)$.

γ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με παράγωγο

$$f'(x) = 2(\ln x - 1)(e^x - e^2) \cdot \frac{k(x)}{x}.$$

$$\text{Έχουμε : } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(\ln x - 1)(e^x - e^2) \cdot \frac{k(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	2	ξ	e	$+\infty$
$\ln x - 1$	-	-	-	0	+
$e^x - e^2$	-	0	+	+	+
$k(x)$	-	-	0	+	+
f'	-	0	+	0	+
f	$\searrow$	TE	$\nearrow$	TM $\searrow$	TE $\nearrow$

$$(\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e) \text{ ή }$$

$$(e^x - e^2 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^2 \Leftrightarrow x = 2) \text{ ή } (k(x) = 0 \Leftrightarrow k = \eta).$$

Επομένως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες τις $e, 2, \eta$.

Επειδή $2 < \xi < e$, το ξ ταυτίζεται με το η .

$$\delta) \text{ Έχουμε } \ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e \text{ και } e^x \geq e^2 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2, \xi], [e, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2], [\xi, e]$ οπότε παρουσιάζει τοπικά ελάχιστα στα $2, e$ και τοπικό μέγιστο στο ξ .

$$\epsilon) \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 k(ax) dx - \frac{1}{\alpha^2} \int_1^a x k(x) dx > 0.$$

$$I_1 = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 k(ax) dx, \text{ θέτουμε } u = ax \Leftrightarrow x = \frac{u}{\alpha} \text{ τότε } dx = \frac{1}{\alpha} du.$$

Για $x = \frac{1}{\alpha}$ είναι $u = 1$ και για $x = 1$ είναι $u = \alpha$, άρα

$$I_1 = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 k(ax) dx = \frac{1}{\alpha} \int_1^{\alpha} k(u) du = \frac{1}{\alpha} \int_1^{\alpha} k(x) dx. \text{ Άρα}$$

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 k(ax) dx - \frac{1}{\alpha^2} \int_1^a x k(x) dx > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \int_1^{\alpha} k(x) dx - \frac{1}{\alpha^2} \int_1^a x k(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \left(\int_1^{\alpha} \alpha k(x) dx - \int_1^a x k(x) dx \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} (\alpha - x) k(x) dx > 0$$

Είναι $\alpha > \xi$ με $\xi \in (2, e)$ άρα $1 \leq x \leq \alpha \Rightarrow \alpha - x \geq 0$ και $k(x) > 0$ για κάθε

$x > \eta = \xi$ άρα $(\alpha - x)k(x) \geq 0$ για κάθε $1 < x < \alpha$ με $\alpha > \xi$. Επειδή η ισότητα

$$\text{ισχύει μόνο για } x = \alpha \text{ είναι: } \int_1^{\alpha} (\alpha - x) k(x) dx > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \int_1^{\alpha} (\alpha - x) k(x) dx > 0.$$

$$58. \alpha) x^2 f'(x) = (1 - \ln x) f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$(\ln f(x))' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{\ln x}{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = 1 \text{ είναι}$$

$$\ln f(1) = \frac{\ln 1}{1} + c \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα}$$

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x = \ln x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0.$$

β) Είναι $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} \geq 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e.$$

Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x > e$ είναι $f'(x) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο

$[e, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) \leq f(e) \Leftrightarrow f(x) \leq e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt[e]{e} \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνον για } x = e.$$

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq \sqrt[e]{e} \Leftrightarrow x f(x) \leq x \sqrt[e]{e}$ με την ισότητα να ισχύει

$$\text{μόνον για } x = e. \text{ Άρα } \int_{\sqrt{2}}^2 x f(x) dx < \int_{\sqrt{2}}^2 x \sqrt[e]{e} dx = \left[\frac{x^2}{2} \sqrt[e]{e} \right]_{\sqrt{2}}^2 = 2\sqrt[e]{e} - \sqrt[e]{e} = \sqrt[e]{e}$$

δ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow$

$$\ln x^{\frac{1}{x}} \leq \ln e^{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow e \ln x \leq x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow x^e \leq e^x$$

ε) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{\frac{\ln x}{x} = u}{=} \lim_{\substack{u = -\infty \\ x \rightarrow 0^+}} e^u = 0 \text{ γιατί}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty \text{ άρα η } f \text{ δεν έχει κατακόρυφη}$$

ασύμπτωτη. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \stackrel{\frac{\ln x}{x} = u}{=} \lim_{\substack{u = 0 \\ x \rightarrow +\infty}} e^u = 1 \text{ γιατί}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0, \text{ άρα η ευθεία } y = 1 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f$$

. Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

στ) Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, e]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] = \left(0, e^{\frac{1}{e}} \right]$.

Στο διάστημα $\Delta_2 = (e, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right) = \left(1, e^{\frac{1}{e}} \right).$$

Επειδή $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) = \left(1, e^{\frac{1}{e}} \right) \neq \emptyset$ η f δεν είναι 1-1, δηλαδή υπάρχουν

$$x_1, x_2 \in (-\infty, 0), (0, +\infty) \text{ αντίστοιχα με } x_1 \neq x_2 \text{ τέτοια, ώστε } f(x_1) = f(x_2).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1, x_2) ή (x_2, x_1) , εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$.

ζ) Αν $x \leq 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη. Για $x > 0$

$$a^x - x = 0 \Leftrightarrow a^x = x \Leftrightarrow x \ln a = \ln x \Leftrightarrow \ln a = \frac{1}{x} \ln x \Leftrightarrow \ln a = \ln x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow$$

$$x^{\frac{1}{x}} = a \Leftrightarrow f(x) = a.$$

- Αν $a \in (0, 1] \cup \left\{ e^{\frac{1}{e}} \right\}$ τότε $a \in f(\Delta_1)$ και $a \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση

$$f(x) = a \text{ έχει ακριβώς μία ρίζα που βρίσκεται στο } \Delta_1 = (0, e).$$

- Αν $a \in \left(1, e^{\frac{1}{e}} \right)$ τότε $a \in f(\Delta_1)$ και $a \in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = a$ έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1, Δ_2 .

- Τέλος αν $a \in \left(e^{\frac{1}{e}}, +\infty \right)$ τότε το a δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x) = a$ είναι αδύνατη.

59. α) Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x}$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\alpha x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-\alpha x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\alpha}$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ είναι

$f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής,

είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{1}{\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$.

Η f έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \ln \frac{1}{\alpha} - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + 1 = -\ln \alpha$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι

$$f(x) \leq -\ln \alpha.$$

Για να είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, αρκεί $-\ln \alpha < 0 \Leftrightarrow \ln \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$.

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \alpha x + 1) = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \alpha x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln x}{x} - \alpha + \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty(-\alpha) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο}$$

$\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-\infty, -\ln \alpha)$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = \left[\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$, οπότε έχει

αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (-\infty, -\ln \alpha]$.

- Αν $-\ln \alpha > 0 \Leftrightarrow \ln \alpha < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$, τότε το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_1)$ και στο $f(\Delta_2)$, οπότε λόγω της μονοτονίας, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες και απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.

- Αν $-\ln \alpha < 0 \Leftrightarrow \ln \alpha > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.

- Τέλος αν $-\ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$ τότε το μηδέν δεν περιέχεται στο $f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_1 , ενώ περιέχεται στο $f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικός $\rho \in \Delta_2$ τέτοιος ώστε $f(\rho) = 0$.

Άρα για $\alpha = 1$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα.

γ) i. Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) \leq 1 - \alpha \Leftrightarrow f(x) \leq f(1)$, οπότε η f παρουσιάζει

μέγιστο στο $x = 1$. Όμως η f παρουσιάζει μέγιστο στο $\frac{1}{\alpha}$, άρα $\frac{1}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

ii. Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > f(1) \text{ άτοπο} \end{cases}, \text{ οπότε δεν ορίζεται η } f \circ f.$$

iii. Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E = \int_1^e |f(x)| dx = -\int_1^5 (\ln x - x + 1) dx = -\int_1^5 \ln x (x)' dx + \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^e =$$

$$- [x \ln x]_1^e + \int_1^e x \frac{1}{x} dx + \frac{(e-1)^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$E = -e + (e-1) + \frac{(e-1)^2}{2} = \frac{(e-1)^2 - 2}{2} = \frac{e^2 - 2e - 1}{2} \text{ τ.μ.}$$

$$60. \alpha) x^2 f'(x) + x f(x) = 1 \Leftrightarrow x f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (x f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow$$

$$x f(x) = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x + c}{x}, x > 0, c \in \mathbb{R}. f(1) = -1 \Leftrightarrow c = -1 \text{ άρα}$$

$$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}, x > 0.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (\ln x - 1) \right] = -\infty \text{ άρα η } x=0 \text{ είναι}$$

κατακόρυφη ασύμπτωτη. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{-\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ οπότε η } y=0 \text{ δηλαδή ο άξονας } x'x$$

είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > e \text{ οπότε στο } [\lambda, 1] \text{ με}$$

$0 < \lambda < 1$ είναι $f(x) < 0$ και το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\lambda) = -\int_{\lambda}^1 f(x) dx = -\int_{\lambda}^1 \frac{\ln x - 1}{x} dx = \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x} dx - \int_{\lambda}^1 (\ln x)' \ln x dx =$$

$$= [\ln |x|]_{\lambda}^1 - \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_{\lambda}^1 = -\ln \lambda + \frac{\ln^2 \lambda}{2} \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{\ln^2 \lambda}{2} - \ln \lambda.$$

$$\delta) \lim_{\lambda \rightarrow 0} [\lambda^2 E(\lambda)] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\lambda^2 \ln^2 \lambda}{2} - \lambda^2 \ln \lambda \right] = 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \ln^2 \lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln^2 \lambda}{\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2 \ln \lambda \cdot \frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln \lambda}{\frac{1}{\lambda^2}} \right) \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(-\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{2}{\lambda^3}} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(-\frac{\lambda^2}{2} \right) = 0$$

$$\text{και } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \ln \lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ln \lambda}{\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{2}{\lambda^3}} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(-\frac{\lambda^2}{2} \right) = 0$$

$$\epsilon) f\left(\frac{\ln x - 1 + (e+1)x}{x}\right) = 0 = f(e) \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1 + (e+1)x}{x} = e \Leftrightarrow$$

$$\ln x - 1 + \cancel{e}x + x = \cancel{e}x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = 0 \quad (1). \text{ Έστω } g(x) = \ln x + x - 1, x > 0$$

$$\text{είναι } g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty). \quad (1) \Rightarrow g(x) = g(1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

61. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x} - \lambda$. Είναι

$f(1) = -\lambda - 2$, $f'(1) = 1 - \lambda$ και η εφαπτομένη της C_f στο A είναι η ευθεία

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = (1 - \lambda)x - 3.$$

β) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - \lambda = \frac{1 - \lambda x}{x}$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\lambda}$. Για κάθε

$x \in \left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{1}{\lambda}\right)$. Για κάθε

$x \in \left(\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{\lambda}, +\infty\right)$. Η f

έχει μέγιστο το $f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \ln \frac{1}{\lambda} - \lambda \frac{1}{\lambda} - 2 = -\ln \lambda - 3 < 0$, άρα $f(x) \leq f\left(\frac{1}{\lambda}\right) < 0$ για κάθε $x > 0$.

γ) Είναι $f''(x) = \left(\frac{1}{x} - \lambda\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0$, οπότε η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

δ) Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Άρα η f βρίσκεται κάτω και από την ευθεία ε του α) ερωτήματος, δηλαδή $f(x) \leq (1 - \lambda)x - 3$ για κάθε $x > 0$.

ε) i. Είναι $f(x) \leq (1 - \lambda)x - 3 \Leftrightarrow (1 - \lambda)x - 3 - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(1-\lambda)x - 3 - \ln x + \lambda x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Το ζητούμενο

εμβαδόν είναι: $E(\lambda) = \int_1^\lambda [(1-\lambda)x - 3 - f(x)] dx = \int_1^\lambda (x - 1 - \ln x) dx \Leftrightarrow$

$$E(\lambda) = \int_1^\lambda x dx - \int_1^\lambda dx - \int_1^\lambda \ln x (x)' dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^\lambda - \lambda + 1 - [x \ln x]_1^\lambda + \int_1^\lambda x \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^2 - 1}{2} - \lambda + 1 - \lambda \ln \lambda + \lambda - 1 \Leftrightarrow E(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1 - 2\lambda \ln \lambda).$$

$$\text{ii. } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1 - 2\lambda \ln \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} - 2\frac{\ln \lambda}{\lambda} \right) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\lambda}}{1} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0.$$

$$62. \alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2\alpha}{2\alpha e^{2\alpha+x}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\alpha e^{2\alpha+x}} = 0, \text{ οπότε η } y = 0$$

οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\beta) f'(x) = e^{2\alpha-x} \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{x}{2\alpha} - 1 \right) \text{ και } f''(x) = e^{2\alpha-x} \left(\frac{x}{2\alpha} + 1 - \frac{2}{2\alpha} \right)$$

Ολικό μέγιστο. για $x = 1 - 2\alpha$ και σημείο καμπής για $x = 2 - 2\alpha$.

$$\gamma) f(x) = f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2\alpha} - \frac{x}{2\alpha} - 1 = \frac{x}{2\alpha} + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1-4\alpha}{2} \text{ που είναι μοναδική.}$$

$$\delta) d(\alpha) = |f(1) - f'(1)| = e^{2\alpha-1} \left(\frac{1}{2\alpha} + 2 \right)$$

$$d'(\alpha) = e^{2\alpha-1} \left(\frac{8\alpha^2 + 2\alpha - 1}{2\alpha^2} \right) = e^{2\alpha-1} \frac{8\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{2\alpha^2} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{4}.$$

Για $\alpha > \frac{1}{4}$, είναι $d'(\alpha) > 0 \Rightarrow d \nearrow \left[\frac{1}{4}, +\infty \right)$ και για $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4} \right)$ είναι

$d'(\alpha) < 0 \Rightarrow d \searrow \left(0, \frac{1}{4} \right]$. Το τμήμα έχει το μικρότερο δυνατό μήκος για $\alpha = \frac{1}{4}$.

ε) Είναι $f(x) = (2x+1)e^{\frac{1}{2}-x}$.

$$E(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} (2x+1)e^{\frac{1}{2}-x} dx = -2(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda} + 2e \quad \text{και}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(-2(\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda} + 2e \right) = 2e \quad \text{γιατί}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda+1)e^{\frac{1}{2}-\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda+1}{e^{\lambda-\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\lambda-\frac{1}{2}}} = 0.$$

63. α) $\frac{xf(x)+9}{2+f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xf(x)+18 = 2+f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=16 \Leftrightarrow$

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2 = x^2+16 \Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = x^2+16.$$

Έστω $\varphi(x) = f(x) - x$ τότε αφού $\varphi^2(x) = x^2+16 \neq 0$ θα είναι $\varphi(x) \neq 0$ και

αφού η φ είναι συνεχής τότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως

$$\varphi(0) = f(0) = 4 > 0 \quad \text{άρα } \varphi(x) > 0 \quad \text{οπότε}$$

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2+16} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2+16}$$

β) i. Είναι $h(x) = \ln f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+16})$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2+16} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$ άρα $A_h = \mathbb{R}$.

ii. $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+16}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} > 0$ άρα η h' είναι

↗ $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται. Έστω

$$y = h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+16}) \Leftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+16} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+16} = e^y - x \stackrel{e^y-x>0}{\Leftrightarrow},$$

$$\text{οπότε } x^2+16 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 16 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-16}{2e^y} \quad \text{άρα}$$

$$h^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-16}{2e^x}. \text{ Πρέπει } e^y - x > 0 \Leftrightarrow e^y > \frac{e^{2y}-16}{2e^y} \Leftrightarrow e^{2y} > -16 \text{ που}$$

$$\text{αληθεύει πάντα, άρα } h^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-16}{2e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma) I_1 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx = \int_0^3 [h(x)]' dx = [h(x)]_0^3 = h(3) - h(0) =$$

$$\ln f(3) - \ln f(0) = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2.$$

$$\delta) I_2 + 16I_1 = \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}} dx + 16 \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx = \int_0^3 \frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}} dx = \int_0^3 \sqrt{x^2+16} dx = I_3.$$

$$\epsilon) I_3 = \int_0^3 \sqrt{x^2+16} dx = \int_0^3 (x)' \sqrt{x^2+16} dx = \left[x\sqrt{x^2+16} \right]_0^3 - \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} dx = 15 - \int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}} dx \Leftrightarrow I_3 = 15 - I_2 \Leftrightarrow I_3 + I_2 = 15.$$

$$\sigma\tau) \text{ Είναι } \left. \begin{array}{l} I_2 + I_3 = 15 \\ I_2 - I_3 = -16I_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} I_2 + I_3 = 15 \\ I_2 - I_3 = -16 \ln 2 \end{array}, \text{ οπότε } I_2 = \frac{15}{2} - 8 \ln 2 \text{ και } I_3 = \frac{15}{2} + 8 \ln 2.$$

64. α) Επειδή $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow$ στο $[2, 5]$ άρα και 1-1 οπότε η f είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f . Είναι $f(A) = [f(5), f(2)] = [f(5), 5]$ άρα $D_{f^{-1}} = [f(5), 5]$.

$$\beta) \text{ i. Είναι } \int_{f(2)}^{f(5)} f^{-1}(t) dt + \int_2^5 f(t) dt = 0 \quad (1)$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \quad f^{-1}(t) = u \Leftrightarrow t = f(u) \text{ και } dt = f'(u) du.$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται: } \int_2^5 u f'(u) du + \int_2^5 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[u f(u) \right]_2^5 - \int_2^5 f(u) du + \int_2^5 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow 5f(5) - 2f(2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$5f(5) = 10 \Leftrightarrow f(5) = 2.$$

ii. Θεωρούμε την $h(x) = f(x) + x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[2, 5]$ άρα και συνεχής. Επίσης $h(2) = f(2) + 2 = 5 + 2 = 7$, $h(5) = f(5) + 5 = 2 + 5 = 7$, άρα $h(2) = h(5)$. Επίσης $h'(x) = f'(x) + 1$. Άρα από Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (2, 5)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -1$. Η ευθεία $\eta: x - y + 1821 = 0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\eta = 1$. Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο

$M(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\epsilon\pi} = f'(\xi) = -1$. Επειδή $\lambda_\eta \cdot \lambda_{\epsilon\pi} = -1$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$M(\xi, f(\xi))$ είναι κάθετη στην ευθεία (η).

iii. Θεωρούμε την $\varphi(x) = f(x) - x$ η οποία είναι συνεχής στο $[2, 5]$ με $\varphi(2) = f(2) - 2 = 5 - 2 = 3 > 0$ και $\varphi(5) = f(5) - 5 = -3 < 0$. Οπότε

$\varphi(2) \cdot \varphi(5) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $\rho \in (2, 5)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) = \rho$. Επίσης $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ αφού $f'(x) < 0$ άρα η φ είναι $\searrow$ οπότε το ρ που βρήκαμε προηγουμένως είναι μοναδικό.

iv. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[2, \rho]$ και $[\rho, 5]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (2, \rho)$ και $\xi_2 \in (\rho, 5)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1) = \frac{f(\rho) - f(2)}{\rho - 2} = \frac{\rho - 5}{\rho - 2}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(5) - f(\rho)}{5 - \rho} = \frac{2 - \rho}{5 - \rho}$. Άρα $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{\rho - 5}{\rho - 2} \cdot \frac{2 - \rho}{5 - \rho} = 1$.

65. α) Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$f'(x) = -\frac{6x^5 + 1}{(x^6 + x)^2}.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$	0	$+\infty$
f'	+		+	-	-
f	$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$$-\frac{6x^5 + 1}{(x^6 + x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 6x^5 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 6x^5 \leq -1 \Leftrightarrow x^5 \leq -\frac{1}{6} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα στα διαστήματα

$$(-\infty, -1), \left(-1, -\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) \text{ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα } \left[-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}, 0\right),$$

$$(0, +\infty). \text{ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο } -\frac{1}{\sqrt[5]{6}} \text{ το } f\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = -\frac{6\sqrt[5]{6}}{5}.$$

$$\beta) \text{ Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^6 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^6} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^6 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^6} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^6 + x} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^5 + 1} = -1 \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^6 + x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^5 + 1} = -1 \cdot (+\infty) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^6 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^5 + 1} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^6 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5 + 1} \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Αν θεωρήσουμε τα διαστήματα :

$$\Delta_1 = (-\infty, -1), \Delta_2 = \left[-1, -\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right], \Delta_3 = \left[-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}, 0\right] \text{ και } \Delta_4 = (0, +\infty), \text{ τότε :}$$

$$f(\Delta_1) \stackrel{\nearrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \right) = (0, +\infty) ,$$

$$f(\Delta_2) \stackrel{\nearrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} \left[\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), f\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) \right] = \left[-\infty, -\frac{6}{5\sqrt[5]{6}} \right],$$

$$f(\Delta_3) \stackrel{\searrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} \left[\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), f\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) \right] = \left[-\infty, -\frac{6\sqrt[5]{6}}{5} \right] \text{ και}$$

$$f(\Delta_4) \stackrel{\searrow}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, +\infty). \text{ Άρα το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι}$$

$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) \cup f(\Delta_4) = \left[-\infty, -\frac{6\sqrt[5]{6}}{5} \right] \cup (0, +\infty).$$

γ) Το 2024 ανήκει μόνο στα $f(\Delta_1), f(\Delta_4)$ άρα υπάρχουν $a_1 \in \Delta_1, a_2 \in \Delta_4$ τέτοια ώστε $f(a_1) = f(a_2) = 2024$. Τα a_1, a_2 είναι μοναδικά λόγω της μονοτονίας στα αντίστοιχα διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 2024$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

δ) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ άρα έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 0$ και $x = -1$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ ($x'x$) και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ οπότε δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

$$\begin{aligned} \epsilon) f''(x) &= -\frac{30x^4(x^6+x)^2 - (6x^5+1) \cdot 2(x^6+x)(6x^5+1)}{(x^6+x)^4} = \\ &= -\frac{30x^{10} + 30x^5 - 72x^{10} - 24x^5 - 2}{(x^6+x)^3} = \frac{42x^{10} - 6x^5 + 2}{(x^6+x)^3} = \frac{2(21x^{10} - 3x^5 + 1)}{(x^6+x)^3}. \\ f''(x) &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(21x^{10} - 3x^5 + 1)}{(x^6+x)^3} \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + x > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 0. \end{aligned}$$

(Αν θέσουμε $x^5 = \beta$ στο πολυώνυμο $21x^{10} - 3x^5 + 1$ έχουμε το τριώνυμο $21\beta^2 - 3\beta + 1$, το οποίο έχει διακρίνουσα $\Delta = 9 - 84 = -75 < 0$ οπότε $21\beta^2 - 3\beta + 1 > 0$ άρα $21x^{10} - 3x^5 + 1 > 0$)

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, -1), (0, +\infty)$ και κοίλη στο $(-1, 0)$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+	
$f(x)$				

στ) Γνωρίζουμε ότι $\ln x \leq x - 1$

και ότι το ίσο ισχύει για $x = 1$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το

$$B(1, f(1)) \equiv B\left(1, \frac{1}{2}\right). \text{ Έστω } (\varepsilon) \text{ η ζητούμενη εφαπτομένη. Η εξίσωση της}$$

$$\text{εφαπτομένης είναι } y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{7}{4}x + \frac{9}{4}.$$

ζ) Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Άρα

$$f(x) \geq -\frac{7}{4}x + \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4f(x) \geq -7x + 9 \text{ για κάθε } x > 0.$$

η)

θ) $f(x) > 0$ στο $[1, 2]$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \frac{1}{x^6 + x} dx = \int_1^2 \frac{6x^5 + 1 - 6x^5}{x^6 + x} dx =$$

$$\int_1^2 \left(\frac{6x^5 + 1}{x^6 + x} - \frac{6x^5}{x^6 + x} \right) dx =$$

$$\int_1^2 \frac{6x^5 + 1}{x^6 + x} dx - \int_1^2 \frac{6x^5}{x^6 + x} dx = \left[\ln(x^6 + x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{6x^{\cancel{5}}}{\cancel{x}(x^5 + 1)} dx =$$

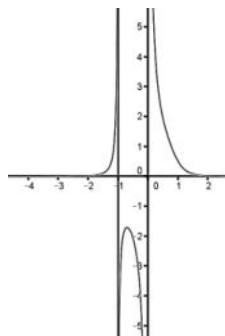
$$\ln 66 - \ln 2 - \frac{6}{5} \int_1^2 \frac{5x^4}{x^5 + 1} dx = \ln 33 - \frac{6}{5} \left[\ln(x^5 + 1) \right]_1^2 = \frac{5 \ln 33 - 6 \ln 17 + 6 \ln 2}{5}.$$

$$\text{ι)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) \eta \mu x + x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^6 + x} \eta \mu x + x \eta \mu \frac{2024}{x} \right) = 0 + 2024 = 2024.$$

$$\left(\left| \frac{1}{x^6 + x} \eta \mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x^6 + x} \right| = \frac{1}{x^6 + x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^6 + x} \leq \frac{1}{x^6 + x} \eta \mu x \leq \frac{1}{x^6 + x} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^6 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^6} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x^6 + x} \right) \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^6 + x} \eta \mu x \right) = 0.$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \eta \mu \frac{2024}{x} \stackrel{u = \frac{2024}{x}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow 0^+} \frac{2024}{u} \eta \mu u = \lim_{u \rightarrow 0^+} 2018 \frac{\eta \mu u}{u} = 2024 \cdot 1 = 2024 \quad .)$$

$g(x) \geq 0$ στο $[1, 2]$ ($\ln x \geq 0, f(x) > 0, x^5 + 1 > 0$) άρα το ζητούμενο εμβαδόν

είναι το

$$\int_1^e g(x) dx = \int_1^e 2024(x^5 + 1)f(x) \ln x dx = \int_1^e 2024(x^5 + 1) \frac{1}{x^6 + x} \ln x dx =$$

$$\int_1^e 2024 \cancel{(x^5 + 1)} \frac{1}{x \cancel{(x^5 + 1)}} \ln x dx = \int_1^e 2024 \frac{1}{x} \ln x dx = 1012$$

$$66. \alpha) f^2(x) = 2xf(x) + 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow$$

$(f(x) - x)^2 = x^2 + 9$ (1). Επειδή $x^2 + 9 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι

$g(x) = f(x) - x \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $g(0) = f(0) = 3 > 0$, είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η (1)

γίνεται: $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 9}}. \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι}$$

$$x^2 < x^2 + 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 9} < x < \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow$$

$$x + \sqrt{x^2 + 9} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \text{ άρα } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}. \text{ Η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη}$$

στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{f'(x)\sqrt{x^2 + 9} - f(x) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}}{\left(\sqrt{x^2 + 9}\right)^2} = \frac{\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 9}} \sqrt{x^2 + 9} - \frac{xf(x)}{\sqrt{x^2 + 9}}}{x^2 + 9} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{\frac{f(x)\sqrt{x^2 + 9} - xf(x)}{\sqrt{x^2 + 9}}}{x^2 + 9} = \frac{f(x)(\sqrt{x^2 + 9} - x)}{\sqrt{x^2 + 9}(x^2 + 9)} = \frac{f(x)f(-x)}{\sqrt{x^2 + 9}(x^2 + 9)} > 0 \Rightarrow .$$

$f \curvearrowright \mathbb{R}$.

$$\gamma) \sqrt{x^2 + 9} = \lambda - x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} + x = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 9} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - 9}{x - \sqrt{x^2 + 9}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}} \right)} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 9} \right) = +\infty + \infty = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

- Αν $\lambda \leq 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda > 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

$$\delta) x + \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{\left(x + \sqrt{x^2 + 9} \right)^2 + 9} < 9 \Leftrightarrow f(x) + \sqrt{f^2(x) + 9} < 9 \Leftrightarrow$$

$$f(f(x)) < f(4) \Leftrightarrow f(x) < 4 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} < 4 - x \quad (2)$$

Αν $4 - x < 0 \Leftrightarrow x > 4$ τότε η (2) είναι αδύνατη. Αν $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$ η (2)

$$\gammaίνεται: \left(\sqrt{x^2 + 9} \right)^2 < (4 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 < 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow 8x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{8} \text{ που}$$

είναι δεκτές τιμές.

$$\epsilon) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 9}} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}, \text{ άρα}$$

$$I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[\ln |f(x)| \right]_0^4 = \ln f(4) - \ln f(0) = \ln 9 - \ln 3 = \ln 3$$

στ) Είναι $M(x(t), y(t))$, όπου $y(t) = x(t) + \sqrt{x^2(t) + 9}$. Είναι $x'(t) = 1$ και

$$y'(t) = x'(t) + \frac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t) + 9}} \dots \text{ Είναι } (OM)(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \text{ οπότε}$$

$$(OM)'(t) = \frac{2x'(t)x(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}. \text{ Τη χρονική στιγμή } t_0 \text{ που είναι}$$

$x(t_0) = 4$, $y(t_0) = 9$ είναι:

$$(OM)'(t_0) = \frac{x'(t_0)x(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = \frac{1 \cdot 4 + 9 \left(1 + \frac{4 \cdot 1}{\sqrt{16 + 9}} \right)}{\sqrt{16 + 81}} = \frac{101}{5\sqrt{97}} \text{ cm/sec}$$

ζ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = y - x \quad (3)$$

Είναι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9} > x \Leftrightarrow y - x > 0$ οπότε η (3) γίνεται:

$$x^2 + 9 = (y - x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = y^2 - 2xy + x^2 \Leftrightarrow 2xy = y^2 - 9 \Leftrightarrow x = \frac{y^2 - 9}{2y}, \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2 - 9}{2y}, y \in (0, +\infty) \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{2x}, x \in (0, +\infty).$$

η) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E(\Omega) = \int_0^4 f(x) dx$. Θέτουμε

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και $dx = (f^{-1})'(y) dy$. Για $x = 0$ είναι $y = 3$ και για $x = 4$ είναι $y = 9$. Τότε

$$E(\Omega) = \int_3^9 y (f^{-1})'(y) dy = [y f^{-1}(y)]_3^9 - \int_3^9 f^{-1}(y) dy = 9 \cdot 4 - 3 \cdot 0 -$$

$$\int_3^9 \left(\frac{1}{2} y - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{y} \right) dy = 36 - \left[\frac{1}{4} y^2 - \frac{9}{2} \ln y \right]_3^9 = 18 + \frac{9}{2} \ln 3$$

$$\theta) (AB) = \sqrt{(x - f^{-1}(x))^2 + (f^{-1}(x) - x)^2} = \sqrt{2(x - f^{-1}(x))^2} = 2|x - f^{-1}(x)|.$$

Επειδή $f(x) > x$ η C_f βρίσκεται πάνω από την $y = x$ και λόγω συμμετρίας η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y = x$. Άρα

$$(AB) = 2(x - f^{-1}(x)) = 2 \left(x - \frac{x^2 - 9}{2x} \right) = 2 \frac{2x^2 - x^2 + 9}{2x} = \frac{x^2 + 9}{x} = x + \frac{9}{x}.$$

Είναι $(AB)'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}$. Για κάθε $x \in (0, 3)$ είναι

$$(AB)'(x) < 0 \Rightarrow (AB) \searrow (0, 3] \text{ και για κάθε } x > 3 \text{ είναι}$$

$$(AB)'(x) > 0 \Rightarrow (AB) \nearrow [3, +\infty). \text{ Η απόσταση } AB \text{ γίνεται ελάχιστη για } x = 3$$

με ελάχιστη απόσταση την $(AB) = 3 + \frac{9}{3} = 6$.

ι) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x^2) \stackrel{x^2=y}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)) = 0 \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} (u^2 - \eta \mu^2 u) = 0 \text{ και επειδή}$$

$$|\eta \mu f(x)| < |f(x)| \Leftrightarrow \eta \mu^2 f(x) < f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - \eta \mu^2 f(x) > 0, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x^2)}{f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x^2) \cdot \frac{1}{f^2(x) - \eta \mu^2 f(x)} \right] = +\infty(+\infty) = +\infty$$

Επίπεδο δυσκολίας Δ Θέματος

Επίπεδο Δ1

67. α) Για $x=0$: $f(0)-e^{-f(0)}=-1 \Leftrightarrow e^{-f(0)}-f(0)-1=0$ (1). Έστω

$$g(x)=e^{-x}-x-1, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } g'(x)=-e^{-x}-1 < 0 \Rightarrow g \text{ \textit{monotonically decreasing} } \Rightarrow g(0) < g(1) < g(-1)$$

$$(1) \Leftrightarrow g(f(0))=g(0) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} f(0)=0.$$

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε παραγωγίζοντας την σχέση

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1 (*) \text{ έχουμε:}$$

$$f'(x)+e^{-f(x)}f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)(1+e^{-f(x)})=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}} \quad (2).$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη τότε από τη (2) προκύπτει ότι και η f' είναι

$$\text{παραγωγίσιμη με } f''(x)=-\frac{(1+e^{-f(x)})'}{(1+e^{-f(x)})^2}=\frac{e^{-f(x)}f'(x)}{(1+e^{-f(x)})^2}>0 \text{ αφού η } f'(x)>0$$

οπότε η f κυρτή άρα η f' γνησίως αύξουσα. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f

$$\text{στο } [0, x], \text{ οπότε υπάρχει } \xi \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Είναι } 0 < \xi < x \text{ οπότε } f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \quad (3). \text{ Επίσης } f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}} < 1 \text{ οπότε για } x > 0 \text{ θα είναι}$$

$$xf'(x) < x \quad (4). \text{ Άρα από (3) και (4) έχουμε } \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x.$$

γ) Είναι $\frac{x}{2} < f(x) < x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ άρα από κριτήριο

παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ακόμη επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ είναι και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R} \text{ άρα έχει}$$

σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x)=1821$ έχει ακριβώς μια

ρίζα.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{f(x)}} \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty, \\ u \rightarrow +\infty}} \frac{1}{e^u} = 0$. Από τη σχέση (*) έχουμε:

$$f(x)-(x-1)=e^{-f(x)} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)-(x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)} = 0 \text{ άρα η}$$

$y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

ε) Έστω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$. Είναι $h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} > 0 \Rightarrow h \nearrow (0, +\infty)$

Είναι $2 \leq t \leq 3 \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(2) \leq h(t) \leq h(3) \Rightarrow \int_2^3 h(2) dt < \int_2^3 h(t) dt < \int_2^3 h(3) dt$ (5)

Είναι $3 \leq t \leq 4 \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(3) \leq h(t) \leq h(4) \Rightarrow \int_3^4 h(3) dt < \int_3^4 h(t) dt < \int_3^4 h(4) dt \Leftrightarrow$
 $h(3) < \int_3^4 h(t) dt \leq h(4)$ (6) (Οι ανισότητες

$h(2) \leq h(t) \leq h(3)$, $h(3) \leq h(t) \leq h(4)$ ισχύουν μόνο για $x = 2, 3, 4$)

Από (5), (6) $\Rightarrow \int_2^3 h(t) dt < \int_3^4 h(t) dt \Leftrightarrow \int_2^3 \frac{f(t)}{t} dt < \int_3^4 \frac{f(t)}{t} dt$.

στ) Για κάθε $0 \leq x \leq 1 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$, οπότε $E = \int_0^1 f(x) dx$.

Από την ανισότητα που αποδείξαμε στο β) έχουμε:

$$\int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx < \int_0^1 x dx \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx < \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E < \frac{1}{2} \quad (7)$$

Είναι $E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{f(1)}{2}$ (8).

Από το β σκέλος για $x = 1$ προκύπτει $\frac{1}{2} < f(1) < f'(1) < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{f(1)}{2} < \frac{1}{2}$ (9),

οπότε από (7), (8), (9) $\Rightarrow \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) < \frac{1}{2}$.

68. α) Είναι $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

οπότε είναι και $1-1$.

β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών

$$\text{το } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

γ) Για $x = y$ είναι $|x - y| = |f(x) - f(y)| = 0$.

Για $x < y$ από το ΘΜΤ στο $[x, y]$, υπάρχει $\xi \in (x, y)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \Leftrightarrow 3\xi^2 + 1 = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

$$\text{Όμως } \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |3\xi^2 + 1| = 3\xi^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq |x - y| \quad (1)$$

Όμοια για $x > y$. Τώρα θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και όπου y το $f^{-1}(y)$:

$$|f(f^{-1}(x)) - f(f^{-1}(y))| \geq |f(x) - f(y)| \Leftrightarrow |x - y| \geq |f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \quad (2).$$

Άρα από (1), (2) είναι $|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \leq |f(x) - f(y)|$. Όμοια για $x > y$.

δ) Αντικαθιστούμε $y = x_0$ και έχουμε: $|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)| \leq |x - x_0| \Leftrightarrow$

$$-|x - x_0| \leq f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0) \leq |x - x_0| \Leftrightarrow$$

$f^{-1}(x_0) - |x - x_0| \leq f^{-1}(x) \leq f^{-1}(x_0) + |x - x_0|$. Από το κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{-1}(x) = f^{-1}(x_0)$.

ε) $\lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) \stackrel{f^{-1} \text{ συνεχής}}{=} f^{-1}(2) = 0$ γιατί $f(0) = 2$ άρα $f^{-1}(2) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta \mu f^{-1}(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\eta \mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} \cdot \frac{f^{-1}(x)}{x - 2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\eta \mu f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)} \cdot \frac{f^{-1}(x)}{f(f^{-1}(x)) - 2} \right]$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = \omega$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} f^{-1}(x) = 0$ άρα $\omega \rightarrow 0$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta \mu f^{-1}(x)}{x - 2} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu \omega}{\omega} \cdot \frac{\omega}{f(\omega) - 2} \right) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu \omega}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\omega^3 + \omega} \right) =$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu \omega}{\omega} \cdot \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}(\omega^2 + 1)} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

στ) $f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) = -2\xi \stackrel{f^{-1-1}}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}(\xi)) = f(-2\xi) \Leftrightarrow \xi = f(-2\xi)$.

Έστω $h(x) = f(-2x) - x$, $x \in [0, 2]$. Η h είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Είναι $h(2) = f(-4) - 2 = -68 < 0$, $h(0) = f(0) = 2 > 0$, άρα από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(\xi) + 2\xi = 0$.

Είναι $h(x) = f(-2x) - x = -8x^3 - 2x + 2 - x = -8x^3 - 3x + 2$ και

$$h'(x) = -24x^2 - 3 < 0 \Rightarrow h \searrow [0, 2], \text{ οπότε το } \xi \text{ είναι μοναδικό.}$$

ζ) Είναι $f(x) - x = x^3 + 2 > 0$ για κάθε $x \in [2, 4]$, άρα $f(x) > x > f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in [2, 4]$. $E(\Omega) = \int_2^4 (f(x) - f^{-1}(x)) dx = \int_2^4 f(x) dx - \int_2^4 f^{-1}(x) dx$.

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$.

Για $x = 2 \Rightarrow f(u) = 2 = f(0) \Leftrightarrow u = 0$ και για $x = 4 \Rightarrow f(u) = 4 = f(1) \Leftrightarrow u = 1$

$$\text{Οπότε } E(\Omega) = \int_2^4 (x^3 + x + 2)dx - \int_0^1 uf'(u)du = \frac{275}{4}.$$

69. α) Έστω $\frac{f(x) - x^2}{x - 1} = \varphi(x)$, $x \neq 1$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = -3$.

$$\text{Είναι } f(x) - x^2 = \varphi(x)(x - 1) \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x)(x - 1) + x^2.$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $x = 1$, οπότε:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [\varphi(x)(x - 1) + x^2] = 1$$

$$\beta) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x)(x - 1) + x^2 - 1}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x)(x - 1) + (x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(\varphi(x) + (x + 1))}{x - 1} = -1$$

γ) Είναι $f'(x) \leq -1 \Leftrightarrow f'(x) \leq f'(1)$, οπότε η f' έχει μέγιστο στο $x = 1$ που

βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f' είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f''(1) = 0$.

Επειδή η f'' είναι γνησίως φθίνουσα, είναι και 1-1 οπότε η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f''(x) = 0$.

δ) Για κάθε $x < 1 \Leftrightarrow f''(x) > f''(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο

$(-\infty, 1]$, είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f''(x) < f''(1) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) \leq -1 < 0 \Rightarrow f' \searrow$.

στ) Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση

$$ε: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2.$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \leq -x + 2$ για κάθε $x \geq 1$.

η) Για κάθε $x \geq 1$ είναι: $f(x) \leq -x + 2 \Leftrightarrow xf(x) \leq -x^2 + 2x$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, έχουμε:

$$\int_1^3 xf(x)dx < \int_1^3 (2x - x^2)dx \Leftrightarrow \int_1^3 xf(x)dx < \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^3 xf(x) dx < 9 - 9 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3 \int_1^3 xf(x) dx < -2$$

$$\eta) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x)' f(x) dx = [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = 1 - \int_0^1 xf'(x) dx$$

Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f'(x) \leq -1$, οπότε για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει ότι

$$xf'(x) \leq -x \Rightarrow \int_0^1 xf'(x) dx \leq -\int_0^1 x dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\int_0^1 xf'(x) dx \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \int_0^1 xf'(x) dx \geq \frac{3}{2}, \text{ άρα } \int_0^1 f(x) dx \geq \frac{3}{2}.$$

θ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[x, x+1]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

$$\text{Είναι } x < \xi < x+1 \xRightarrow{f' \searrow [1, +\infty)} f'(x) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x) > f(x+1) - f(x)$$

$$70. \alpha) xf'(x) = -f^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f(x)} = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\ln x + c}. f(e) = 1 \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα } f(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

β) Η εφαπτομένη στο $M(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow$
 $y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$. Αυτή τέμνει τους άξονες στα σημεία

$$A\left(-\frac{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right) \text{ και } B(0, f(x_0) - x_0 f'(x_0)).$$

$$E_{OAB} = \frac{1}{2} |f(x_0) - x_0 f'(x_0)| \left| -\frac{f(x_0) - x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)} \right| \Leftrightarrow$$

$$\frac{15}{2} = \frac{1}{2} \frac{(f(x_0) - x_0 f'(x_0))^2}{|f'(x_0)|} \xRightarrow[x_0 > e]{f'(x_0) < 0} -15f'(x_0) = (f(x_0) - x_0 f'(x_0))^2$$

Αρκεί να δείξουμε ότι συνάρτηση $h(x) = (f(x) - xf'(x))^2 + 15f'(x)$ έχει ρίζα

στο (e, e^2) . Είναι $f(e) = 1$, $f'(e) = -\frac{1}{e}$, $f(e^2) = \frac{1}{2}$ και $f'(e^2) = -\frac{1}{4e^2}$. Οπότε

$$h(e) = 4 - \frac{15}{e} = \frac{4e - 15}{e} < 0 \text{ και } h(e^2) = \frac{9}{16} - \frac{15}{4e^2} = \frac{9e^2 - 60}{16e^2} > 0 \text{ γιατί}$$

$3e > 8 \Leftrightarrow 9e^2 > 64 \Leftrightarrow 9e^2 - 60 > 0$, οπότε από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (e, e^2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$.

γ) Έστω F μία αρχική της f , τότε $F'(x) = f(x)$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την F στο $[x, x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln \xi} = \int_x^{x+1} f(t) dt \quad (3).$$

$$\text{Όμως } x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \ln x < \ln \xi < \ln(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{\ln \xi} > \frac{1}{\ln(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\ln x} > \int_x^{x+1} f(t) dt > \frac{1}{\ln(x+1)}. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} = 0$$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$.

δ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$

τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$. Είναι

$$f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}, \quad f''(x) = \frac{\ln x (\ln x + 2)}{x^2 \ln^4 x} > 0 \quad \text{άρα η } f' \text{ είναι γνησίως αύξουσα}$$

στο $(1, +\infty)$. Είναι $\alpha < \xi < \beta \Leftrightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta) \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} < \frac{\frac{1}{\ln \beta} - \frac{1}{\ln \alpha}}{\beta - \alpha} < -\frac{1}{\beta \ln^2 \beta} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\beta - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\ln^2 \alpha} < \frac{\ln \alpha - \ln \beta}{\ln \alpha \ln \beta} < -\frac{\beta - \alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{\ln^2 \beta} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\ln \beta \cancel{\ln \alpha}}{\ln^2 \alpha} < \ln \frac{\alpha}{\beta} < \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \frac{\ln \alpha \cancel{\ln \beta}}{\ln^2 \beta} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{\ln \beta}{\ln \alpha} < \ln \frac{\alpha}{\beta} < \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) \frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$$

71. α) Είναι $\int_1^e f(t) dt = \lambda \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$f(x) = \ln x + \int_1^e \frac{f(t)}{(3-e)x} dt - 1 = \ln x + \frac{1}{(3-e)x} \int_1^e f(t) dt - 1 = \ln x + \frac{\lambda}{(3-e)x} - 1$$

$$\text{και } \int_1^e f(t) dt = \lambda \Leftrightarrow \int_1^e \left(\ln t + \frac{\lambda}{(3-e)t} - 1 \right) dt = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \ln t dt + \frac{\lambda}{(3-e)} \int_1^e \frac{1}{t} dt - e + 1 = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \ln t (t)' dt + \frac{\lambda}{(3-e)} [\ln t]_1^e - e + 1 = \lambda \Leftrightarrow [t \ln t]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \cdot t dt + \frac{\lambda}{(3-e)} - e + 1 = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\cancel{e} - [t]_1^e - \cancel{e} + 1 = \lambda - \frac{\lambda}{3-e} \Leftrightarrow 2 - e = \lambda \left(1 - \frac{1}{3-e} \right) \Leftrightarrow \cancel{2} - e = \lambda \frac{\cancel{2} - e}{3-e} \Leftrightarrow \lambda = 3 - e$$

$$\text{και } f(x) = \ln x + \frac{\cancel{3-e}}{(3-e)x} - 1 = \ln x + \frac{1}{x} - 1, \quad x > 0.$$

$$\beta) x \ln x + 1 = x(\alpha + 1) \Leftrightarrow x \ln x + 1 = x\alpha + x \Leftrightarrow x \ln x + 1 - x = \alpha x \Leftrightarrow$$

$$\ln x + \frac{1}{x} - 1 = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha. \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με}$$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$. Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(x \ln x + 1 - x) \frac{1}{x} \right] = 1(+\infty) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + \frac{1}{x} - 1 \right) = +\infty + 0 - 1 = +\infty. \text{ Στο διάστημα } \Delta_1 = (0, 1) \text{ η } f$$

είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (f(1), +\infty) = (0, +\infty). \text{ Στο διάστημα}$$

$\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο

$$\text{σύνολο τιμών το } f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (f(1), +\infty) = (0, +\infty).$$

- Αν $\alpha < 0$ τότε το α δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.

- Αν $\alpha = 0$ τότε $\alpha \notin f(\Delta_1)$ και $\alpha \notin f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη στα διαστήματα Δ_1, Δ_2 . Επειδή $f(1) = 0$, η εξίσωση $f(x) = \alpha = 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα την $x = 1$.

- Αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha \in f(\Delta_1)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1 και ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2 , οπότε έχει ακριβώς δύο ρίζες.

γ) Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow e^x + \ln x = \frac{xe^x + x - 1}{x} \Leftrightarrow \cancel{e^x} + \ln x = \cancel{e^x} + 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0$$

.Επειδή για κάθε $x \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ είναι $f(x) > 0$ και $f(1) = 0$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = h(x)$. Είναι $g(1) = e^1 + \ln 1 = e$, οπότε το σημείο τομής τους είναι το $(1, e)$.

δ) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, $f'(e) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{e-1}{e^2}$ και $f(e) = \frac{1}{e}$. Η εφαπτομένη

της C_f στο σημείο $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ είναι η ευθεία ε:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y = \frac{e-1}{e^2}x - 1 + \frac{2}{e}$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{-x+2}{x^3}$.

Για κάθε $x > 2$ είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[2, +\infty)$ και βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής

τους, άρα $f(x) \leq \frac{e-1}{e^2}x - 1 + \frac{2}{e} \Leftrightarrow e^2 f(x) \leq (e-1)x - e^2 + 2e \Leftrightarrow$

$$e^2 \left(\ln x + \frac{1}{x} - 1 \right) \leq (e-1)x - e^2 + 2e \Leftrightarrow e^2 \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) - \cancel{e^2} \leq (e-1)x - \cancel{e^2} + 2e \Leftrightarrow$$

$$e^2 \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) \leq (e-1)x + 2e \text{ για κάθε } x \geq 2.$$

ε) $\left(\frac{4}{5}\right)^{20} < e^{-1} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{5}\right)^{20} < \ln e^{-1} \Leftrightarrow 20(\ln 4 - \ln 5) < -1 \Leftrightarrow \ln 4 - \ln 5 < -\frac{1}{20} \Leftrightarrow$

$$\ln 4 < \ln 5 - \frac{1}{20} \Leftrightarrow \ln 4 + \frac{1}{4} - 1 < \ln 5 + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{20} \Leftrightarrow f(4) < \ln 5 - 1 + \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$f(4) < f(5)$ που ισχύει αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

στ) $x\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2f(x) \Leftrightarrow x^2\varphi'(x) + 2x\varphi(x) = 2x\left(\ln x + \frac{1}{x} - 1\right) \Leftrightarrow$

$$(x^2\varphi(x))' = 2x \ln x + 2 - 2x \Leftrightarrow (x^2\varphi(x))' = (x^2)' \ln x + x + 2 - 3x \Leftrightarrow$$

$$(x^2\varphi(x))' = \left(x^2 \ln x + 2x - \frac{3}{2}x^2\right)' \Leftrightarrow$$

$$x^2 \varphi(x) = x^2 \ln x + 2x - \frac{3}{2}x^2 + c \Leftrightarrow \varphi(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2} + \frac{c}{x^2}, c \in \mathbb{R}.$$

$$\varphi(1) = 2 - \frac{3}{2} + c \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = 0 \text{ και } \varphi(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2}, x > 0.$$

$$\zeta) f(x) \leq \frac{(x-1)^2}{x} \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} - 1 \leq \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} - 1 \leq x - 2 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln x \leq x - 1 \text{ ισχύει.}$$

$$\eta) f(x) + (x-1)^{10} = 0$$

Είναι $(x-1)^{10} \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$. Επίσης $f(x) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $f(x) + (x-1)^{10} > 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Επειδή $f(1) + (1-1)^{10} = 0$, η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) + (x-1)^{10} = 0$.

$$\theta) \text{ Έστω } M(x(t), y(t)), \text{ όπου } y(t) = \ln x(t) + \frac{1}{x(t)} - 1 \text{ με}$$

$$y'(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} - \frac{x'(t)}{x^2(t)}. \text{ Η απόσταση του } M \text{ από την αρχή των αξόνων είναι}$$

$$s(t) = (OM)(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}.$$

$$\text{Είναι } s'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}} = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}.$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το B , τότε

$x(t_0) = 1$ και $y(t_0) = 0$. Επειδή το M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων με ταχύτητα 2 μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο ισχύει ότι $s'(t_0) = 2$,

$$\text{άρα } \frac{x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0)}{\sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0)}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1 \cdot x'(t_0) + 0 \cdot y'(t_0)}{\sqrt{1+0}} = 2 \Leftrightarrow x'(t_0) = 2$$

μ.μ./sec

72. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = 2x \ln(x+1) + \frac{x^2-1}{x+1} - 2x \ln x - x \cdot \frac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = 2x \ln(x+1) + \cancel{x} - \cancel{x} - 2x \ln x - \cancel{x} + \cancel{x} = 2x \ln \frac{x+1}{x} = 2x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Για κάθε $x > 0$ είναι

$$1 + \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty) .$$

β) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = 2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2x \frac{x}{x+1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = 2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{2x}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1} .$$

Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f^{(3)}(x) = 2 \frac{x}{x+1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{2}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)^2} < 0 \Rightarrow f'' \searrow (0, +\infty) .$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1} \right] = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x+1} \right] = 0 .$$

Επειδή η f'' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, έχει σύνολο τιμών το

$$f''((0, +\infty)) = (0, +\infty) , \text{ άρα } f''(x) > 0 \Rightarrow f \cup (0, +\infty) .$$

$$\gamma) (x^2 - 1) \ln(x+1) + x - 1 = x^2 \ln x + \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda .$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0 , \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 .$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 \ln(x+1) - \ln(x+1) - x^2 \ln x + x - 1] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln \frac{x+1}{x} + (x - \ln(x+1) - 1) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{1}{x}\right) \right] = +\infty + \infty(1 - 0 - 0) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{DLH \ u \rightarrow 0^+} \frac{1}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{2u^2 + 2u} = +\infty .$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f((0, +\infty)) = (-1, +\infty)$.

- Αν $\lambda \leq -1$ τότε $\lambda \notin f((0, +\infty))$ οπότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda > -1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f'(x)} = e^2$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln(1+u)}{u} \stackrel{DLH \ u \rightarrow 0^+}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{2}{1} = 2$$

ε) Για την f εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x, x+1]$, $x > 0$, οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi \in (x, x+1) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x) .$$

Είναι

$$x < \xi < x+1 \stackrel{f', \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1) .$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x+1) \stackrel{x+1=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} f'(u) = 2$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 2$.

στ) Για κάθε $1 \leq x \leq 2 \stackrel{f', \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2) \Leftrightarrow 2 \ln 2 \leq f'(x) \leq 4 \ln \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\ln 2^2 \leq f'(x) \leq \ln \left(\frac{3}{2} \right)^4 \Leftrightarrow \ln 4 \leq f'(x) \leq \ln \frac{81}{16} \Leftrightarrow 4 \leq e^{f'(x)} \leq \frac{81}{16} .$$

Επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1, 2]$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$\int_1^2 4 dx < \int_1^2 e^{f'(x)} dx < \int_1^2 \frac{81}{16} dx \Leftrightarrow 4 < \int_1^2 e^{f'(x)} dx < \frac{81}{16}$$

ζ) $1 \leq x \leq 2 \stackrel{f', \nearrow}{\Leftrightarrow} f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι:

$$\int_1^2 f(1) dx < \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 f(2) dx \Leftrightarrow f(1) < \int_1^2 f(x) dx < f(2) \quad (1)$$

$$2 \leq x \leq 3 \stackrel{f', \nearrow}{\Leftrightarrow} f(2) \leq f(x) \leq f(3) \text{ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε}$$

$x \in [2, 3]$ είναι:

$$\int_2^3 f(2) dx < \int_2^3 f(x) dx < \int_2^3 f(3) dx \Leftrightarrow f(2) < \int_2^3 f(x) dx < f(3) \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx < \int_2^3 f(x) dx$$

73. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο τότε θα έχουμε

$$f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0 \text{ και για κάθε } x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0 \text{ έχουμε}$$

$$\text{ότι } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ισχύει:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(x_0) \leq 0 \text{ άτοπο.}$$

$$\beta) f(x)(f'(x) - 1) = \frac{1}{2} - \frac{f'(2x)}{2} + xf'(x) - x \Leftrightarrow$$

$$f(x)(f'(x) - 1) = \frac{1}{2} - \frac{f'(2x)}{2} + x(f'(x) - 1) \Leftrightarrow$$

$$f(x)(f'(x) - 1) - x(f'(x) - 1) = \frac{1}{2} - \frac{f'(2x)}{2} \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)(f'(x) - 1) = \frac{1}{2} - \frac{f'(2x)}{2} \Leftrightarrow$$

$$2(f(x) - x)(f'(x) - 1) = 1 - f'(2x) \Leftrightarrow \left((f(x) - x)^2 \right)' = \left(x - \frac{f(2x)}{2} \right)' \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - x)^2 = x - \frac{f(2x)}{2} + c, c \in \mathbb{R} \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } c = \frac{1}{2} \text{ άρα τελικά έχουμε}$$

$$(f(x) - x)^2 = x + \frac{1}{2} - \frac{f(2x)}{2}, \quad x \leq x_0$$

γ) Επειδή $(f(x) - x)^2 \geq 0$ με την ισότητα να μην ισχύει για κάθε $x \leq x_0$ αφού για $x = 0$ είναι $1 = 0$ που είναι αδύνατο, έχουμε ότι

$$x - \frac{f(2x)}{2} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(2x)}{2} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(2x) \leq 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{x_0}{2}} f(2x) dx < \int_0^{\frac{x_0}{2}} (2x + 1) dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{x_0}{2}} f(2x) dx < \left[x^2 + x \right]_0^{\frac{x_0}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{x_0}{2}} f(2x) dx < \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0}{2} \quad (1). \text{ Θέτουμε } 2x = u \Rightarrow 2 dx = du. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι}$$

$$u=0 \text{ ενώ για } x = \frac{x_0}{2} \text{ είναι } u = x_0. \text{ Η (1) γίνεται: } \int_0^{x_0} f(x) dx < \frac{x_0^2}{8} + \frac{x_0}{4}$$

$$\delta) g''(x) = (g'(x))^2 \Leftrightarrow g''(x) = g'(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow g''(x) - g'(x) \cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-g(x)} g''(x) - e^{-g(x)} g'(x) \cdot g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(e^{-g(x)} g'(x) \right)' = 0 \Leftrightarrow e^{-g(x)} g'(x) = c_1 \text{ με}$$

$$c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x = -1: e^{-g(-1)} g'(-1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = e^0 \cdot 1 \Leftrightarrow c_1 = 1 \text{ άρα}$$

$$e^{-g(x)} g'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(-e^{-g(x)} \right)' = (x)' \Leftrightarrow$$

$$-e^{-g(x)} = x + c_2 \Leftrightarrow e^{-g(x)} = -x - c_2 \text{ με } c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = -\frac{1}{2}: e^{-g\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} - c_2 \Leftrightarrow e^{-\ln 2} = \frac{1}{2} - c_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0.$$

$$\text{Άρα τελικά } g(x) = -\ln(-x), x < 0.$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)x - f(x)}{x^3} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f'(x)}{x^2} - \frac{f(x)}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(f'(x) \frac{1}{x^2} - f(x) \frac{1}{x^3} \right) =$$

$$= f'(0)(+\infty) - (-1)(+\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1 \text{ επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο μηδέν ως παραγωγίσιμη.}$$

$$\text{Είναι } f(0)(f'(0) - 1) = \frac{1}{2} - \frac{f'(0)}{2} \Leftrightarrow \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(0) = 1 > 0.$$

74. α) Η f γνησίως μονότονη στο $[a, \beta]$ και $f(a) < f(\beta)$ άρα $f \nearrow [a, \beta]$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = a$ το $f(a) = 1$ και ολικό μέγιστο για $x = \beta$ το $f(\beta) = 2$.

β) Έστω ότι η αντίστροφη f^{-1} με πεδίο ορισμού το

$f([a, \beta]) = [f(a), f(\beta)] = [1, 2]$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [1, 2]$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2) \xrightarrow{f'} f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 \geq x_2 \text{ άτοπο.}$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$.

γ) Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$. Για $x = 1$ είναι

$$f(u) = 1 \Leftrightarrow f(u) = f(\alpha) \xrightarrow{f^{-1}} u = \alpha \text{ και για } x = 2 \text{ είναι}$$

$$f(u) = 2 \Leftrightarrow f(u) = f(\beta) \xrightarrow{f^{-1}} u = \beta.$$

Τότε $\int_a^\beta f(x)dx = 2\beta - \alpha - \int_1^2 f^{-1}(x)dx \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x)dx = 2\beta - \alpha - \int_a^\beta uf'(u)du \Leftrightarrow$
 ~~$\int_a^\beta f(x)dx = 2\beta - \alpha - [uf(u)]_a^\beta + \int_a^\beta f(u)du \Leftrightarrow 0 = 2\beta - \alpha - \beta f(\beta) + \alpha f(\alpha) \Leftrightarrow$~~
 $2\beta - \alpha - 2\beta + \alpha = 0$ ισχύει.

δ) i) Πρέπει $1 \leq x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}] \text{ και } 1 \leq 2x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x^2) + e^{x^2-1} - x^2 = f^{-1}(2x-1)$ ορίζεται για $x \in [1, \sqrt{2}]$.

Αφού $\alpha = 0$ τότε $f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$ και παρατηρούμε ότι η $x = 1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης.

Ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$.

Για x το $x^2 - 1$ είναι $e^{x^2-1} \geq x^2$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ άρα για } x \in (1, \sqrt{2}] \text{ είναι}$$

$$e^{x^2-1} > x^2 \Leftrightarrow e^{x^2-1} - x^2 > 0 \quad (1)$$

Επίσης ισχύει $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 2x - 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 1$. Δηλαδή για $x \in (1, \sqrt{2}]$ είναι

$$x^2 > 2x - 1 \Leftrightarrow \overset{f^{-1}}{f^{-1}}(x^2) > f^{-1}(2x - 1) \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει ότι για $x \in (1, \sqrt{2}]$ είναι

$$f^{-1}(x^2) + e^{x^2-1} - x^2 > f^{-1}(2x - 1).$$

Άρα η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

ii) Όπως στο ερώτημα γ) είναι $I = \int_1^2 f^{-1}(x)dx = \int_a^\beta uf'(u)du = \int_0^\beta xf'(x)dx$

$$\text{Άρα } \int_0^\beta f(x)dx = \int_1^2 f^{-1}(x)dx \Leftrightarrow \int_0^\beta f(x)dx = \int_0^\beta xf'(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\beta [f(x) - xf'(x)]dx = 0.$$

Έστω η συνάρτηση $k(x) = f(x) - xf'(x)$, $x \in [0, \beta]$, η οποία είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αν $k(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, \beta]$ τότε η k διατηρεί πρόσημο άρα:

$$\text{αν } k(x) > 0 \Rightarrow \int_0^\beta k(x)dx > 0 \text{ άτοπο ή αν } k(x) < 0 \Rightarrow \int_0^\beta k(x)dx < 0 \text{ άτοπο.}$$

Επομένως υπάρχει $x_0 \in [0, \beta]$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0$

Αν $x_0 = 0$ τότε $f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ αδύνατο.

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0, \beta]$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f}{x} \right)'(x_0) = 0.$$

75. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με: $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1. \text{ Όταν } x \in (0, 1), \text{ είναι } f'(x) > 0$$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$. Όταν $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

β) Έστω $y = \lambda x$ η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Επειδή τέμνει την C_f στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, ισχύει:

$$\begin{cases} f(\alpha) = \lambda \alpha \\ f(\beta) = \lambda \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \\ \lambda = \frac{f(\beta)}{\beta} \end{cases}, \text{ άρα } \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \frac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\ln \alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{\ln \beta + 1}{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\beta^2 \ln \alpha + \beta^2 = \alpha^2 \ln \beta + \alpha^2 \Leftrightarrow \beta^2 \ln \alpha - \alpha^2 \ln \beta = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\ln \alpha^{\beta^2} - \ln \beta^{\alpha^2} = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \ln \frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = e^{\alpha^2 - \beta^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^{\beta^2}}{\beta^{\alpha^2}} = \frac{e^{\alpha^2}}{e^{\beta^2}} \Leftrightarrow e^{\beta^2} \alpha^{\beta^2} = e^{\alpha^2} \beta^{\alpha^2} \Leftrightarrow (e\alpha)^{\beta^2} = (e\beta)^{\alpha^2}.$$

γ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[x, x+1]$, $x > 0$ και παραγωγίσιμη στο

$$(x, x+1) \text{ με: } g'(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 1}{x} = f(x), \text{ άρα λόγω του θεωρήματος}$$

μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow g'(\xi) = g(x+1) - g(x). \text{ Επειδή η } f \text{ είναι γνησίως}$$

φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, η g' είναι γνησίως φθίνουσα. Είναι $x < \xi < x+1$ και

$$g'(x+1) < g'(\xi) < g'(x) \Leftrightarrow \frac{\ln(x+1)+1}{x+1} < g(x+1) - g(x) < \frac{\ln x + 1}{x}.$$

δ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, ισχύει: $1 \leq x \leq e \Leftrightarrow$

$f(1) \geq f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow \frac{2}{e} \leq f(x) \leq 1$. Δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, e]$. Το

εμβαδόν είναι: $E = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$

$$E = \int_1^e \ln x (\ln x)' dx + [\ln x]_1^e = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ τ.μ..}$$

ε) $\ln x - kx + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = k$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left((\ln x + 1) \frac{1}{x} \right) = -\infty(+\infty) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$

.Είναι $f((0,1)) = (-\infty, 1)$ και $f((1, +\infty)) = (0, 1)$. Αν $k \leq 0$ τότε $k \in f((0,1))$

και $k \notin f((1, +\infty))$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς

μια ρίζα στο $(0,1)$. Αν $k \in (0,1)$ τότε $k \in f((0,1))$ και $k \in f((1, +\infty))$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1, +\infty)$. Αν $k \geq 1$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

76. α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με: $f'(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \right) = -\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

β) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Όταν $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Όταν $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Η f έχει ελάχιστο το

$$f(1) = 2\sqrt{1}(\ln 1 - 2) = 2(-2) = -4.$$

γ) $\sqrt{\alpha} \ln \alpha + \sqrt{\beta} \ln \beta = 2\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} - 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha} \ln \alpha - 4\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta} \ln \beta - 4\sqrt{\beta} = -8 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) = -8$ (1). Επειδή $f(x) \leq -4$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, είναι $f(\alpha) + f(\beta) \leq -8$, οπότε (1) $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$.

δ) Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με: $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$.

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2$. Όταν $0 < x < e^2$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0, e^2]$. Όταν $x > e^2$ είναι $f''(x) < 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $[e^2, +\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $(e^2, f(e^2)) \equiv (e^2, 0)$.

ε) Είναι $x_1 = 1$, $x_2 = e^2$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, e^2)$, άρα το ζητούμενο

$$\text{εμβαδόν είναι: } E(\Omega) = -\int_1^{e^2} f(x) dx = -2 \int_1^{e^2} \sqrt{x} (\ln x - 2) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -2 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right)' (\ln x - 2) dx = -\frac{4}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} (\ln x - 2) \right]_1^{e^2} + \frac{4}{3} \int_1^{e^2} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\frac{4}{3} [e^3 (2 - 2) - (-2)] + \frac{4}{3} \int_1^{e^2} x^{\frac{1}{2}} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -\frac{8}{3} + \frac{4}{3} \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{e^2} = -\frac{8}{3} + \frac{8}{9} (e^3 - 1) = \frac{8(e^3 - 2)}{9} \text{ τ.μ..}$$

$$\sigma\tau) \quad x^2 - 5x - 1 = 2\sqrt{x}\sqrt{x} (\ln x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 2x \ln x - 4x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x \ln x - x - 1 = 0. \text{ Έστω } g(x) = x^2 - 2x \ln x - x - 1, \quad x > 0. \text{ Είναι}$$

$$g'(x) = 2x - 2 \ln x - 3 \text{ και } g''(x) = 2 \frac{x-1}{x}. \text{ Για κάθε } 0 < x < 1 \text{ είναι}$$

$$g''(x) < 0 \Rightarrow g' \searrow (0, 1]. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = +\infty \text{ και } g'(1) = -1, \text{ οπότε στο}$$

διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ η g' έχει σύνολο τιμών το $g'(\Delta_1) = [-1, +\infty)$, άρα υπάρχει

$$x_1 \in (0, 1): g'(x_1) = 0. \text{ Για κάθε } 0 < x < x_1 \Rightarrow g'(x) > g'(x_1) = 0 \Rightarrow g' \nearrow (0, x_1]$$

$$\text{Είναι } g'(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 2 \ln x_1 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x_1 = 2x_1 - 3 \quad (1). \text{ Είναι}$$

$$g(x_1) = x_1^2 - x_1 2 \ln x_1 - x_1 - 1 \stackrel{(1)}{=} x_1^2 - x_1 (2x_1 - 3) - x_1 - 1 = -(x_1 - 1)^2 < 0, \quad$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1, \text{ οπότε}$$

στο διάστημα $A_1 = (0, x_1]$ η g έχει σύνολο τιμών το $g(A_1) = (-1, g(x_1)]$.

Επειδή $0 \notin g(A_1)$ η $g(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο A_1 .

Για κάθε $x_1 < x < 1 \Rightarrow g'(x) < g'(x_1) = 0 \Rightarrow g' \searrow [x_1, 1]$, οπότε $g(x) < g(x_1) < 0$

για κάθε $x \in [x_1, 1]$. Για κάθε $x > 1$ είναι $g''(x) > 0 \Rightarrow g' \nearrow [1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 - 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{3}{x} \right) \right] = +\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$ η g' έχει σύνολο τιμών το $g'(\Delta_2) = [-1, +\infty)$, άρα υπάρχει $x_2 \in (1, +\infty)$: $g'(x_2) = 0$. Είναι

$$g'(x_2) = 0 \Leftrightarrow 2x_2 - 2\ln x_2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x_2 = 2x_2 - 3 \quad (2) \text{ και}$$

$$g(x_2) = x_2^2 - x_2 2\ln x_2 - x_2 - 1 = -(x_2 - 1)^2 < 0. \text{ Για κάθε}$$

$$1 < x < x_2 \Rightarrow g'(x) < g'(x_2) < 0 \Rightarrow g \searrow [1, x_2], \text{ άρα } g(x) < g(1) = -1. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{DLH} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right] = +\infty.$$

Στο διάστημα $A_2 = [x_2, +\infty)$ η f έχει σύνολο τιμών το $g(A_2) = [g(x_2), +\infty)$. Επειδή $0 \in g(A_2)$ η $g(x) = 0$ έχει μία ρίζα στο A_2 .

77. α) Επειδή οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, ισχύει:

$$(f^2(x) + g^2(x))' = (4)' \text{ ή } 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0. \text{ Επειδή}$$

$$f'(x) = g^2(x), \text{ είναι}$$

$$2f(x)g^2(x) + 2g(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2g(x)g'(x) = -2f(x)g^2(x) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{2f(x)g^2(x)}{2g(x)} \Leftrightarrow g'(x) = -f(x)g(x).$$

β) Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής και αφού $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Είναι $g(0) = 2 > 0$, άρα $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι $f'(x) = g^2(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως

$$\text{αύξουσα στο } \mathbb{R}. \text{ Είναι } f^2(0) + g^2(0) = 4 \stackrel{g(0)=2}{\Leftrightarrow} f^2(0) + 4 = 4 \Leftrightarrow$$

$$f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0. \text{ Για } x < 0 \text{ είναι}$$

$$f(x) < f(0) = 0 \stackrel{g(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)g(x) < 0 \Leftrightarrow -f(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \text{ και } g \text{ γνησίως αύξουσα στο } (-\infty, 0]. \text{ Για } x > 0 \text{ είναι}$$

$$f(x) > f(0) = 0 \stackrel{g(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)g(x) > 0 \Leftrightarrow -f(x)g(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0 \text{ και } g \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [0, +\infty). \text{ Η } g \text{ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το } g(0) = 2.$$

γ) Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι παραγωγίσιμη με:

$$f''(x) = (g^2(x))' = 2g(x)g'(x). \text{ Για } x < 0 \text{ είναι } g'(x) > 0 \text{ και αφού } g(x) > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$. Για $x > 0$ είναι $g'(x) < 0$, οπότε $f''(x) < 0$ και f κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) \equiv (0, 0)$.

δ) Η εφαπτομένη της C_f στο O είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Όμως $f'(0) = g^2(0) = 4$, άρα $\varepsilon: y = 4x$.

ε) Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Δηλαδή $f(x) \leq 4x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Το ζητούμενο

εμβαδόν είναι: $E = \int_0^1 |f(x) - 4x| dx = \int_0^1 (4x - f(x)) dx \Leftrightarrow$

$$E = \int_0^1 4x dx + \int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)} dx = 2 \left[x^2 \right]_0^1 + \left[\ln g(x) \right]_0^1 = 2 + (\ln g(1) - \ln g(0)) = 2 - \ln 2$$

78. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, \lambda]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, \lambda]$,

$$\text{ισχύει: } E(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx = \int_1^\lambda \left(\frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{1}{3} \int_1^\lambda x^2 dx \Leftrightarrow$$

$$E(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^\lambda = \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{\lambda^3 - 1}{9} = \frac{1}{9} (3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1).$$

β) Η συνάρτηση $E(\lambda)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$E'(\lambda) = \frac{1}{9} \left(9\lambda^2 \ln \lambda + 3\lambda^3 \frac{1}{\lambda} - 3\lambda^2 \right) = \lambda^2 \ln \lambda > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in (1, +\infty), \text{ άρα η}$$

$E(\lambda)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Είναι

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} E(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow 1^+} \frac{1}{9} (3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1) = 0 \text{ και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{9} (3\lambda^3 \ln \lambda - \lambda^3 + 1) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{9} \lambda^3 \left(3 \ln \lambda - 1 + \frac{1}{\lambda^3} \right) \right] = +\infty. \end{aligned}$$

Για το σύνολο τιμών της E ισχύει: $E((1, +\infty)) = \left(\lim_{\lambda \rightarrow 1^+} E(\lambda), \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) \right) = (0, +\infty)$.

Αν $\alpha \leq 0$, τότε η εξίσωση $E(\lambda) = \alpha$ είναι προφανώς αδύνατη.

Αν $\alpha > 0$, τότε επειδή το α ανήκει στο σύνολο τιμών της E και η E είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $E(\lambda) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

$$\gamma) \text{ Αρκεί } x^{x^2} \geq e^{-\frac{1}{2e}} \Leftrightarrow \ln x^{x^2} \geq \ln e^{-\frac{1}{2e}} \Leftrightarrow x^2 \ln x \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2e}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = x(2 \ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Για κάθε } x > e^{-\frac{1}{2}} \text{ είναι } f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right) \text{ και για κάθε } 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(0, e^{-\frac{1}{2}} \right]. \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο το } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}, \text{ άρα}$$

$$f(x) \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow x^2 \ln x \geq -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow x^{x^2} \geq e^{-\frac{1}{2e}} \text{ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο}$$

$$\text{για } x = e^{-\frac{1}{2}}, \text{ είναι και: } \int_1^e x^{x^2} dx > \int_1^e e^{-\frac{1}{2e}} dx.$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)(e^x - 1)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^x \ln x (e^x - 1)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln x \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) = 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$79. \alpha) \text{ Είναι } e^{f(1)} + f(1) = 1 \text{ (1)}. \text{ Έστω } g(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$g'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow g1-1. (1) \Leftrightarrow g(f(1)) = g(0) \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$\beta) \text{ Έστω } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } f(x_1) = f(x_2), \text{ τότε } e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}, \text{ οπότε και}$$

$$e^{f(x_1)} + f(x_1) = e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f1-1.$$

$$\text{Έστω } f(x) = y, \text{ τότε } e^y + y = x, \text{ άρα } f^{-1}(y) = e^y + y, y \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

$$f^{-1}(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\gamma) \text{ Παρατηρούμε ότι } f^{-1}(x) = e^x + x > x, \text{ οπότε λόγω συμμετρίας είναι}$$

$$f(x) < x, \text{ άρα } f^{-1}(x) > x > f(x) \text{ και οι γραφικές παραστάσεις των } f, f^{-1} \text{ δεν}$$

τέμνονται.

$$\delta) \text{ Είναι } (e^{f(x)} + f(x))' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1}, \text{ άρα}$$

$$f'(1) = \frac{1}{e^{f(1)} + 1} = \frac{1}{2}. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x_0 = 1 \text{ έχει εξίσωση}$$

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Είναι $f''(x) = -\frac{(e^{f(x)}+1)'}{(e^{f(x)}+1)^2} = -\frac{e^{f(x)}f'(x)}{(e^{f(x)}+1)^2} < 0 \Rightarrow f \cap \mathbb{R}^{\times}$ οπότε η C_f βρίσκεται

κάτω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$$f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ε) Είναι $\int_4^6 e^{f(x)} dx = \int_4^6 (x - f(x)) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_4^6 - \int_4^6 f(x) dx = 10 - \int_4^6 f(x) dx$

.Επειδή στη σχέση (2) η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, είναι:

$$\int_4^6 f(x) dx < \int_4^6 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x \right]_4^6 = 4 \Leftrightarrow -\int_4^6 f(x) dx > -4 \Leftrightarrow$$

$$10 - \int_4^6 f(x) dx > 6 \Leftrightarrow \int_4^6 e^{f(x)} dx > 6$$

στ) Είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$. Για κάθε $x \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι $E(\Omega) = \int_1^{e+1} f(x) dx$. Θέτουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \text{ και } dx = (f^{-1})'(y) dy.$$

Για $x=1$ είναι $f^{-1}(y) = 1 = f^{-1}(0) \Leftrightarrow y=0$ και για $x=e+1$ είναι

$$f^{-1}(y) = e+1 = f^{-1}(1) \Leftrightarrow y=1. \text{ Τότε}$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 y (f^{-1})'(y) dy = [y f^{-1}(y)]_0^1 - \int_0^1 f^{-1}(y) dy = f^{-1}(1) - \int_0^1 (e^y + y) dy \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = e+1 - \left[e^y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = e+1 - e - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

$$80.a) e^x(f(x)-2)+f'(x)(e^x+1)=0 \Leftrightarrow e^x f(x)-2e^x+f'(x)(e^x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x+1)'f(x)+f'(x)(e^x+1)=2e^x \Leftrightarrow [(e^x+1)f(x)]'=(2e^x)' \Leftrightarrow$$

$$(e^x+1)f(x)=2e^x+c \Leftrightarrow f(x)=\frac{2e^x+c}{e^x+1}.$$

$$\text{Είναι } f(0)=1 \Leftrightarrow \frac{2+c}{2}=1 \Leftrightarrow c=0, \text{ άρα } f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) e^x(2-\alpha)-\alpha=0 \Leftrightarrow 2e^x-\alpha e^x-\alpha=0 \Leftrightarrow 2e^x-\alpha(e^x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$2e^x=\alpha(e^x+1) \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x+1}=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha. \text{ Θα βρούμε το σύνολο τιμών της } f$$

για να διαπιστώσουμε αν υπάρχουν $x \in A$ ώστε $f(x)=\alpha$.

$$\text{Είναι } f'(x)=\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{1}{e^x} + 1} = 2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0. \text{ Είναι } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, 2)$$

.

• Αν $\alpha \in (0, 2)$, τότε υπάρχει μοναδικός $x_0 \in A = \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \alpha$.

• Αν $\alpha \leq 0$ ή $\alpha \geq 2$ η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.

γ) Επειδή $\frac{3}{2} \in f(A)$ υπάρχει μοναδικό $k \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(k) = \frac{3}{2}$. Τότε:

$$f\left(\frac{3e^x+1}{1+e^x}\right) = f(k) \Leftrightarrow \frac{3e^x+1}{1+e^x} = k \Leftrightarrow 3e^x+1 = k+ke^x \Leftrightarrow 3e^x-ke^x = k-1 \Leftrightarrow$$

$$e^x(3-k) = k-1 \quad (3). \text{ Είναι } f(1) = \frac{2e}{1+e} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4e < 3+3e \Leftrightarrow e < 2 \text{ ισχύει, άρα}$$

$$f(1) < f(k) \Leftrightarrow 1 < k. \text{ Επίσης } f(2) = \frac{2e^2}{1+e^2} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 4e^2 > 3+3e^2 \Leftrightarrow e^2 > 3$$

ισχύει, άρα $f(k) < f(2) \Leftrightarrow k < 2$, οπότε $k \in (1, 2)$ και η (3) γίνεται:

$$e^x = \frac{k-1}{3-k} > 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{k-1}{3-k}$$

δ) Είναι $f'(0) = \frac{2e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{2}$. Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει εξίσωση:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1. \text{ Είναι } f''(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}. \text{ Για κάθε}$$

$x \in (0,1)$ είναι $f''(x) > 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0,1]$, επομένως βρίσκεται

κάτω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό. Δηλαδή $f(x) \leq \frac{1}{2}x + 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x + 1 - f(x) \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx + \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + 1 - 2 \int_0^1 \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} dx = \frac{1}{4} + 1 - 2 \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{5}{4} - 2(\ln(1+e) - \ln 2) = \frac{5}{4} - 2 \ln \frac{1+e}{2} \text{ τ.μ..}$$

81.α) Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - 3$, συνεχής στο $[0,9]$ με

$g(0) = f(0) - 3 = -3 < 0$ και $g(9) = f(9) - 3 = 9 - 3 = 6 > 0$ άρα $g(0) \cdot g(9) < 0$ και από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,9)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0, x_0]$ και $[x_0, 9]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (0, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, 9)$ τέτοια ώστε:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0} = \frac{3}{x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_1)} = \frac{x_0}{3} \quad (1) \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(9) - f(x_0)}{9 - x_0} = \frac{9 - 3}{9 - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{9 - x_0}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{f'(x_2)} = \frac{18 - 2x_0}{6} \quad (2).$$

Οπότε προσθέτοντας (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{2}{f'(x_2)} = \frac{x_0}{3} + \frac{18 - 2x_0}{6} = \frac{2x_0 + 18 - 2x_0}{6} = 3.$$

γ) i. Αφού η f είναι κοίλη τότε η $f' \searrow$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[0,3]$ και $[3,9]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (0,3)$ και $\xi_2 \in (3,9)$ τέτοια

$$\text{ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(3) - f(0)}{3} = \frac{f(3)}{3} \text{ και } f'(\xi_2) = \frac{f(9) - f(3)}{9 - 3} = \frac{9 - f(3)}{6}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(3)}{3} > \frac{9-f(3)}{6} \Leftrightarrow 2f(3) > 9-f(3) \Leftrightarrow f(3) > 3.$$

ii. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, x]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}. \text{ Όμως } \xi < x \text{ και } f' \searrow \text{ άρα}$$

$$f'(\xi) > f'(x) \text{ δηλαδή } \frac{f(x)}{x} > f'(x) \xrightarrow{x>0} f(x) > xf'(x) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) > 0.$$

iii. Είναι $f(x) - xf'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 9]$ και επειδή η ισότητα ισχύει

$$\text{μόνο για } x=0, \text{ έχουμε: } \int_0^9 (f(x) - xf'(x)) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^9 f(x) dx - \int_0^9 xf'(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^9 f(x) dx - [xf(x)]_0^9 + \int_0^9 f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^9 f(x) dx - 9f(9) > 0 \Leftrightarrow 2 \int_0^9 f(x) dx > 81 \Leftrightarrow \int_0^9 f(x) dx > \frac{81}{2}.$$

iv. Επειδή $f(x) \geq 0$ και $f(x) \geq xf'(x)$ για κάθε $x \in [0, 9]$, είναι και

$$f^2(x) \geq xf'(x)f(x) \text{ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για } x=0, \text{ έχουμε:}$$

$$\int_0^9 f^2(x) dx > \int_0^9 xf'(x)f(x) dx = \int_0^9 x \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]' dx = \left[x \frac{f^2(x)}{2} \right]_0^9 - \int_0^9 \frac{f^2(x)}{2} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^9 f^2(x) dx + \int_0^9 \frac{f^2(x)}{2} dx > 9 \frac{f^2(9)}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \int_0^9 f^2(x) dx > \frac{729}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^9 f^2(x) dx > 243$$

v. Λόγω του Θ.Μ.Τ. για την f υπάρχει $\xi \in (0, 9)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(9)-f(0)}{9} = 1. \text{ Έστω } g(x) = f(x) - x, x \in [0, 9]. \text{ Είναι}$$

$$g'(x) = f'(x) - 1. \text{ Για κάθε } 0 < x < \xi \Rightarrow f'(x) > f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$g \nearrow [1, \xi]. \text{ Για κάθε } 0 < x \leq \xi \Rightarrow g(x) > g(0) = 0. \text{ Για κάθε}$$

$$\xi < x < 9 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) = 1 \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [\xi, 9]. \text{ Για κάθε}$$

$$\xi < x < 9 \Rightarrow g(x) > g(9) = 0. \text{ Άρα για κάθε } x \in (0, 9) \text{ είναι}$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > x.$$

82.α) $f(x) = (2x-1)e^x \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - 2x + 1 = 0.$

Έστω $g(x) = f(x)e^{-x} - 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$ Είναι $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} - 2$

$$\text{και } g''(x) = f''(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} - f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$g''(x) = e^{-x}(f''(x) - 2f'(x) + f(x)) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = c, c \in \mathbb{R}.$$

$$g'(1) = f'(1)e^{-1} - f(1)e^{-1} - 2 = 0 \Leftrightarrow c = 0 \text{ και } g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } g(1) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^{-x} - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = (2x - 1)e^x$$

$$\beta) xe^x = \frac{1}{2}(a + e^x) \Leftrightarrow 2xe^x - e^x = a \Leftrightarrow f(x) = a(1). \text{ Είναι } f'(x) = (2x + 1)e^x.$$

$$\text{Για κάθε } x < -\frac{1}{2} \text{ είναι } f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \text{ και για κάθε } x > -\frac{1}{2} \text{ είναι}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right). \text{ Η } f \text{ έχει ελάχιστο το } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{e}} = -\frac{2\sqrt{e}}{e}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{Στο διάστημα } A_1 = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \text{ είναι } f(A_1) = \left(-\frac{2\sqrt{e}}{e}, 0\right) \text{ και στο}$$

$$A_2 = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ είναι } f(A_2) = \left(-\frac{2\sqrt{e}}{e}, +\infty\right). \text{ Αν } a < -\frac{2\sqrt{e}}{e} \text{ τότε } a \notin f(A)$$

και η (1) είναι αδύνατη.

$$\text{Αν } a = -\frac{2\sqrt{e}}{e} \text{ τότε η εξίσωση } f(x) = a \text{ έχει μοναδική λύση την } x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Αν } a \in \left(-\frac{2\sqrt{e}}{e}, 0\right) \text{ τότε } a \in f(A_1), a \in f(A_2) \text{ οπότε η (1) έχει μια ρίζα σε}$$

καθένα από τα A_1, A_2 .

Αν $a \geq 0$, τότε $a \in f(A_2)$ και η (1) έχει ακριβώς μια ρίζα.

$$\gamma) g(x) = \frac{f(x)}{2x - 1} = e^x. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ η } y = 0 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη}$$

της C_g στο $-\infty$. Έστω $\lambda < 0$. Είναι $E(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} e^x dx = 1 - e^{\lambda}$ και το ζητούμενο

$$\text{εμβαδό είναι } E(\Omega) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} (1 - e^{\lambda}) = 1$$

$$\delta) y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - e = 3ex - 3e \Leftrightarrow y = 3ex - 2e$$

$$\epsilon) f'(x) = 2e^x + (2x - 1)e^x = (2x + 1)e^x,$$

$$f''(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = (2x + 3)e^x > 0, \text{ άρα } f \text{ κυρτή στο } (0, +\infty), \text{ οπότε}$$

βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός βέβαια

από το σημείο επαφής. Δηλαδή $f(x) \geq 3ex - 2e$.

$$\begin{aligned} \sigma\tau) E(\Omega) &= \int_1^2 (f(x) - 3ex + 2e) dx = \int_1^2 (2x - 1)e^x dx - \left[\frac{3e}{2} x^2 \right]_1^2 + 2e = \\ &= \left[(2x - 1)e^x \right]_1^2 - \int_1^2 2e^x dx - \frac{9e}{2} + 2e = 3e^2 - e - 2e^2 + 2e - \frac{9e}{2} + 2e = e^2 - \frac{3e}{2}. \end{aligned}$$

83.α) Είναι (1) $f(x)f'(x) = f'(x) - x$ για κάθε $x \in (-3, 3)$ και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε: $[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = f''(x) - 1$ (2). Αν η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = x_0 \in (-3, 3)$ τότε αφού η f είναι συνεχής στο $[-3, 3]$ πρέπει $f''(x_0) = 0$. Στην (2) για $x = x_0$ προκύπτει

$$[f'(x_0)]^2 + 0 = 0 - 1 \Leftrightarrow [f'(x_0)]^2 = -1 \text{ (άτοπο)}. \text{ Άρα η } C_f \text{ δεν έχει σημεία καμπής.}$$

$$\begin{aligned} \beta) (1) &\Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2f'(x) - 2x \Leftrightarrow (f^2(x))' = (2f(x) - x^2)' \Leftrightarrow \\ f^2(x) &= 2f(x) - x^2 + c. \text{ Για } x = 0 \text{ είναι } 16 = 8 + c \Leftrightarrow c = 8 \text{ άρα (3)} \\ f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 8 &= 0, \quad x \in (-3, 3) \end{aligned}$$

$$\gamma) \text{ Από (3) } \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) + 1 = 9 - x^2 \Leftrightarrow (f(x) - 1)^2 = 9 - x^2.$$

Έστω $h(x) = f(x) - 1$ τότε $h^2(x) = 9 - x^2 > 0$ για κάθε $x \in (-3, 3)$, άρα $h(x) \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-3, 3)$. Επειδή $h(0) = f(0) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$ τότε $h(x) > 0$. Οπότε από

$$h(x) = \sqrt{9 - x^2} \text{ δηλαδή } f(x) - 1 = \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2}, \quad x \in [-3, 3].$$

Είναι $f(-x) = 1 + \sqrt{9 - (-x)^2} = 1 + \sqrt{9 - x^2} = f(x)$ οπότε η f είναι άρτια.

Επίσης $I = \int_{-a}^0 f(t) dt$. Θέτω $t = -u$ οπότε $dt = -du$. Οπότε

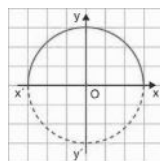
$$I = \int_a^0 f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(u) dx = \int_0^a f(t) dt.$$

ε) Είναι $f(x) - 1 = \sqrt{9 - x^2} \geq 0$ όταν $x \in [-3, 3]$. Άρα

$$E(\Omega) = \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx.$$

Έστω $\sqrt{9 - x^2} = y \Leftrightarrow 9 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό

$$\text{του ημικυκλίου με κέντρο } O(0, 0) \text{ και } \rho = 3. \quad E(\Omega) = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2} \text{ τ.μ.}$$



$$84. \alpha) f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} \Leftrightarrow f(x)(x^2 + 4) - 4x = 0.$$

Έστω $g(x) = f(x)(x^2 + 4) - 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$g'(x) = f'(x)(x^2 + 4) + 2xf(x) - 4 \text{ και}$$

$$g''(x) = f''(x)(x^2 + 4) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = c, c \in \mathbb{R}. \text{ Επειδή η}$$

ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο O , είναι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, οπότε

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0, \text{ άρα } g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Είναι}$$

$$g(0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0, \text{ άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)(x^2 + 4) - 4x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}.$$

$$\beta) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{4(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}. \text{ Η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στα } (-\infty, -2], [2, +\infty) \text{ και } \nearrow [-2, 2]. \text{ Η } f \text{ έχει τοπικό ελάχιστο το } f(-2) = -1 \text{ και}$$

$$\text{τοπικό μέγιστο το } f(2) = 1. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2 + 4} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \text{ Στο } A_1 = (-\infty, -2] \text{ είναι } f(A_1) = [-1, 0), \text{ στο } A_2 = [-2, 2]$$

$$\text{είναι } f(A_2) = [-1, 1] \text{ και στο } A_3 = [2, +\infty) \text{ είναι } f(A_3) = [-1, 0). \text{ Είναι}$$

$$f(A) = [-1, 1]$$

γ) Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες και αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ τότε η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

$$\delta) \text{ i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \eta \mu x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x}{x^2 + 1} \frac{\eta \mu x}{2x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2 + 1} \cdot \eta \mu x \right].$$

$$\text{Είναι } \left| \frac{2}{x^2 + 1} \eta \mu x \right| \leq \frac{2}{x^2 + 1} \text{ και από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) \eta \mu x}{2x} = 0.$$

$$\text{ii. } \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{4t}{t^2 + 4} dt = 2 \left[\ln |t^2 + 4| \right]_0^{\frac{1}{x}} = 2 \left[\ln \left(\frac{1}{x^2} + 4 \right) - \ln 4 \right] = 2 \ln \frac{4x^2 + 1}{4x^2}.$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[4x^2 \ln \frac{4x^2 + 1}{4x^2} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{4x^2} \right)}{\frac{1}{4x^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} \stackrel{0}{=} 1.$$

ε) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ $-1 \leq f(t) \leq 1$ άρα $\int_x^y -1 dt \leq \int_x^y \frac{4t}{t^2+4} dt \leq \int_x^y 1 dt \Leftrightarrow$

$$-(y-x) \leq 2 \left[\ln(t^2+4) \right]_x^y \leq y-x \Leftrightarrow$$

$$-\left(\frac{y-x}{2}\right) \leq \ln \frac{y^2+4}{x^2+4} \leq \frac{y-x}{2} \Leftrightarrow \left| \ln \frac{y^2+4}{x^2+4} \right| \leq \frac{y-x}{2}.$$

στ) είναι $-1 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(-2) = -1$ άρα η εξίσωση $f(x) = -1$ έχει μοναδική λύση $x = -2$.

ζ) Είναι $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $f(x_1)+1 \geq 0$, $f(x_2)+1 \geq 0$ και είναι $f(x) = -1$

μόνο για $x = -2$. Άρα $[f(x_1)+1] + [f(x_2)+1] = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -2$.

η) Είναι $f(-2) = -1 \neq 1 = f(2)$ και f συνεχής στο $[-2, 2]$.

Αφού για παράδειγμα $-1 < \frac{\sqrt{12}}{5} < 1$, $-1 < \frac{\sqrt{13}}{5} < 1$ τότε από ΘΕΤ υπάρχουν

$$\alpha, \beta \in (-2, 2) \text{ τέτοια ώστε } f(\alpha) = \frac{\sqrt{12}}{5} \text{ και } f(\beta) = \frac{\sqrt{13}}{5}. \text{ Τότε}$$

$$f^2(\alpha) + f^2(\beta) = \frac{12}{25} + \frac{13}{25} = 1.$$

$$85. \alpha) \text{ i. } f'(x) = 2f^2(x) - 6f(x) + 9 \Leftrightarrow f'(x) = f^2(x) + f^2(x) - 6f(x) + 9 \Leftrightarrow$$

$(1) \Rightarrow f'(x) = f^2(x) + (f(x)-3)^2 > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ οπότε η f είναι $\nearrow$ στο $[\alpha, \beta]$.

ii. Αφού $\alpha < \beta \stackrel{f, \nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < 3f(\alpha) \Leftrightarrow 2f(\alpha) > 0 \Leftrightarrow f(\alpha) > 0$ και για $x \geq \alpha$ θα είναι $f(x) \geq f(\alpha) > 0$ άρα $f(x) > 0$.

iii. Από την (1) προκύπτει ότι $f'(x) > f^2(x)$ και αφού $f(x) > 0$ τότε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} - f(x) > 0 \text{ οπότε και}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - f(x) \right) dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\ln f(x) \right]_{\alpha}^{\beta} > \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln 3.$$

β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη τότε από την (1) θα είναι και η f'

παραγωγίσιμη με $f''(x) = 2f(x)f'(x) + 2[f(x) - 3]f'(x) = 2f'(x)[2f(x) - 3]$.

Αν $f(\alpha) > 2$ τότε $f(x) \geq f(\alpha) > 2 \Leftrightarrow 2f(x) > 4 \Leftrightarrow 2f(x) - 3 > 1 > 0$ οπότε η $f''(x) = 2f'(x)[2f(x) - 3] > 0$ αφού και $f'(x) > 0$, συνεπώς η f κυρτή.

γ) Έστω ότι υπάρχουν 3 σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τα οποία είναι συνευθειακά. Τότε $AB // B\Gamma$ δηλαδή

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \quad (2). \text{ Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την } f \text{ στα}$$

διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$. Τότε υπάρχουν $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ και $\xi_2 \in (x_2, x_3)$

τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ και $f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$. Από (2) θα

είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (άτοπο) αφού $\xi_1 < \xi_2$ και η $f' \nearrow$.

86.α) Είναι $f'(x)f(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2x$ ή

$$(f^2(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = x^2 + c. \text{ Για } x = 0 \text{ προκύπτει } c = 1 \text{ άρα}$$

$$f^2(x) = x^2 + 1 \neq 0. \text{ Άρα } f(x) \neq 0 \text{ και αφού η } f$$

συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο και αφού $f(0) = 1 > 0$ τότε $f(x) > 0$ άρα

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

$$\beta) \text{ i. Είναι } \left| \frac{\eta\mu x}{f(x)} \right| = \left| \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = 0.$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} \right].$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (\sqrt{x^2 + 1} + 1) \right] = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (\sqrt{x^2 + 1} + 1) \right] = +\infty. \text{ Οπότε δεν υπάρχει το}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f(x) - 1}.$$

$$\gamma) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \text{ Η } f \text{ είναι } \nearrow \text{ στο } (-\infty, 0] \text{ και } \nearrow \text{ στο}$$

$[0, +\infty)$. Έχει ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=1$.

$$\delta) \text{ i. } I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1} \right)' dx = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2}-1$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^2 \left(\sqrt{x^2+1} \right)' dx =$$

$$\left[x^2 \sqrt{x^2+1} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 (x^2+1)' \sqrt{x^2+1} dx =$$

$$\sqrt{2} - \left[\frac{(x^2+1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3} \left[\left(\sqrt{x^2+1} \right)^3 \right]_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{ii. Είναί } I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{f(x)} dx = \int_0^1 x^{2v} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{2v} \left(\sqrt{x^2+1} \right)' dx =$$

$$= \left[x^{2v} \sqrt{x^2+1} \right]_0^1 - \int_0^1 2vx^{2v-1} \sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{2} - 2v \int_0^1 x^{2v-1} f(x) dx.$$

$$\text{iii. Για } v=2 \quad I_2 = \sqrt{2} - 4 \int_0^1 x^3 \sqrt{x^2+1} dx. \text{ Θέτω } x^2+1=u \Leftrightarrow x^2=u-1 \text{ και}$$

$$2x dx = du. \text{ Άρα } I_2 = \sqrt{2} - 2 \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx = \sqrt{2} - 2 \int_1^2 (u-1) \sqrt{u} du =$$

$$\sqrt{2} - 2 \int_1^2 u^{3/2} du + 2 \int_1^2 u^{1/2} du = \sqrt{2} - 2 \left[\frac{4^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 + 2 \left[\frac{4^{1/2}}{\frac{1}{2}} \right]_1^2 = \sqrt{2} - \frac{4}{5} \left[\sqrt{4^5} \right]_1^2 + \frac{4}{3} \left[\sqrt{4^3} \right]_1^2 =$$

$$\sqrt{2} - \frac{4}{5} (4\sqrt{2}-1) + \frac{4}{3} (2\sqrt{2}-1) = \frac{7\sqrt{2}-8}{15}.$$

$$87. \alpha) \int_0^x (t^2+1) f''(t) dt + 2 \int_0^x t f'(t) dt + \int_0^2 x t f(x) dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x (t^2+1) f''(t) dt + 2 \int_0^x t f'(t) dt + x f(x) \int_0^2 t dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \left[(t^2+1) f''(t) + 2t f'(t) \right] dt + x f(x) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x \left[(t^2+1) f'(t) \right]' dt + 2x f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(t^2+1) f'(t) \right]_0^x + 2x f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2+1) f'(x) - 2 + 2x f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[(x^2+1) f(x) - 2x \right]' = 2 \Leftrightarrow$$

$$(x^2+1) f(x) = 2x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=0 \text{ είναι } f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0 \text{ και}$$

$$(x^2 + 1)f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta) \text{ Είναι } |h(x) + x - 3| \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq h(x) + x - 3 \leq |f(x)|.$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-|f(x)|), \text{ οπότε από το κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής προκύπτει ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) + x - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - (-x + 3)) = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = -x + 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

$$\gamma) \text{ Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: } E = \int_0^3 |h(x) - (-x + 3)| dx.$$

$$\text{Είναι } |h(x) + x - 3| \leq |f(x)|, \text{ άρα και } \int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \leq \int_0^3 |f(x)| dx.$$

$$\text{Όμως } f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 3], \text{ άρα}$$

$$\int_0^3 |h(x) + x - 3| dx \leq \int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \left[\ln(x^2 + 1) \right]_0^3 = \ln 10.$$

$$88. \alpha) \text{ Έστω } g(x) = e^{-x}f(x) - x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } g'(x) = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) - 1 = e^{-x}(f'(x) - f(x) - e^x) > 0 \text{ άρα η } g \nearrow$$

οπότε για $x > 0$ είναι

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow e^{-x}f(x) - x > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) > x \Leftrightarrow f(x) > xe^x \quad (1).$$

$\beta)$ Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - 2e^{x-1}$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με

$$h'(x) = f'(x) - 2e^{x-1} > f(x) + e^x - 2e^{x-1} > xe^x + e^x - 2e^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$h'(x) > e^x \left(\begin{matrix} x + 1 - \frac{2}{e} \\ \geq 0 \\ > 0 \end{matrix} \right) > 0 \text{ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, 1].$$

$$\text{Είναι } h(0) = f(0) - 2e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0 \text{ και } h(1) = f(1) - 2 > 0$$

$$\text{γιατί αν στην (1) θέσουμε όπου } x = 1 \text{ είναι } f(1) > e > 2 \Leftrightarrow f(1) - 2 > 0.$$

Οπότε $h(0) \cdot h(1) < 0$ Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα από Θ. Bolzano υπάρχει λύση της εξίσωσης $h(x) = 0$ στο $(0, 1)$, η οποία αφού η h είναι γνησίως αύξουσα, είναι μοναδική.

γ) Εφαρμόζουμε ΘΜΤ για την f στο $[0,1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(1) . \text{ Από την (1) για } x = 1 \text{ είναι}$$

$$f(1) > e . \text{ Άρα } f'(\xi) > e .$$

δ) Αφού $f(x) > xe^x$ τότε για $x > 0$ είναι $f(x) > xe^x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ οπότε

$$E(\lambda) = \int_0^\lambda f(x) dx . \text{ Από τη σχέση } f(x) > xe^x \text{ προκύπτει ότι}$$

$$\int_0^\lambda f(x) dx > \int_0^\lambda xe^x dx \Leftrightarrow E(\lambda) > \left[xe^x \right]_0^\lambda - \int_0^\lambda e^x dx \Leftrightarrow E(\lambda) > \lambda e^\lambda - e^\lambda + 1 \text{ και}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda e^\lambda - e^\lambda + 1) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} [(\lambda - 1)e^\lambda + 1] = +\infty \text{ άρα και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = +\infty .$$

ε) Είναι $f(x) > xe^x$ για κάθε $x > 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\text{Είναι } f'(x) - f(x) > e^x \Leftrightarrow f'(x) > f(x) + e^x , \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + e^x) = +\infty , \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty .$$

στ) Είναι $f'(x) > f(x) + e^x$ και επειδή $f(x) \geq xe^x \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$, είναι

$$f'(x)f(x) \geq f^2(x) + e^x f(x) \text{ (2). Για κάθε } x \geq 0 \text{ είναι}$$

$$f(x) \geq xe^x \Leftrightarrow e^x f(x) \geq xe^{2x} , \text{ οπότε η (2) γίνεται:}$$

$$f'(x)f(x) \geq f^2(x) + e^x f(x) \geq f^2(x) + xe^{2x} \Leftrightarrow f^2(x) \leq f'(x)f(x) - xe^{2x} \text{ και}$$

επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, ισχύει ότι:

$$\int_0^1 f^2(x) dx < \int_0^1 [f(x)f'(x) - xe^{2x}] dx = \left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx < \frac{f^2(1)}{2} - \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{f^2(1)}{2} - \frac{e^2}{2} + \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx < \frac{f^2(1)}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{1}{4} (2f^2(1) - e^2 - 1)$$

89. α) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x)(x^2 - 1) - 2x = 0$. Έστω

$$g(x) = f(x)(x^2 - 1) - 2x, x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} . \text{ Είναι}$$

$$g'(x) = f'(x)(x^2 - 1) + 2xf(x) - 2 \quad (1),$$

$$g''(x) = f''(x)(x^2 - 1) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow g'(x) = \begin{cases} c_1, & x < -1 \\ c_2, & -1 < x < 1 \\ c_3, & x > 1 \end{cases} .$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = f'(0)x + f(0) . \text{ Επειδή όμως είναι η } \varepsilon_1, \text{ ισχύει ότι}$$

$$f'(0) = -2 \text{ και } f(0) = 0 . \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x=2 \text{ έχει εξίσωση}$$

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = f'(2)x + f(2) - 2f'(2) .$$

$$\text{Επειδή όμως είναι η } \varepsilon_2, \text{ ισχύει ότι } f'(2) = -\frac{10}{9} \text{ και}$$

$$f(2) - 2f'(2) = \frac{32}{9} \Leftrightarrow f(2) + 2\frac{10}{9} = \frac{32}{9} \Leftrightarrow f(2) = \frac{4}{3} .$$

Για κάθε $x \neq \pm 1$ είναι $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$, οπότε

$$f(-2) = -f(2) = -\frac{4}{3} \text{ και } f'(-2) = f'(2) = -\frac{10}{9} .$$

Από τη σχέση (1) για $x = -2, 0, 2$ προκύπτει ότι $g'(-2) = g'(0) = g'(2) = 0$

$$\text{οπότε } c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ και } g'(x) = 0 \text{ για } x \neq -1, 1 \text{ άρα } g(x) = \begin{cases} c_4, & x < -1 \\ c_5, & -1 < x < 1 \\ c_6, & x > 1 \end{cases}$$

Για τις τιμές των $f(-2), f(0), f(2)$ που βρήκαμε προκύπτει ότι

$$g(-2) = g(0) = g(2) = 0 \text{ οπότε } c_4 = c_5 = c_6 = 0 \text{ και}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(x^2 - 1) - 2x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1 .$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0 .$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ και δεν έχει ακρότατα.

$$\gamma) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x}{x-1} \right] = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x+1} \cdot \frac{2x}{x-1} \right) = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ οπότε } f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R} .$$

δ) Αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ τότε η $y=0$ είναι οριζόντια

ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$ οπότε δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες .

Από το προηγούμενο ερώτημα η $x = 1$ και $x = -1$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ε) Η f είναι συνεχής και $f(x) > 0$ στο $[e, e^2]$ οπότε

$$E(\Omega) = \int_e^{e^2} f(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \left[\ln |x^2 - 1| \right]_e^{e^2} = \ln(e^4 - 1) - \ln(e^2 - 1) \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \ln \frac{e^4 - 1}{e^2 - 1} = \ln \frac{\cancel{(e^2 - 1)}(e^2 + 1)}{\cancel{e^2 - 1}} \Leftrightarrow E(\Omega) = \ln(e^2 + 1) \text{ τ.μ..}$$

στ) Έστω $\varphi(x) = f(x) \sin 2x$, $x \in (-1, 1)$. Είναι

$$\varphi(-x) = f(-x) \sin(-2x) = \frac{2(-x)}{(-x)^2 - 1} \cdot \sin 2x = -\frac{2x}{x^2 - 1} \sin 2x =$$

$$-f(x) \sin 2x = -\varphi(x). \text{ Άρα η } \varphi \text{ είναι περιττή οπότε}$$

$$\int_{-p}^p \varphi(x) dx = \int_{-p}^0 \varphi(x) dx + \int_0^p \varphi(x) dx = I_1 + I_2, \text{ όμως}$$

$$I_1 = \int_{-p}^0 \varphi(x) dx \stackrel{\substack{x=-u, \\ dx=-du \\ x=-p \Rightarrow u=p, \\ x=0 \Rightarrow u=0}}{=} \int_p^0 \varphi(-u)(-du) = \int_0^p \varphi(-u) du = -\int_0^p \varphi(u) du = -I_2.$$

$$\text{Άρα } \int_{-p}^p \varphi(x) dx = -I_2 + I_2 = 0.$$

$$\zeta) \int_3^\lambda \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} dx = 8 + \int_\lambda^3 f(x) dx \Leftrightarrow \int_3^\lambda \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} dx + \int_3^\lambda f(x) dx = 8 \Leftrightarrow$$

$$\int_3^\lambda \left(\frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1} + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) dx = 8 \Leftrightarrow \int_3^\lambda \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} dx = 8 \Leftrightarrow \int_3^\lambda \frac{x \cancel{(x^2 - 1)}}{\cancel{x^2 - 1}} dx = 8 \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_3^\lambda = 8 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2 - 9}{2} = 8 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 16 \Leftrightarrow \lambda^2 = 25 \stackrel{\lambda > 1}{\Leftrightarrow} \lambda = 5$$

$$90. \alpha) [f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = \frac{1}{2}e^x \Leftrightarrow [f'(x)f(x)]' = \left(\frac{e^x}{2} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'(x)f(x) = \frac{e^x}{2} + c_1, \text{ για } x=0 \text{ τότε } c_1 = -\frac{1}{2}, \text{ οπότε } f'(x)f(x) = \frac{e^x - 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2f'(x)f(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow (f^2(x))' = (e^x - x)' \Leftrightarrow f^2(x) = e^x - x + c_2.$$

Για $x=0$ προκύπτει $c_2 = 0$. Άρα $f^2(x) = e^x - x$.

β) Έστω $h(x) = e^x - x$ είναι $h'(x) = e^x - 1$. Για κάθε $x < 0$ είναι $h'(x) < 0$

και για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > 0$. Επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η h έχει ελάχιστο το $h(0)$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h(x) \geq h(0) = 1$, άρα $h(x) > 0$. Οπότε $f^2(x) = e^x - x \neq 0$ και αφού η f είναι συνεχής τότε η f θα διατηρεί πρόσημο. Είναι $f(0) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$, οπότε $f(x) = \sqrt{e^x - x}$.

γ) Είναι $I = \int_{\ln 3}^2 \frac{f(x)f''(x)}{e^x - 1} dx$, $x > 0$ όμως $f(x)f''(x) = \frac{1}{2}e^x - [f'(x)]^2$ όπου

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - x}}. \text{ Άρα } I = \int_{\ln 3}^2 \frac{\frac{1}{2}e^x - [f'(x)]^2}{e^x - 1} dx = \int_{\ln 3}^2 \frac{\frac{1}{2}e^x - \frac{(e^x - 1)^2}{4(e^x - x)}}{e^x - 1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_{\ln 3}^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx - \frac{1}{4} \int_{\ln 3}^2 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx = \frac{1}{2} [\ln|e^x - 1|]_{\ln 3}^2 - \frac{1}{4} [\ln|e^x - x|]_{\ln 3}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(e^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln(e^2 - 2) + \frac{1}{4} \ln(3 - \ln 3).$$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) \right] = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = 0 + \infty = +\infty$$

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{x^2 + 1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x)}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{x^2 + 1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{2x} = 0$.

$$\epsilon) e^x + \sqrt{e^x - x} = x + 2 \Leftrightarrow f^2(x) + f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x) + 2}{\neq 0} \right) (f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 \Leftrightarrow h(x) = h(0) \Leftrightarrow x = 0$$

91. α) Είναι $f(g(x)) \geq g(x) \Leftrightarrow f(g(x)) - g(x) \geq 0$ (1)

Έστω $h(x) = f(g(x)) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$h(3) = f(g(3)) - g(3) = f(0) = 0$, οπότε η (1) γίνεται: $h(x) \geq h(3)$. Δηλαδή η συνάρτηση h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 3$.

Επειδή το $x_0 = 3$ είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της h και η h είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f'(g(x))g'(x) - g'(x)$, λόγω του θεωρήματος

Fermat είναι: $h'(3) = 0 \Leftrightarrow f'(g(3))g'(3) - g'(3) = 0 \Leftrightarrow g'(3)[f'(0) - 1] = 0$

(2). Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$ τα $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι ομόσημοι, άρα $g'(3) \neq 0$ και η (2) γίνεται: $f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Για κάθε $x \in (1, 2)$ είναι $\frac{f(1821)}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2) + x-1 = 0$.

Έστω $g(x) = f(1821)(x-2) + x-1$, $x \in [1, 2]$. Είναι

$g(1) = f(1821)(1-2) + 1-1 = -f(1821)$ και

$g(2) = f(1821)(2-2) + 2-1 = 1 > 0$. Επειδή $f'(x)g'(x) > 0$, είναι $f'(x) \neq 0$

και επειδή η f' είναι συνεχής, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f'(0) = 1 > 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $\mathbb{R}$. Επειδή $1821 > 0$, είναι $f(1821) > f(0) = 0$, άρα $g(1) < 0$ και

$g(1)g(2) < 0$. Επειδή η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, λόγω του θεωρήματος

Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(1821)(x-2) + x-1 = 0$, έχει τουλάχιστον

μία ρίζα στο $(1, 2)$, οπότε και η εξίσωση $\frac{f(1821)}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

γ) Για κάθε $x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) = 0$. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται

από τη γραφική παράσταση της f , τους άξονες και την ευθεία $x = 1$ είναι

$E = \int_0^1 f(x) dx$, άρα $\int_0^1 f(x) dx = 1821$. Έστω F αρχική της f στο $[0, 1]$. Επειδή

η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $F'(x) = f(x)$,

οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} \Leftrightarrow f(\xi) = \int_0^1 f(t) dt \Leftrightarrow f(\xi) = 1821.$$

Είναι $0 < \xi < 1$ και f γνησίως αύξουσα, άρα $f(\xi) < f(1) \Leftrightarrow 1821 < f(1)$.

δ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, για κάθε $x > 0$ είναι

$f(x) > f(0) = 0$ ενώ για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < f(0) = 0$. Επειδή

$f'(x)g'(x) > 0$ και $f'(x) > 0$, είναι και $g'(x) > 0$, άρα g γνησίως αύξουσα

στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x > 3$ είναι $g(x) > g(3) = 0$, ενώ για κάθε $x < 3$ είναι

$g(x) < g(3) = 0$.

ε) Έστω $\int_0^3 2xg(x)dx = \lambda \in \mathbb{R}$ (3), τότε από τη σχέση

$\int_0^3 2xg(x)dx + x + 6 = g(x)$, έχουμε: $\lambda + x + 6 = g(x)$. Η σχέση (3) γίνεται:

$$\int_0^3 2x(\lambda + x + 6)dx = \lambda \Leftrightarrow \int_0^3 (2\lambda x + 2x^2 + 12x)dx = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\left[\lambda x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^3 = \lambda \Leftrightarrow 9\lambda + 18 + 54 = \lambda \Leftrightarrow 8\lambda = -72 \Leftrightarrow \lambda = -9. \text{ Τότε}$$

$$g(x) = -9 + x + 6 = x - 3.$$

92. α) Έστω $I = \int_0^2 f^2(x)dx + \int_0^2 (f'(x))^2 dx = f^2(0) - f^2(2)$ (1), τότε

$$I = \int_0^2 f^2(x)dx + \int_0^2 (f'(x))^2 dx + \int_0^2 2f(x)f'(x)dx - \int_0^2 2f(x)f'(x)dx =$$

$$= \int_0^2 [f^2(x) + (f'(x))^2 + 2f(x)f'(x)]dx - \int_0^2 [f^2(x)]' dx =$$

$$= \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx - [f^2(x)]_0^2 =$$

$$\int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx - (f^2(2) - f^2(0)) \Leftrightarrow$$

$$I = \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx + I \Leftrightarrow \int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx = 0.$$

Είναι $(f(x) + f'(x))^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$ αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο

ώστε $f(x_0) + f'(x_0) \neq 0$ τότε $\int_0^2 (f(x) + f'(x))^2 dx > 0$ άτοπο.

Άρα $f(x) + f'(x) = 0$ (2) για κάθε $x \in [0, 2]$.

β) Είναι $\int_0^2 (f'(x))^2 dx = \int_0^2 f'(x) \cdot f'(x) dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^2 f'(x)(-f(x))dx =$

$$= -\int_0^2 f'(x)f(x)dx = -\left[\frac{f^2(x)}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2}(f^2(0) - f^2(2)) \quad (3).$$

Άρα η σχέση (1) με βάση την (3) γίνεται

$$\int_0^2 f^2(x)dx + \frac{1}{2}(f^2(0) - f^2(2)) = f^2(0) - f^2(2) \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(x)dx = \frac{1}{2}(f^2(0) - f^2(2)) \quad (4).$$

Από (3) και (4) προκύπτει ότι $\int_0^2 f^2(x)dx = \int_0^2 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{2}(f^2(0) - f^2(2))$

γ) Είναι $f(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(e^x f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = c.$$

Για $x = 1$ προκύπτει $c = e^2$, άρα $e^x f(x) = e^2 \Leftrightarrow f(x) = e^{2-x}$, $x \in [0, 2]$.

93. α) Είναι $f(\alpha) + f(\beta) = 2f(\gamma) \Leftrightarrow \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = f(\gamma)$. Έστω ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

1^{ος} τρόπος:

- Αν $f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} < f(\beta)$ τότε από το Θεώρημα

Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \Leftrightarrow f(\xi) = f(\gamma) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} \xi = \gamma \text{ άτοπο γιατί } \alpha < \xi < \beta < \gamma.$$

- Ομοίως αν $f(\alpha) > f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) > \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} > f(\beta)$.

- Αν $f(\alpha) = f(\beta) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} \alpha = \beta$ άτοπο.

2^{ος} τρόπος: Από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής, η f έχει μία μέγιστη τιμή M και μία ελάχιστη τιμή m στο $[\alpha, \beta]$. Από το Θεώρημα

Ενδιαμέσων Τιμών είναι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε

$x \in [\alpha, \beta]$. Άρα $m \leq f(\alpha) \leq M$ (1) και $m \leq f(\beta) \leq M$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει

$$2m \leq f(\alpha) + f(\beta) \leq 2M \Leftrightarrow m \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \leq M. \text{ Άρα υπάρχει } \xi \in [\alpha, \beta] \text{ τέτοιο}$$

$$\text{ώστε } f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \Leftrightarrow f(\xi) = f(\gamma) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} \xi = \gamma \text{ άτοπο γιατί } \alpha \leq \xi \leq \beta < \gamma.$$

β) Αφού f όχι 1-1 τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια ώστε

$f(x_1) = f(x_2)$. Από το Θεώρημα Rolle στο $[x_1, x_2]$ υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Επειδή η f είναι κοίλη τότε η $f' \searrow \mathbb{R}$ άρα το $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι μοναδικό.

$$\gamma) \text{ Για } x < x_0 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \text{ άρα η } f \nearrow (-\infty, x_0].$$

$$\text{Για } x > x_0 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \text{ άρα η } f \searrow [x_0, +\infty).$$

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το $f(x_0)$.

δ) Έστω $\kappa < x_0$ πάρα πολύ κοντά στο $-\infty$, τότε $\kappa < x_0 \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(\kappa) > f'(x_0) = 0$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x = \kappa$ είναι η ευθεία:

$$y = f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa).$$

Επειδή η f είναι κοίλη τότε $f(x) \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa)$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(\kappa)x - \kappa f'(\kappa) + f(\kappa)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f'(\kappa)x] = -\infty \text{ αφού } f'(\kappa) > 0.$$

$$\text{Άρα είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

ε) i) 1^{ος} τρόπος: Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο:

$$g'(x) = e^{-2024f(x)} f'(x). \text{ Για } x < x_0 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$e^{-2024f(x)} f'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (-\infty, x_0]. \text{ Για}$$

$$x > x_0 \overset{f' \searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{-2024f(x)} f'(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow [x_0, +\infty)$$

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το $g(x_0)$.

Άρα $g(x) \leq g(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0$.

$$\text{Άρα } \int_0^{x_0+1} g(x) dx < \int_0^{x_0+1} g(x_0) dx = x_0 g(x_0) + g(x_0)$$

2^{ος} τρόπος: Είναι $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0$.

$$f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow -2024f(x) \geq -2024f(x_0) \Leftrightarrow e^{-2024f(x)} \geq e^{-2024f(x_0)} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{e^{-2024f(x)}}{2024} \leq -\frac{e^{-2024f(x_0)}}{2024} \Leftrightarrow g(x) \leq g(x_0)$$

$$\text{Άρα } \int_0^{x_0+1} g(x) dx < \int_0^{x_0+1} g(x_0) dx = x_0 g(x_0) + g(x_0)$$

$$\text{ii) } \int_0^{x_0+1} xg'(x) dx > 0 \Leftrightarrow [xg(x)]_0^{x_0+1} - \int_0^{x_0+1} g(x) dx > 0 \Leftrightarrow$$

$x_0 g(x_0) + g(x_0) - \int_0^{x_0+1} g(x) dx > 0$ το οποίο ισχύει σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

$$\mathbf{94. \alpha)} f^2(x) = \ln^4 x + 2 \ln^2 x + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = (\ln^2 x + 1)^2. \text{ Επειδή } (\ln^2 x + 1)^2 > 0$$

για κάθε $x > 0$, είναι $f^2(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Επειδή $f(1) = 1 > 0$ είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα $f(x) = \ln^2 x + 1, x > 0$.

$$\beta) g'(x) = \frac{g(x)}{x} + 2 \Leftrightarrow xg'(x) = g(x) + 2x \Leftrightarrow xg'(x) - g(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{xg'(x) - g(x)}{x^2} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{x} \right)' = (2 \ln x)' \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x} = 2 \ln x + c \Leftrightarrow$$

$g(x) = 2x \ln x + cx, x > 0, c \in \mathbb{R} \quad g(1) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ άρα $g(x) = 2x \ln x$.

$$\gamma) \kappa^\kappa \cdot \lambda^\lambda \geq e^{-\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \ln(\kappa^\kappa \cdot \lambda^\lambda) \geq \ln e^{-\frac{2}{e}} \Leftrightarrow \ln \kappa^\kappa + \ln \lambda^\lambda \geq -\frac{2}{e} \Leftrightarrow$$

$$\kappa \ln \kappa + \lambda \ln \lambda \geq -\frac{2}{e} \Leftrightarrow 2\kappa \ln \kappa + 2\lambda \ln \lambda \geq -\frac{4}{e} \Leftrightarrow g(\kappa) + g(\lambda) \geq -\frac{4}{e}.$$

$$\text{Είναι } g'(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2(\ln x + 1).$$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\ln x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}.$$

Για κάθε $x \in (0, e^{-1})$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (0, e^{-1}]$ και για κάθε $x > e^{-1}$ είναι

$$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [e^{-1}, +\infty). \text{ Η } g \text{ έχει ελάχιστο το } g(e^{-1}) = 2e^{-1} \ln e^{-1} = -\frac{2}{e},$$

$$\text{οπότε } g(x) \geq -\frac{2}{e} \text{ για κάθε } x > 0.$$

$$\text{Είναι } g(\kappa) \geq -\frac{2}{e}, g(\lambda) \geq -\frac{2}{e} \text{ και με πρόσθεση κατά μέλη } g(\kappa) + g(\lambda) \geq -\frac{4}{e}.$$

$$\delta) f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln^2 x + 1 = 2x \ln x \Leftrightarrow \ln^2 x - 2x \ln x + 1 = 0$$

Έστω $h(x) = \ln^2 x - 2x \ln x + 1, x \in (0, +\infty)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$h'(x) = 2 \ln x (\ln x)' - \left(2 \ln x + 2x \frac{1}{x} \right) + 1 = 2 \frac{\ln x}{x} - 2 \ln x - 1 = 2 \frac{\ln x}{x} - 2 \ln x - 1$$

$$\text{και } h''(x) = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} - \frac{2}{x} = 2 \frac{1 - \ln x - x}{x^2}.$$

Παρατηρούμε ότι το πρόσημο της f'' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $1 - \ln x - x$. Έστω $\varphi(x) = 1 - \ln x - x, x \in (0, +\infty)$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο

$$(0, +\infty) \text{ με: } \varphi'(x) = -\frac{1}{x} - 1. \text{ Είναι } \varphi'(x) < 0 \text{ άρα η } \varphi \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο}$$

$(0, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $\varphi(1) = 0$. Για κάθε $x > 1$ είναι $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$, άρα $h''(x) < 0$ και η h' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$h'(x) < h'(1) = -1 < 0, \text{ οπότε η } h \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο } [1, +\infty).$$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$, άρα $h''(x) > 0$ και η h' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$. Άρα $h'(x) < h'(1) = -1 < 0$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$. Επειδή η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, είναι γνησίως

φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x - 2x \ln x + 1) = +\infty$,

γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$.

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \right] = -\infty$, γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ και}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. Για το σύνολο τιμών της h έχουμε:

$$h((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Επειδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) = 0$.

ε) $x \ln x \geq x - 1 \Leftrightarrow 2x \ln x \geq 2x - 2 \Leftrightarrow (x) \geq 2x - 2$. Είναι $g'(x) = 2 \ln x + 2$ και $g'(1) = 2$. Η εφαπτομένη της C_g στο $x = 1$ είναι η ευθεία

$$y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2.$$

Είναι $g''(x) = \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow g \cup (0, +\infty)$. Επειδή η g είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από

κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $g(x) \geq 2x - 2$.

στ) Έστω $t(x) = 2x^2 \ln x - 3x^2 + 4x - 1$, $x > 0$. Η t είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $t'(x) = 4x \ln x + 2x - 6x + 4 = 4x \ln x - 4x + 4 = 4(x \ln x - x + 1)$

Για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι $t'(x) > 0$ και επειδή η t είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x^2}{2} \right) = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} t(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^2 \ln x - 3x^2 + 4x - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(2 \ln x - 3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \right] = +\infty.$$

Για το σύνολο τιμών της t έχουμε: $t(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} t(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) \right) = (-1, +\infty)$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της t και η t είναι συνεχής και γνησίως

αύξουσα στο $(0, +\infty)$, η εξίσωση $t(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

$$\zeta) \text{ i. } I_v = \int_1^e (f(x) - 1)^{\frac{v}{2}} dx = \int_1^e (\ln^2 x + 1 - 1)^{\frac{v}{2}} dx = \int_1^e \ln^v x dx = \int_1^e \ln^v x \cdot (x)' dx = \\ \left[x \ln^v x \right]_1^e - \int_1^e x' \cdot v \ln^{v-1} x \cdot \frac{1}{x} dx = e - v \int_1^e \ln^{v-1} x dx = e - v I_{v-1}$$

$$\text{ii. Για } v=3 \text{ είναι: } I_3 = e - 3I_2$$

$$\text{Για } v=2 \text{ είναι: } I_2 = e - 3I_1 = e - 3 \text{ και}$$

$$I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e - 3) = e - 3e + 9 = -2e + 9.$$

$$(I_1 = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e x' \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1.)$$

$$\eta) \text{ Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το } E = \int_1^e |f(x) - g(x)| dx = \int_1^e |h(x)| dx.$$

Για κάθε $e \leq x \leq e^2 \Leftrightarrow h(e) \geq h(x) \geq h(e^2) \Leftrightarrow 2 - 2e \geq h(x) \geq 5 - 4e^2$ άρα $h(x) < 0$, οπότε:

$$E = - \int_e^{e^2} h(x) dx = - \int_e^{e^2} (\ln^2 x - 2x \ln x + 1) dx = - \int_e^{e^2} \ln^2 x dx + \int_e^{e^2} 2x \ln x dx - [x]_e^{e^2} = \\ = - \int_e^{e^2} (x)' \ln^2 x dx + \int_e^{e^2} (x^2)' \ln x dx - e^2 + e = \\ - [x \ln^2 x]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} x' \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + [x^2 \ln^2 x]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x^2' \cdot \frac{1}{x} dx - e^2 + e = \\ = -4e^2 + e + 2 \int_e^{e^2} (x)' \ln x dx + 4e^4 - e^2 - [x]_e^{e^2} - e^2 + e = \\ = 4e^4 - 7e^2 + 3e + 2[x \ln x]_e^{e^2} - 2 \int_e^{e^2} x' \cdot \frac{1}{x} dx = \\ 4e^4 - 7e^2 + 3e + 4e^2 - 2e - 2[x]_e^{e^2} = 4e^4 - 5e^2 + 3e \text{ τ.μ.}$$

$$\theta) \text{ Για κάθε } x \geq 1 \Leftrightarrow h(x) \leq h(1) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) + 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{g(x)}{x} + \frac{1}{x}. \text{ Επειδή η ισότητα στη τελευταία σχέση ισχύει μόνο για } x = 1,$$

$$\text{έχουμε: } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx < \int_1^e \left(\frac{g(x)}{x} + \frac{1}{x} \right) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx < \int_1^e \frac{g(x)}{x} dx + \int_1^e \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx < \int_1^e \frac{g(x)}{x} dx + [\ln x]_1^e \Leftrightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx < \int_1^e \frac{g(x)}{x} dx + 1$$

ι) $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2x \ln x - e^{\frac{1}{x}} = 0$. Έστω $\alpha(x) = 2x \ln x - e^{\frac{1}{x}}$, $x \in [1, +\infty)$.

Είναι $\alpha(1) = -e < 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x \ln x - e^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty - 1 = +\infty$ άρα

υπάρχει $\beta > 1$ τέτοιο ώστε $\alpha(\beta) > 0$. Επειδή $\alpha(1)\alpha(\beta) < 0$ και η α είναι συνεχής στο $[1, \beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το

θ.Bolzano, η εξίσωση $\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \ln x = e^{\frac{1}{x}}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, \beta)$.

95. α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$, λόγω του θεωρήματος Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστο στο διάστημα αυτό.

β) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος $[0, \pi]$. Τότε λόγω του θεωρήματος Fermat, είναι $f'(x_0) = 0$.

Είναι $f(x_0) < \eta \mu x_0 \cdot f'(x_0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι

$f(x) \leq f(x_0) < 0$. Αν η f έχει μέγιστο στο 0 ή στο π , τότε επειδή

$f(0) < \eta \mu 0 \cdot f'(0) = 0$, $f(\pi) < \eta \mu \pi \cdot f'(\pi) = 0$, είναι $f(x) \leq f(0) < 0$ και

$f(x) \leq f(\pi) < 0$. Οπότε σε κάθε περίπτωση είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

γ) Είναι $f(x) < \eta \mu x f'(x) \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(x) dx < \int_0^{\pi/2} \eta \mu x f'(x) dx \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2} f(x) dx < [\eta \mu x f(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sigma \nu \nu x f(x) dx \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2} f(x) dx + \int_0^{\pi/2} \sigma \nu \nu x f(x) dx < f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (1 + \sigma \nu \nu x) f(x) dx < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

δ) Επειδή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, η σχέση $f(x) < \eta \mu x f'(x)$ γίνεται:

$2f(x)f'(x) > 2\eta \mu x f(x)f'(x) \Leftrightarrow 2f^2(x) > \eta \mu x (f^2(x))' \Rightarrow$

$\int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx > \int_0^{\pi/2} \eta \mu x (f^2(x))' dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx > [\eta \mu x f^2(x)]_0^{\pi/2} -$

$\int_0^{\pi/2} \sigma \nu \nu x f^2(x) dx \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} 2f^2(x) dx + \int_0^{\pi/2} \sigma \nu \nu x f^2(x) dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi/2} [2f^2(x) + \sigma \nu \nu x f^2(x)] dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \int_0^{\pi/2} (2 + \sigma \nu \nu x) f^2(x) dx > f^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ε) $f(x) < \eta \mu x f'(x) \xrightarrow[x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]]{f(x) < 0, \eta \mu x > 0} \frac{1}{\eta \mu x} > \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx < \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\eta \mu x} dx \quad (1)$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{\eta \mu^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu x}{1 - \sigma \nu^2 x} dx \quad \begin{array}{l} \sigma \nu x = u \\ \eta \mu x dx = -du \\ x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 0 \end{array} = \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-du}{1 - u^2} = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du$$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} = \frac{Au + A + Bu - B}{(u - 1)(u + 1)} = \frac{(A + B)u + A - B}{u^2 - 1}$$

Για να ισχύει η ισότητα για κάθε $u \neq \pm 1$ πρέπει: $\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}, \text{ άρα}$

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{u - 1} - \frac{\frac{1}{2}}{u + 1}, \text{ οπότε:}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u + 1} \right) du = \left[\frac{1}{2} \ln |u - 1| - \frac{1}{2} \ln |u + 1| \right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln 3$$

και $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta \mu x} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u^2 - 1} du = \frac{1}{2} \ln 3$. Η σχέση (1) γίνεται: $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{f'(x)}{f(x)} dx <$

$$\frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow [\ln |f(x)|]_{\pi/3}^{\pi/2} < \frac{1}{2} \ln 3 \Leftrightarrow \ln \left| f\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| - \ln \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| < \ln 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \ln \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{3}\right)} < \sqrt{3} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > \sqrt{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

96. α) Έστω $\rho \in \mathbb{R}$ ρίζα της f , τότε $f(\rho) = 0$.

Η σχέση $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^3$ (1) για $x = \rho$ γίνεται:

$$\cancel{f^3(\rho)}^0 + \rho^2 \cancel{f(\rho)}^0 = 2\rho^3 \Leftrightarrow 2\rho^3 = 0 \Leftrightarrow \rho = 0, \text{ άρα το } \rho = 0 \text{ είναι η μοναδική ρίζα της } f.$$

$$f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^3 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + x^2) = 2x^3 \text{ και για } x \neq 0 \text{ είναι}$$

$$f(x) = \frac{2x^3}{f^2(x) + x^2}. \text{ Επειδή για κάθε } x \neq 0 \text{ είναι } f^2(x) + x^2 > 0, \text{ έχουμε:}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} > 0 \Leftrightarrow 2x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ και}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} < 0 \Leftrightarrow 2x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f^2(x) + x^2 > x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x) + x^2} < \frac{1}{x^2}$ και

- αν $x > 0$ τότε $\frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} < \frac{2x^3}{x^2} \Leftrightarrow f(x) < 2x$, οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $0 < f(x) < 2x$.

- αν $x < 0$ τότε $\frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} > \frac{2x^3}{x^2} \Leftrightarrow f(x) > 2x$, οπότε για κάθε $x < 0$ είναι $2x < f(x) < 0$.

γ) Για κάθε $x \neq 0$ είναι

$$|f(x)| = \left| \frac{2x^3}{f^2(x) + x^2} \right| = \frac{2|x|^3}{f^2(x) + x^2} \leq \frac{2x^2|x|}{x^2} \Leftrightarrow -2|x| \leq f(x) \leq 2|x|$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (-2|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} 2|x| = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0), \text{ οπότε η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 0.$$

δ) Αντικαθιστούμε στην (1) όπου x το $-x$ και προκύπτει:

$$f^3(-x) + (-x)^2 f(-x) = 2(-x)^3 \Leftrightarrow f^3(-x) + x^2 f(-x) = -2x^3 \quad (2)$$

Από (1) + (2) $\Rightarrow f^3(x) + f^3(-x) + x^2 f(x) + x^2 f(-x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(f(x) + f(-x)) [f^2(x) - f(x)f(-x) + f^2(-x)] + x^2 (f(x) + f(-x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + f(-x)) [f^2(x) - f(x)f(-x) + f^2(-x) + x^2] = 0 \quad (3)$$

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f^2(x) > 0, f^2(-x) > 0$.

Αν $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$, τότε $f(x) > 0, f(-x) < 0 \Leftrightarrow -f(-x) > 0$, οπότε

$$f^2(x) - f(x)f(-x) + f^2(-x) + x^2 > 0 \text{ και λόγω της (3) είναι}$$

$$f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad (4).$$

Αν $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$, τότε $f(x) < 0 \Leftrightarrow -f(x) > 0, f(-x) > 0$, οπότε

$$f^2(x) - f(x)f(-x) + f^2(-x) + x^2 > 0 \text{ και λόγω της (3) είναι}$$

$$f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad (4). \text{ Επειδή } f(0) = 0, \text{ από τις (4), (5)}$$

προκύπτει ότι $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι περιττή.

ε) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, είναι

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}. \text{ Για } x \neq 0 \text{ είναι}$$

$$\frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{x^2 f(x)}{x^3} = \frac{2x^2}{x^3} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \frac{f(x)}{x} \right] = 2 \Leftrightarrow$$

$$[f'(0)]^3 + f'(0) - 2 = 0 \Leftrightarrow (f'(0) - 1)[(f'(0))^2 + f'(0) + 2] = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1 \text{ ή}$$

$$(f'(0))^2 + f'(0) + 2 = 0 \text{ αδύνατη αφού είναι 2ου βαθμού με } \Delta < 0.$$

στ) 1) Για $x = 1$ η σχέση (1) γίνεται:

$$f^3(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow f^3(1) + f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1)(f^2(1) + f(1) + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(1) = 1 \text{ ή } f^2(1) + f(1) + 2 = 0 \text{ αδύνατη } (\Delta < 0)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οι παραστάσεις $f^3(x)$, $x^2 f(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$$(f^3(x) + x^2 f(x))' = (2x^3)' \Leftrightarrow 3f^2(x)f'(x) + 2xf'(x) + x^2 f''(x) = 6x^2 \quad (6) \text{ και}$$

για $x = 1$ είναι

$$3f^2(1)f'(1) + 2f(1) + f'(1) = 6 \Leftrightarrow 3f'(1) + 2 + f'(1) = 6 \Leftrightarrow 4f'(1) = 4 \Leftrightarrow f'(1) = 1.$$

Η εφαιπτομένη έχει εξίσωση: $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x$

2) Έστω $\alpha \in (0, +\infty)$ λύση της εξίσωσης $f(x) = 6$. Για $x = \alpha$ η (1) γίνεται:

$$f^3(\alpha) + \alpha^2 f(\alpha) = 2\alpha^3 \Leftrightarrow 6^3 + \alpha^2 \cdot 6 = 2\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 - 108 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - 6)(\alpha^2 + 3\alpha + 18) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6 \text{ ή } \alpha^2 + 3\alpha + 18 = 0 \text{ αδύνατη } (\Delta < 0). \text{ Άρα}$$

$f(6) = 6$. Έστω τώρα ότι η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει λύση και τον $0 < \beta \neq \alpha$,

τότε για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[a, \beta]$ ή $[\beta, \alpha]$, οπότε υπάρχει

$\xi \in (\alpha, \beta)$ ή (β, α) τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Για $x = \xi$ η σχέση (6) γίνεται:

$$3f^2(\xi)f'(\xi) + 2\xi f'(\xi) + \xi^2 f''(\xi) = 6\xi^2 \Leftrightarrow 2\xi f'(\xi) = 6\xi^2 \Leftrightarrow f'(\xi) = 3\xi \text{ και η (1)}$$

$$\text{γίνεται: } f^3(\xi) + \xi^2 f(\xi) = 2\xi^3 \Leftrightarrow (3\xi)^3 + \xi^2 \cdot 3\xi = 2\xi^3 \Leftrightarrow 27\xi^3 + 3\xi^3 = 2\xi^3 \Leftrightarrow 28\xi^3 = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \text{ αδύνατο.}$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 6$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$ το $x = 6$.

$$3) \int_1^6 \frac{f'(x)}{f^2(x) + f(x)} dx = \int_1^6 \frac{f'(x)}{f(x)(f(x) + 1)} dx$$

Θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε το κλάσμα $\frac{1}{x(x+1)}$ σε απλούστερα κλάσματα.

$$\text{Έστω } A, B \in \mathbb{R} \text{ με } \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)}$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq -1$ πρέπει

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}, \text{ άρα } \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \text{ και}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+1)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)+1}, \text{ οπότε}$$

$$\int_1^6 \frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+1)} dx = \int_1^6 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)+1} \right] dx = [\ln f(x) - \ln(f(x)+1)]_1^6 =$$

$$\ln f(6) - \ln(f(6)+1) - \ln f(1) + \ln(f(1)+1) = \ln 6 - \ln 7 - \ln 1^0 + \ln 2 = \ln \frac{12}{7}$$

97. α) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f'(x) = -(\alpha+1)e^{\beta-x}, x \in \mathbb{R}. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x_0 \in \mathbb{R} \text{ έχει εξίσωση}$$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0)$$

Επειδή η εφαπτομένη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι η ευθεία $y = -6x + 36$ τότε:

$$\begin{cases} f'(x_0) = -6 \\ f(x_0) = -6x_0 + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(\alpha+1)e^{\beta-x_0} = -6 \\ (\alpha+1)e^{\beta-x_0} = -6x_0 + 36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^{\beta-x_0} = \frac{6}{\alpha+1} \\ 6 = -6x_0 + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - x_0 = \ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right) \\ 6x_0 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right) + 5 \\ x_0 = 5 \end{cases}.$$

(από τη σχέση $-(\alpha+1)e^{\beta-x_0} = -6 \Leftrightarrow (\alpha+1)e^{\beta-x_0} = 6$ έχουμε

$$\alpha+1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1 \text{ αφού } e^{\beta-x_0} > 0, 6 > 0)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2^{-x}}{2^{\beta-x} + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha+1)e^{\beta-x} + 2^{-x}}{2^{\beta-x} + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha+1)e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5-x} + 2^{-x}}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5-x} + e^{-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha+1)e^{-x} \cdot e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5} + 2^{-x}}{2^{-x} \cdot 2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5} + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2^{-x}} \left[\left(\frac{e}{2}\right)^{-x} (\alpha+1)e^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5} + 1 \right]}{\cancel{2^{-x}} \left[2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5} + \left(\frac{e}{2}\right)^{-x} \right]} = \frac{1}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}}$$

γιατί $\frac{e}{2} > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^{-x} \stackrel{u=-x}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^u = 0$. Άρα είναι

$$\frac{1}{2^{\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)+5}} = 2^{-\ln 6 - 5} \Leftrightarrow 2^{-\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right)-5} = 2^{-\ln 6 - 5} \Leftrightarrow -\ln\left(\frac{6}{\alpha+1}\right) - 5 = -\ln 6 - 5 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

και ισχύει $\beta = \ln 6 + 5$. Άρα $f(x) = e^{\ln 6 + 5 - x} = e^{\ln 6} e^{5-x} = 6e^{5-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και

πράγματι ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 2^{-x}}{2^{\beta-x} + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln 6 + 5 - x} + 2^{-x}}{2^{\ln 6 + 5 - x} + e^{-x}} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} \cdot e^{\ln 6 + 5} + 2^{-x}}{2^{-x} \cdot 2^{\ln 6 + 5} + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2^{-x}} \left[\left(\frac{e}{2} \right)^{-x} e^{\ln 6 + 5} + 1 \right]}{\cancel{2^{-x}} \left[2^{\ln 6 + 5} + \left(\frac{e}{2} \right)^{-x} \right]} = \frac{1}{2^{\ln 6 + 5}}$$

β) Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f''(x) = (-6e^{5-x})' = 6e^{5-x} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή και}$$

επομένως η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Άρα $f(x) \geq -6x + 36$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = x_0 = 5$.

Για $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ είναι $\ln x < 0$ και $f(x) > -6x + 36$ άρα

$\ln x f(x) < \ln x (-6x + 36)$ οπότε

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x f(x) dx < \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x (-6x + 36) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-6x \ln x + 36 \ln x) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 -6x \ln x dx + \int_0^1 36 \ln x dx = \left[-3x^2 \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^1 + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3x^2}{x} dx + 36 \left[x \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^1 -$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{36}{x} dx = \frac{3}{4} \ln \frac{1}{2} + \left[\frac{3x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 - 18 \ln \frac{1}{2} - 36 \left(1 - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{69}{4} \ln 2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{8} - 18 = \frac{69}{4} \ln 2 - \frac{63}{8} = \frac{1}{8} (138 \ln 2 + 63).$$

γ) Έστω $\varphi(x) = (5-x)f(x) + 6 = 6(5-x)e^{5-x} + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi'(x) = -6e^{5-x} - 6(5-x)e^{5-x} = 6e^{5-x}(-1-5+x) = 6e^{5-x}(x-6).$$

Για κάθε $x < 6$ είναι $\varphi'(x) < 0$ και για κάθε $x > 6$ είναι $\varphi'(x) > 0$, επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 6]$ και γνησίως αύξουσα στο

$[6, +\infty)$. Η φ έχει ελάχιστο το $\varphi(6) = -6e^{-1} + 6 = 6\left(1 - \frac{1}{e}\right)$, οπότε για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) \geq \varphi(6) > 0$.

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ άρα ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Έστω η κατακόρυφη ευθεία $x = \lambda > 5$. Τότε επειδή $f(x) > 0$ το ζητούμενο

$$\text{εμβαδόν είναι } E(\lambda) = \int_5^\lambda f(x) dx = \int_5^\lambda 6e^{5-x} dx = [-6e^{5-x}]_5^\lambda = -6e^{5-\lambda} + 6$$

Όταν $\lambda \rightarrow +\infty$ είναι $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = 6$ άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι 6τ.μ.

$$\epsilon) I = \int_{\ln 6}^5 \frac{2f^4(x) - 7f^3(x) + 6f^2(x) + f(x)}{f^2(x) - 4f(x) + 3} dx =$$

$$\int_{\ln 6}^5 \frac{2f^3(x) - 7f^2(x) + 6f(x) + 1}{f^2(x) - 4f(x) + 3} f(x) dx$$

Θέτουμε $f(x) = u$ οπότε $f'(x) dx = du \Leftrightarrow -f(x) dx = du$. Για $x = \ln 6$ είναι

$$u = e^5 \text{ και για } x = 5 \text{ είναι } u = 6.$$

$$\text{Άρα } I = - \int_{e^5}^6 \frac{2u^3 - 7u^2 + 6u + 1}{u^2 - 4u + 3} du = \int_6^{e^5} \frac{2u^3 - 7u^2 + 6u + 1}{u^2 - 4u + 3} du$$

Εκτελούμε την διαίρεση των πολυωνύμων $2u^3 - 7u^2 + 6u + 1$ και $u^2 - 4u + 3$:

$$\text{Είναι } 2u^3 - 7u^2 + 6u + 1 = (2u+1)(u^2 - 4u + 3) + 4u - 2 \text{ άρα:}$$

$$I = \int_6^{e^5} \frac{2u^3 - 7u^2 + 6u + 1}{u^2 - 4u + 3} du = \int_6^{e^5} \frac{(2u+1)(u^2 - 4u + 3) + 4u - 2}{u^2 - 4u + 3} du =$$

$$\int_6^{e^5} \left(2u+1 + \frac{4u-2}{u^2 - 4u + 3} \right) du \text{ Είναι}$$

$$\frac{4u-2}{u^2 - 4u + 3} = \frac{4u-2}{(u-1)(u-3)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u-3} = \frac{Au - 3A + Bu - B}{(u-1)(u-3)} = \frac{(A+B)u - 3A - B}{(u-1)(u-3)}$$

$$\text{Πρέπει } \begin{cases} A+B=4 \\ -3A-B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow A=-1 \text{ και } B=5.$$

$$\text{Άρα } I = \int_6^{e^5} \left(2u+1 + \frac{4u-2}{u^2 - 4u + 3} \right) du = \int_6^{e^5} \left(2u+1 + \frac{1}{u-1} + \frac{5}{u-3} \right) du =$$

$$= \left[u^2 + u + \ln(|u-1|) + 5 \ln(|u-3|) \right]_6^{e^5} =$$

$$e^{10} + e^5 + \ln(e^5 - 1) + 5 \ln(e^5 - 3) - 36 - 6 - \ln 5 - 5 \ln 3 =$$

$$= e^{10} + e^5 + \ln(e^5 - 1) + 5 \ln(e^5 - 3) - 42 - \ln 5 - 5 \ln 3.$$

98. α) Η κατακόρυφη απόσταση των C_f και C_g δίνεται από τον τύπο

$$d(x) = |f(x) - g(x)| = f(x) - g(x), \quad x > 0, \text{ καθώς } f(x) > g(x). \text{ Άρα}$$

$$d(x) = e^x - \ln x, \quad x > 0 \text{ και η } d \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με παράγωγο}$$

$$d'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} . \text{ Αρχικά θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό}$$

$$x_0 \in (0,1) \text{ τέτοιο ώστε } d'(x_0) = 0 .$$

1^{ος} τρόπος:

Έστω η συνάρτηση $k(x) = xe^x - 1$, $x \geq 0$ με παράγωγο $k'(x) = e^x + xe^x > 0$ για κάθε $x \geq 0$ άρα $k \nearrow [0, +\infty)$. Η k είναι συνεχής στο $[0,1]$, $k(0) = -1 < 0$, $k(1) = e - 1 > 0$ δηλαδή $k(0)k(1) < 0$ επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0$ και επειδή η k είναι γνησίως αύξουσα είναι μοναδικό.

2ος τρόπος

Η d είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με δεύτερη παράγωγο

$$d''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0 . \text{ Επομένως η } d' \text{ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής άρα}$$

$$d'((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} d'(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} d'(x) \right) = (1 - \infty, e - 1) = (-\infty, e - 1)$$

Το $0 \in d'((0,1))$ άρα μοναδικό υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $d'(x_0) = 0$.

Για $0 < x < x_0 \stackrel{k'}{\Rightarrow} k(x) < 0 \Rightarrow d'(x) < 0$ και η d συνεχής στο $(0, x_0]$ άρα $d \searrow (0, x_0]$.

Για $x > x_0 \stackrel{k'}{\Rightarrow} k(x) > 0 \Rightarrow d'(x) > 0$ και η d συνεχής στο $[x_0, +\infty)$ άρα $d \nearrow [x_0, +\infty)$. Η d παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in (0,1)$.

β) Είναι $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$ και το $x_0 \in (0,1)$ μοναδικό.

γ) Είναι $M(\alpha, \beta) \equiv M(\alpha, e^\alpha)$ και $N(\beta, \alpha) \equiv N(\beta, \ln \beta)$ δηλαδή $e^\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha = \ln \beta$.

1^{ος} τρόπος:

$$(MN) = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \alpha)^2} = \sqrt{2(\beta - \alpha)^2} = \sqrt{2}|\beta - \alpha| = \sqrt{2}|\beta - \ln \beta| = \sqrt{2}(\beta - \ln \beta)$$

γιατί είναι $\ln \beta \leq \beta - 1 \Leftrightarrow \beta - \ln \beta \geq 1$ (1) για κάθε $\beta > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\beta = 1$.

Άρα είναι $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}(\beta - \ln \beta) \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow (MN) \geq \sqrt{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\beta = 1$. Επομένως $(MN)_{\min} = \sqrt{2}$

2^{ος} τρόπος:

$$(MN) = \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \alpha)^2} = \sqrt{2(\alpha - \beta)^2} = \sqrt{2}|\alpha - \beta| = \sqrt{2}|\alpha - e^\alpha| = \sqrt{2}(e^\alpha - \alpha)$$

γιατί είναι $e^\alpha \geq \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha - e^\alpha \leq -1 < 0$ και $e^\alpha \geq \alpha + 1 \Leftrightarrow e^\alpha - \alpha \geq 1$ (2) για

κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha = 0$.

Άρα $(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}(e^\alpha - \alpha) \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow (MN) \geq \sqrt{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha = 0$. Επομένως $(MN)_{\min} = \sqrt{2}$. Προφανώς τα σημεία όταν η απόσταση είναι ελάχιστη είναι $M(0,1)$ και $N(1,0)$.

δ) 1^{ος} τρόπος: Λόγω συμμετρίας των C_f, C_g ως προς την $y = x$, τότε αφού

$$(MN)_{\min} = \sqrt{2} \text{ τότε } d(M, \varepsilon)_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2^{ος} τρόπος: Έχουμε την ευθεία $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$.

Η απόσταση του $M(\alpha, \beta)$ από την ευθεία δίνεται από τον τύπο:

$$d(M, \varepsilon) = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha - e^\alpha}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } d(M, \varepsilon)_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ε) Είναι $f(x) = e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και έχει μοναδική ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$

Έστω $\lambda_1 < 0$ τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E_1 = \lim_{\lambda_1 \rightarrow -\infty} E(\lambda_1)$ όπου

$$E(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^0 |f(x)| dx = \int_{\lambda_1}^0 e^x dx = [e^x]_{\lambda_1}^0 = 1 - e^{\lambda_1} \text{ άρα } E_1 = \lim_{\lambda_1 \rightarrow -\infty} E(\lambda_1) = 1$$

τετραγωνική μονάδα. Είναι $g(x) = \ln x$, $x > 0$, $f(1) = 0$ και έχει μοναδική ασύμπτωτη τον άξονα $y'y$ και $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$. Έστω $\lambda_2 > 0$ τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E_2 = \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} E(\lambda_2)$ όπου

$$E(\lambda_2) = \int_{\lambda_2}^1 |g(x)| dx = -\int_{\lambda_2}^1 \ln x dx = -[x \ln x]_{\lambda_2}^1 + \int_{\lambda_2}^1 dx = \lambda_2 \ln(\lambda_2) + 1 - \lambda_2 \text{ άρα}$$

$$E_2 = \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} E(\lambda_2) = 1 \text{ τετραγωνική μονάδα γιατί}$$

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} [\lambda_2 \ln(\lambda_2)] = \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\lambda_2)}{\frac{1}{\lambda_2}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda_2}}{-\frac{1}{\lambda_2^2}} = \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0^+} (-\lambda_2) = 0$$

Άρα $E_1 = E_2 = 1$ τ.μ.

99. α) Έστω $c = \int_1^e \frac{(f^{-1})'(f(x))}{x} dx$ με $c \in \mathbb{R}$, τότε

$g(x) = f(x) + c = x \ln x + \ln 2$, $x \geq 1$. Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$g'(x) = \ln x + 1 > 0$ για κάθε $x \geq 1$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και επειδή g συνεχής είναι:

$g([1, +\infty)) = [g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = [\ln 2, +\infty)$ άρα $g(x) \geq \ln 2 > 0$ για κάθε $x \geq 1$.

β) $f(x) = x \ln x + \ln 2 - c$, $x \geq 1$. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = \ln x + 1 > 0$ για κάθε $x \geq 1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f([1, +\infty))$. Έστω ότι η f^{-1} δεν είναι γνησίως αύξουσα τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in f([1, +\infty))$ τέτοια ώστε $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} x_1 \geq x_2$ άτοπο. Άρα και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Η $f^{-1}(f(x))$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι $f^{-1}(f(x)) = x$ και παραγωγίζοντας έχουμε

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\ln x + 1} \text{ αφού } f'(x) > 0 \text{ για}$$

κάθε $x \geq 1$. Είναι

$$c = \int_1^e \frac{(f^{-1})'(f(x))}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x \ln x + 1} dx = \int_1^e \frac{(\ln x + 1)'}{\ln x + 1} dx = [\ln(|\ln x + 1|)]_1^e = \ln 2.$$

Άρα $f(x) = x \ln x$, $x \geq 1$.

$$\delta) f(x)(x^3 + x - 4) - 2x^3 \ln 2 - 2x \ln 2 + 8 \ln 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)(x^3 + x - 4) - 2 \ln 2 (x^3 + x - 4) = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 2 \ln 2)(x^3 + x - 4) = 0$$

Έστω η συνάρτηση $k(x) = x^3 + x - 4$, $x \in [1, 2]$.

Η k είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική, $g(1) = -2 < 0$, $g(2) = 6 > 0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Η k είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $k'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ άρα $k \nearrow [1, 2]$ και το $\xi \in (1, 2)$ είναι μοναδικό.

$$\text{Είναι } f(x) - 2 \ln 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(2) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x = 2$$

Επομένως $(f(x) - 2 \ln 2)(x^3 + x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = \xi$. Άρα η εξίσωση

$$f(x)(x^3 + x - 4) - 2x^3 \ln 2 - 2x \ln 2 + 8 \ln 2 = 0 \text{ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο}$$

$$(1, 2]. \epsilon) \text{ Η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο } f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x \geq 1$$

άρα η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$ και επειδή η f είναι κυρτή ισχύει $f(x) \geq x - 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 1$. Άρα

$$\int_1^e f(x) dx > \int_1^e (x-1) dx = \left[\frac{(x-1)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(e-1)^2}{2}$$

στ) i) Είναι $f(x) = x \ln x \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 1$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E[\alpha(t)] = \int_1^{\alpha(t)} |f(x)| dx = \int_1^{\alpha(t)} x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\alpha(t)} - \int_1^{\alpha(t)} \frac{x}{2} dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^{\alpha(t)} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^{\alpha(t)} = \frac{\alpha^2(t)}{2} \ln[\alpha(t)] - \frac{\alpha^2(t)}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2\alpha^2(t) \ln[\alpha(t)] - \alpha^2(t) + 1}{4}$$

ii) Επειδή το $M(\alpha(t), 0)$ απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ταχύτητα 1cm/sec και κινείται πάνω στον άξονα $x'x$ τότε την χρονική στιγμή $t = 2$ sec θα είναι $\alpha'(t) = 1 \Leftrightarrow \alpha'(t) = t' \Leftrightarrow \alpha(t) = t + c, c \in \mathbb{R}$.

Για $t = 0$: $c=0$ οπότε $\alpha(t) = t$ άρα $\alpha'(t) = 1$.

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$$(E[\alpha(t)])' = \frac{4\alpha(t)\alpha'(t)\ln[\alpha(t)] + \frac{2\alpha^2(t)}{\alpha(t)}\alpha'(t) - 2\alpha(t)\alpha'(t)}{4} =$$

$\alpha(t)\alpha'(t)\ln[\alpha(t)]$. Τη χρονική στιγμή $t = 2$ sec θα είναι

$$(E[\alpha(2)])' = \alpha(2)\alpha'(2)\ln[\alpha(2)] = 2 \cdot 1 \cdot \ln 2 = 2 \ln 2 \text{ . } \mu/\text{sec}$$

100. α) Έστω ότι η f δεν είναι 1-1 τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 \neq x_2$

τέτοια ώστε: $f(x_1) = f(x_2) \xRightarrow{f(x)>0} f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow$

$x_1^2 f(x_1) = x_2^2 f(x_2) \xRightarrow{f(x_1)=f(x_2)} x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \xRightarrow{x_1, x_2 > 0} x_1 = x_2$ άτοπο. Άρα η f είναι συνάρτηση 1-1.

β) Είναι $f^{(3)}(x) > 0 \Rightarrow f'' \nearrow (0, +\infty)$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty) : f''(x_0) = 0$ τότε:

Για $0 < x < x_0 \xRightarrow{f'' \nearrow} f''(x) < f''(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $(0, x_0]$. Για $x > x_0 \xRightarrow{f'' \nearrow} f''(x) > f''(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $[x_0, +\infty)$.

Άρα η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = x_0$ που είναι άτοπο.

Άρα $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και επειδή f'' είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ τότε $f' \nearrow (0, +\infty) \Rightarrow f' : 1-1$.

Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ τότε $f' \searrow (0, +\infty) \Rightarrow f' : 1-1$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η f' είναι γνησίως μονότονη άρα και 1-1.

γ) Η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ επομένως αντίστοιχα το ίδιο ισχύει και για την f^{-1} . Είναι $f(f(x)) = x^2 f(x)$ για κάθε $x > 0$ άρα βάζοντας όπου x το $f^{-1}(x) > 0$ προκύπτει:

$$f(f(f^{-1}(x))) = [f^{-1}(x)]^2 f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f(x) = [f^{-1}(x)]^2 x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} [f^{-1}(x)]^2 = \frac{f(x)}{x}$$

και επειδή $f^{-1}(x) > 0$, $f(x) > 0$ και $x > 0$ άρα τελικά είναι $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{f(x)}{x}}$

$$\int_1^2 ([f^{-1}(x)]^2)' f^{-1}(x) dx = \int_1^2 \left(\frac{f(x)}{x} \right)' \sqrt{\frac{f(x)}{x}} dx \quad (1)$$

Θέτουμε $\frac{f(x)}{x} = u > 0$ και είναι $\left(\frac{f(x)}{x} \right)' dx = du$. Για $x = 1$ είναι $u = 1$ και

για $x = 2$ είναι $u = \frac{1}{4}$.

$$\text{Άρα } (1) = \int_1^{\frac{1}{4}} \sqrt{u} du = \left[\frac{3u^{\frac{3}{2}}}{2} \right]_1^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{3\sqrt{u}}{2} \right]_1^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = \frac{3}{16} - \frac{3}{2} = -\frac{21}{16}$$

δ) Είναι $M(x(t), f[x(t)])$ με $x(t) > 0$.

Απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ταχύτητα 1 m/sec άρα $x'(t) = 1$ m/sec.

Είναι $(\varepsilon) : y = -\frac{3}{4}x - 3 \Leftrightarrow 4y = -3x - 12 \Leftrightarrow 3x + 4y + 12 = 0$ και έχουμε ότι:

$$\frac{3x(t) + 4f(x(t)) + 12}{5}$$

$$d(M, \varepsilon) = d(x(t)) = \frac{|3x(t) + 4f(x(t)) + 12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3x(t) + 4f(x(t)) + 12|}{5} = H$$

συνάρτηση d είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$d'(x(t)) = \frac{3x'(t) + 4f'(x(t))x'(t)}{5} = \frac{3 + 4f'(x(t))}{3}$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που διέρχεται από το $A(1,1)$ είναι $x(t_0) = 1$.

$$\text{Άρα } d'(x(t_0)) = \frac{3 + 4f'(x(t_0))}{3} = \frac{3 + 4f'(1)}{3} = \frac{3 - 4}{3} = -\frac{1}{3} \text{ m/sec γιατί}$$

παραγωγίζοντας την σχέση $f(f(x)) = x^2 f(x)$ έχουμε

$$f'(f(x))f'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) \text{ και για } x=1 \text{ είναι}$$

$$[f'(1)]^2 - 2f'(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 2 \text{ απορρίπτεται ή } f'(1) = -1 \Rightarrow f'(1) = -1$$

$$101. \alpha) \rho^p = e^{p+1} \Leftrightarrow \ln \rho^p = \ln e^{p+1} \Leftrightarrow p \ln \rho = p + 1 \Leftrightarrow g(p) = 0$$

H g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $g'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $g'(x) > 0$,
επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως

$$\alphaύξουσα στο $[1, +\infty)$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - x - 1) = -1.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\ln x - 1 - \frac{1}{x} \right) \right] = +\infty.$$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει
αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_1) = [-2, -1]$. Επειδή το 0 δεν περιέχεται στο
 $g(\Delta_1)$, η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_1 .

Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει
αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_2) = (-2, +\infty)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο
 $g(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $\rho \in \Delta_2$ (λόγω μονοτονίας) τέτοιο, ώστε $g(\rho) = 0$.

$$\beta) \text{ Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{-g(x)}{x(x+1)^2}. \text{ Για κάθε } x \in (0, 1]$$

είναι $g(x) < 0$, άρα $f'(x) > 0$ και για κάθε $1 < x < \rho \stackrel{g'}{\Rightarrow} g(x) < g(\rho) = 0$, άρα

$f'(x) > 0$. Δηλαδή για κάθε $x \in (0, \rho)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \rho]$. Για κάθε $x > \rho$ είναι $g(x) > g(\rho) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\rho, +\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(\rho) = \frac{\ln \rho}{\rho+1}$. Όμως

$$g(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho \ln \rho = \rho + 1 \Leftrightarrow \ln \rho = \frac{\rho+1}{\rho}, \text{ άρα } f(\rho) = \frac{\cancel{\rho+1}}{\cancel{\rho+1}} = \frac{1}{\rho}, \text{ οπότε για κάθε}$$

$$x > 0 \text{ είναι } f(x) \leq \frac{1}{\rho}.$$

$$\begin{aligned} \gamma) \int_1^e f(x) dx + \int_1^e \frac{\ln(x+1)}{x} dx &= \int_1^e \frac{\ln x}{x+1} dx + \int_1^e \frac{\ln(x+1)}{x} dx = \\ \int_1^e \ln x (\ln(x+1))' dx + \int_1^e \frac{\ln(x+1)}{x} dx &= \\ [\ln x \cdot \ln(x+1)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x+1) dx + \int_1^e \frac{\ln(x+1)}{x} dx &= \\ \ln(e+1) - \int_1^e \frac{\ln(x+1)}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln(x+1)}{x} dx &= \ln(e+1) \end{aligned}$$

$$\delta) \text{ Είναι } 0,222 < 1 \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(0,222) < f(1) = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Στο διάστημα $\Delta = (\rho, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta) = \left(0, \frac{1}{\rho}\right)$. Επειδή το $f(0,222)$ δεν περιέχεται στο $f(\Delta)$, η εξίσωση $f(x) = f(0,222)$ είναι αδύνατη στο $(\rho, +\infty)$.

$$102. \alpha) f(x) = \frac{(3x+1)(e^x+1)+1}{e^x+1} = \frac{(3x+1)(\cancel{e^x+1})}{\cancel{e^x+1}} + \frac{1}{e^x+1} = 3x+1 + \frac{1}{e^x+1}.$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = 3 - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^{2x} + 5e^x + 3}{(e^x+1)^2}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + 1 + \frac{1}{e^x + 1} \right) = -\infty + 1 + 1 = -\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x + 1 + \frac{1}{e^x + 1} \right) = +\infty + 1 + 0 = +\infty .$$

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε υπάρχει μοναδικό $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$.

β) Είναι $f(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$, οπότε $f((-\infty, 0)) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((-\infty, 0))$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, 0)$. Όμως η f έχει μοναδική ρίζα το ρ , άρα $\rho < 0$.

γ) Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x) = 2xf^2(x) + x^2 \cdot 2f(x)f'(x) = 2xf(x)(f(x) + xf'(x))$. Η h έχει ρίζες το 0 και το ρ . Θα αναζητήσουμε άλλη μία ρίζα. Είναι $h(0) = 0 = h(\rho)$.

Η h συνεχής στο $[\rho, 0]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in (\rho, 0)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0) = 0$. Όμως το $2x$ έχει μοναδική ρίζα το 0, η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το ρ , οπότε το x_0 είναι ρίζα της συνάρτησης $g(x) = f(x) + xf'(x)$.

- Για κάθε $x < \rho$ είναι $x < 0$, $f(x) < f(\rho) = 0$, $f'(x) > 0$, άρα $f(x) + xf'(x) < 0$, οπότε $h'(x) < 0$.

Η h συνεχής στο $(-\infty, \rho]$ άρα η h γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

- Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) > 0$, $f'(x) > 0$, άρα $f(x) + xf'(x) > 0$, οπότε $h'(x) > 0$.

Η h συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 2f'(x) + xf''(x)$.

$$\text{Είναι } f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}. \text{ Για κάθε } x \in (\rho, 0) \text{ είναι } e^x < e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0,$$

οπότε $f''(x) < 0$, άρα $g'(x) = 2f'(x) + xf''(x) > 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(\rho, 0)$. Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Για κάθε $\rho < x < x_0 \xrightarrow{g'} g(x) < g(x_0) = 0$. Είναι $x < 0$, $f(x) > 0$ οπότε

$$h'(x) > 0.$$

Η h είναι συνεχής στο $[ρ, x_0]$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[ρ, x_0]$.

Για κάθε $x_0 < x < 0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) = 0$ οπότε $h'(x) < 0$ αφού $x < 0$, $f(x) > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_0, 0]$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, 0]$.

Επομένως η h έχει τοπικά ελάχιστο στο $x = ρ$, τοπικό μέγιστο στο $x = x_0$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$.

$$\delta) \text{ Είναι } 0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq f(x) \leq 7 + \frac{1}{e^2 + 1}.$$

Επειδή στη τελευταία σχέση η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0, 2]$, είναι

$$\int_0^2 \frac{3}{2} dx < \int_0^2 f(x) dx < \int_0^2 7 + \frac{1}{e^2 + 1} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2}(2-0) < \int_0^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{e^x + 1} \right) dx < \left(7 + \frac{1}{e^2 + 1} \right)(2-0) \Leftrightarrow$$

$$3 < \left[3 \frac{x^2}{2} + x \right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{7e^2 + 8}{e^2 + 1} \cdot 2 \Leftrightarrow 3 < 8 + \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{7e^2 + 8}{e^2 + 1} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$-5 < \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{14e^2 + 16}{e^2 + 1} - 8 \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{14e^2 + 16 - 8e^2 - 8}{e^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{6e^2 + 8}{e^2 + 1}.$$

2ος τρόπος

$$\frac{1}{e^x + 1} < \frac{1}{e^x} \text{ οπότε } \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \int_0^2 \frac{1}{e^x} dx = [-e^{-x}]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < -\frac{1}{e^2} + 1$$

άρα

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{6e^2 + 8}{e^2 + 1} \text{ αφού } \frac{6e^2 + 8}{e^2 + 1} = 6 + \frac{2}{e^2 + 1} > 1 > 1 - \frac{1}{e^2}$$

103. α) Έστω $\frac{f(x)}{x} = h(x)$, $x > 0$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \alpha$. Τότε $f(x) = xh(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xh(x) = +\infty. \text{ Είναι: } \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x).$$

β) Έστω $g(x) = (x-1)f(x)$. Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $g'(x) = f(x) + (x-1)f'(x)$ και $g(0) = g(1) = 0$, οπότε σύμφωνα με

το Θ . Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + (\xi - 1)f'(\xi) = 0.$$

γ) i. Για $x = 0$ ισχύει η ισότητα. Για $x > 0$: Ισχύει για την f το ΘΜΤ στο

$$[0, x], \text{ οπότε υπάρχει } \xi_1 \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x)}{x}. \text{ Επειδή η } f \text{ είναι}$$

κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:

$$0 < \xi_1 < x \Leftrightarrow f'(0) < f'(\xi_1) < f'(x) \Leftrightarrow 1 < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow x < f(x) < xf'(x).$$

ii. Είναι $t \leq f(t) \leq tf'(t)$ για κάθε $t \geq 0$, οπότε και

$$\int_0^x t dt \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x tf'(t) dt \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x f(t) dt \leq [tf(t)]_0^x - \int_0^x f(t) dt. \text{ Είναι}$$

$$\int_0^x f(t) dt \leq xf(x) - \int_0^x f(t) dt \Leftrightarrow 2 \int_0^x f(t) dt \leq xf(x) \Leftrightarrow \int_0^x f(t) dt \leq \frac{xf(x)}{2},$$

άρα $\frac{x^2}{2} \leq \int_0^x f(t) dt \leq \frac{xf(x)}{2}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$, είναι και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty.$$

104. α) Έστω ότι η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . Τότε επειδή εφάπτεται της C_f στο A είναι $f'(x_1) = \lambda$ και επειδή εφάπτεται της C_f στο B είναι $f'(x_2) = \lambda$, άρα $f'(x_1) = f'(x_2)$. Επειδή η ευθεία ε ταυτίζεται με την AB ,

$$\text{είναι: } \lambda_{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \lambda. \text{ Άρα } f'(x_1) = f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (3).$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

$$f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 6bx + 1, \text{ άρα λόγω του θεωρήματος μέσης τιμής, υπάρχει}$$

$$\xi \in (x_1, x_2) \text{ τέτοιο ώστε: } f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \text{ Άρα}$$

$$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(\xi). \text{ Η } f' \text{ είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα}$$

$$[x_1, \xi], [\xi, x_2] \text{ και παραγωγίσιμη στα } (x_1, \xi) \text{ και } (\xi, x_2) \text{ με}$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12ax + 6b = 6(2x^2 + 2ax + b). \text{ Λόγω του}$$

$$\text{θεωρήματος Rolle υπάρχουν } \xi_1 \in (x_1, \xi) \text{ και } \xi_2 \in (\xi, x_2) \text{ τέτοια ώστε}$$

$$f''(\xi_1) = 0 \text{ και } f''(\xi_2) = 0. \text{ Δηλαδή η } f'' \text{ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες. Όμως η } f''$$

είναι 2ου βαθμού και έχει το πολύ 2 ρίζες, άρα η f'' έχει ακριβώς 2 ρίζες οπότε έχει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8b > 0 \Leftrightarrow 4a^2 > 8b \Leftrightarrow a^2 > 2b$.

$$\gamma) \int_{x_1}^{x_2} x f''(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} x (f'(x))' dx = [x f'(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} x f''(x) dx = x_2 f'(x_2) - x_1 f'(x_1) - [f(x)]_{x_1}^{x_2} \stackrel{(3)}{=} 0.$$

105. α) Η $f(x) = x + e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = 1 + e^x > 0$ άρα $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + e^x - 1) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και αφού η $f \nearrow$ τότε το σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$.

β) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα θα είναι και 1-1 συνεπώς ορίζεται η f^{-1} . $f(x) > x \Leftrightarrow x + e^x - 1 > x \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

γ) Αφού οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$ και η C_f είναι πάνω από την $y = x$ στο $[0, e]$ τότε η $C_{f^{-1}}$ θα είναι κάτω από την $y = x$. Οπότε το

ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^e f(x) - f^{-1}(x) dx = \int_0^e f(x) dx - \int_0^e f^{-1}(x) dx.$$

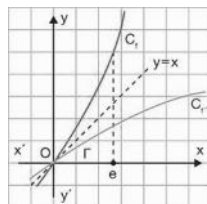
Θέτω $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$ και $dx = f'(u) du$ για

$x = 0$ είναι $f(u) = f(0)$ άρα $u = 0$ ενώ για $x = e$ είναι

$f(u) = e = f(1)$ άρα $u = 1$ οπότε:

$$E(\Omega) = \int_0^e f(x) dx - \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^e (x + e^x - 1) dx - [u f(u)]_0^1 + \int_0^1 f(u) du =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^e + [e^x]_0^e - [x]_0^e - f(1) + \int_0^1 (u + e^u - 1) du = \frac{e^2}{2} + e^e - e - \frac{5}{2}.$$



δ) Είναι $e^{g(x)} + g(x) = x + \ln x \Leftrightarrow e^{g(x)} + g(x) - 1 = e^{\ln x} + \ln x - 1$.

$f(g(x)) = f(\ln x)$ και αφού η f είναι 1-1 τότε $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

ε) Έστω G αρχική της $\frac{1}{g(x)}$ τότε, $G'(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ln x}$. Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ

για την G στο $[x, x+1]$ οπότε υπάρχει $\xi \in [x, x+1]$ τέτοιο ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(x+1) - G(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln \xi} = \int_x^{x+1} \frac{1}{g(t)} dt$$

Είναι $x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \ln x < \ln \xi < \ln(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{\ln \xi} > \frac{1}{\ln(x+1)} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{g(x+1)} < \int_x^{x+1} \frac{1}{g(t)} dt < \frac{1}{g(x)}.$$

στ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την g στο $[e, \pi]$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (e, \pi)$

$$\text{τέτοιο ώστε } g'(x_0) = \frac{g(\pi) - g(e)}{\pi - e} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{g(\pi) - 1}{\pi - e} \text{ είναι}$$

$$0 < e < x_0 < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{x_0} > \frac{1}{\pi} \text{ οπότε}$$

$$\frac{\pi}{e} - 1 > g(\pi) - 1 > 1 - \frac{e}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi}{e} > g(\pi) > 2 - \frac{e}{\pi} .$$

$$\zeta) \quad x + e^x + e^{x+e^x-1} = e - 2 \Leftrightarrow x + e^x - 1 + e^{x+e^x-1} - 1 = e \Leftrightarrow f(f(x)) = f(1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0 .$$

1ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επίπεδο 1

Θέμα Α

A1. Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

A2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$,

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta).$$

A3. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου

ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

A4. α) $\wedge$ β) $\wedge$ γ) $\wedge$ δ) Σ ε) $\wedge$

Θέμα Β

B1. Η h ορίζεται όταν: $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, \pi] \\ f(x) \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, \pi].$

Είναι $h(x) = (g \circ f)(x) = f^2(x) + f(x) + 1 = \eta\mu^2 x + \eta\mu x + 1, x \in [0, \pi].$

$$\mathbf{B2. \alpha)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h^2(x) - 1}{f^2(x) + 4f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu^2 x + \eta\mu x + 1)^2 - 1}{\eta\mu^2 x + 4\eta\mu x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu^2 x + \eta\mu x)(\eta\mu^2 x + \eta\mu x + 2)}{\eta\mu x (\eta\mu x + 4)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\eta\mu x} (\eta\mu x + 1)(\eta\mu^2 x + \eta\mu x + 2)}{\cancel{\eta\mu x} (\eta\mu x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu x + 1)(\eta\mu^2 x + \eta\mu x + 2)}{\eta\mu x + 4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

B3. Για την συνάρτηση g:

1^{ος} τρόπος: Η g είναι τριώνυμο με $\alpha = \beta = \gamma = 1$ και διακρίνουσα $\Delta = -3$.

Επομένως η g είναι μία παραβολή με κορυφή (ολικό ελάχιστο) για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2} \text{ το } g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{3}{4}. \text{ Επίσης } g \searrow \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \text{ και } g \nearrow \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

2^{ος} τρόπος: Η g είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g'(x) = 2x + 1$

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$. Για κάθε $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ είναι

$g'(x) < 0$ και g συνεχής στο $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ άρα $g \searrow \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

Για κάθε $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ είναι $g'(x) > 0$ και g συνεχής στο $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ άρα

$g \nearrow \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -\frac{1}{2}$ το $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Για την συνάρτηση h: Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με

$$h'(x) = 2\eta \mu x \sigma \nu x + \sigma \nu x = \sigma \nu x (2\eta \mu x + 1)$$

Για κάθε $x \in (0, \pi)$ είναι $0 < \eta \mu x \leq 1 \Leftrightarrow 1 < 2\eta \mu x + 1 \leq 3$. Επίσης $\sigma \nu x > 0$ για

κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\sigma \nu x < 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Επομένως $h'(x) > 0$ για

κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και η h συνεχής άρα $h \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $h'(x) < 0$ για κάθε

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ και η h συνεχής άρα $h \searrow \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ το $h(0) = 1$, τοπικό μέγιστο για

$x = \frac{\pi}{2}$ το $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ και τοπικό ελάχιστο $x = \pi$ το $h(\pi) = 1$.

B4. $0 \leq x \leq 1 \xRightarrow{g'} g(x) \geq g(0) = 1$ και $0 \leq x \leq 1 < \pi \Rightarrow 0 \leq \eta \mu x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 1$.

Επομένως για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $g(x) \geq f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι } E &= \int_0^1 |g(x) - f(x)| dx = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \\ &= \int_0^1 (x^2 + x + 1 - \eta\mu x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \sigma\upsilon\nu x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \sigma\upsilon\nu 1 - 1 = \frac{5 + 6\sigma\upsilon\nu 1}{6} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x > 0$ είναι $f^4(x) = x^2 \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt[4]{x^2} \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x}$. Για κάθε

$x > 0$ είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ αδύνατη άρα $f(x) \neq 0$

για κάθε $x > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο στο $(0, +\infty)$. Είναι $f(1) = 1$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Δηλαδή

$f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής τότε $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ άρα

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0.$$

Γ2. $g(x) = (x-1)f^2(x)f(x) = x(x-1)\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$g'(x) = (x-1)\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x(x-1)}{2\sqrt{x}}. \text{ Είναι } g(0) = g(1) = 0 \text{ άρα σύμφωνα με το}$$

θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.

Γ3. Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = f(x(t)) = \sqrt{x(t)}$ το υλικό σημείο. Είναι $x'(t) = 0,5 \text{ cm/sec}$.

$$\text{Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του } M \text{ είναι } y'(t) = \frac{x'(t)}{2\sqrt{x(t)}} = \frac{1}{4\sqrt{x(t)}}.$$

Έστω $t = t_0$ η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το A , τότε $x(t_0) = 4$,

$$\text{οπότε } y'(t_0) = \frac{x'(t_0)}{2\sqrt{x(t_0)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{8} \text{ cm/sec}.$$

$$\text{Γ4. } f'(\beta) < \frac{1}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}} < f'(\alpha) \Leftrightarrow f'(\beta) < \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})} < f'(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$f'(\beta) < \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha} < f'(\alpha).$$

Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στο $[\alpha, \beta]$ άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha}.$$

$$\text{Είναι } 0 < \alpha < x_0 < \beta \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\alpha} < \sqrt{x_0} < \sqrt{\beta} \Leftrightarrow 0 < 2\sqrt{\alpha} < 2\sqrt{x_0} < 2\sqrt{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}} > \frac{1}{2\sqrt{x_0}} > \frac{1}{2\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow f'(\beta) < f'(x_0) < f'(\alpha) \Leftrightarrow f'(\beta) < \frac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\beta - \alpha} < f'(\alpha).$$

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [2\ln(x-2) - x^2 + 4x + 1] = -\infty$ άρα υπάρχει $\alpha > 2$

πολύ κοντά στο 2 τέτοιο ώστε $f(\alpha) < 0$. Είναι $f(3) = 4 > 0$ και

$$f(5) = 2\ln 3 - 4 = \ln 8 - \ln e^4 < 0 \text{ αφού } 8 < e^4.$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχουν $x_1 \in (2, 3)$ και $x_2 \in (3, 5)$

τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned} \text{παράγωγος: } f'(x) &= \frac{2}{x-2} - 2x + 4 = \frac{2 - 2x(x-2) + 4(x-2)}{x-2} = \\ &= \frac{2 - 2x^2 + 4x + 4x - 8}{x-2} = \frac{-2x^2 + 8x - 6}{x-2} = -\frac{2(x^2 - 4x + 3)}{x-2}. \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$-2(x^2 - 4x + 3)$	-	+	+	-	
$x - 2$	-	-	+	+	
$f'(x)$	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ			+	-
f	ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ				

Ο.Μ.

Για $x \in (2, 3)$ είναι $f'(x) > 0$ και η f είναι συνεχής στο $(2, 3]$ επομένως

$f \nearrow (2, 3]$. Για $x \in (3, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο $[3, +\infty)$

επομένως $f \searrow [3, +\infty)$. Άρα τα x_1, x_2 είναι μοναδικά.

$$\begin{aligned} \Delta 2. \quad & 2\ln[(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)] + \alpha(4-\alpha) + \beta(4-\beta) + \gamma(4-\gamma) = 9 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2\ln(\alpha-2) + \alpha(4-\alpha) + 2\ln(\beta-2) + \beta(4-\beta) + 2\ln(\gamma-2) + \gamma(4-\gamma) = 9 \Leftrightarrow \\ & 2\ln(\alpha-2) + \alpha(4-\alpha) + 1 + 2\ln(\beta-2) + \beta(4-\beta) + 1 + 2\ln(\gamma-2) + \gamma(4-\gamma) + 1 = 12 \Leftrightarrow \\ & f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 12. \end{aligned}$$

Η f έχει μέγιστο το $f(3) = 4$ άρα $f(x) \leq f(3) = 4$ για κάθε $x > 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 3$.

Είναι $f(\alpha) \leq f(3) = 4$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha = 3$ (1)

Είναι $f(\beta) \leq f(3) = 4$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\beta = 3$ (2)

Είναι $f(\gamma) \leq f(3) = 4$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\gamma = 3$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2),(3) προκύπτει $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) \leq 12$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $\alpha = \beta = \gamma = 3$.

$\Delta 3.$ $f(x) \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x^{>2} f(x)}{x} \leq \frac{4}{x}$ για κάθε $x > 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 3$. Άρα για κάθε $2 < x_1 < x_2$ είναι

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x} dx < \int_{x_1}^{x_2} \frac{4}{x} dx = [4 \ln x]_{x_1}^{x_2} = 4 \ln x_2 - 4 \ln x_1 = 4 \ln \frac{x_2}{x_1}.$$

$\Delta 4.$ Αρκεί να εξετάσουμε αν η C_f έχει σημεία καμπής. Η f' είναι συνεχής και

$$\text{παραγωγίσιμη με παράγωγο: } f''(x) = \left(\frac{2}{x-2} - 2x + 4 \right)' = -\frac{2}{(x-2)^2} - 2 < 0 \text{ για}$$

κάθε $x > 2$ άρα η f είναι κοίλη στο $(2, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Επομένως δεν υπάρχει εφαπτομένη που να την διαπερνά. Η εφαπτομένη της C_f για $x = 5$ έχει εξίσωση: $y = f'(5)x + f(5) - 5f'(5)$. Επειδή η f είναι κοίλη τότε $f(x) \leq f'(5)x + f(5) - 5f'(5) \Leftrightarrow f(x) + 5f'(5) \leq f'(5)x + f(5)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 5$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση το 5.

2ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα

Επιπέδου 1

Θέμα Α

$\Delta 1.$ Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot 0 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως,

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

A2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}.$$

A3. Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει

το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως

εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$, όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

A4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Θέμα Β

B1. $f(x) = |x|x^2 = \begin{cases} -x^3, & x \leq 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$. Για $x < 0$ η γραφική

παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ με την $y = x^3$.

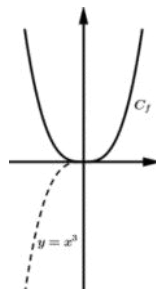
Για $x < 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -3x^2 < 0$ ενώ για

$x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 > 0$. Επειδή η f

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων τότε $f \searrow (-\infty, 0]$ και

$f \nearrow [0, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

B2. $g(x) = \begin{cases} f(x) + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x, & x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x, & x > 1 \end{cases}$.



Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 1) = 2 = g(1)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 2$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$, η g είναι συνεχής στο $x = 1$. Επιπλέον η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[0, 1]$ και $(1, 2]$ ως πολυωνυμική, οπότε η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = 3$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3, \text{ οπότε η } g \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη στο $x = 1$ με $g'(1) = 3$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $g'(x) = 3x^2$ και στο $(1, 2)$ με $g'(x) = 2x + 1$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$. Επομένως για την g εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[0, 2]$ και υπάρχει

$$\xi \in (0, 2) \text{ για τα οποία } g'(\xi) = \frac{6 - 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Αν } \xi \in (0, 1) \text{ τότε } g'(\xi) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3\xi^2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \xi^2 = \frac{5}{6} \stackrel{\xi > 0}{\Leftrightarrow} \xi = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

$$\text{Αν } \xi \in (1, 2) \text{ τότε } g'(\xi) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\xi + 1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\xi = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \xi = \frac{3}{4} < 1 \text{ απορρίπτεται.}$$

$$\mathbf{B3. \alpha)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty.$$

$$\mathbf{\beta)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{g(x)} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \frac{1}{2}.$$

B4. Αν $f(x) = |x|x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = x$, $x < 0$ τότε η $h \circ f$ για να ορίζεται

$$\text{πρέπει: } \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |x|x^2 < 0 \end{cases} \text{ αδύνατη} \quad \text{άρα τότε δεν ορίζεται η } h \circ f.$$

Αν $f(x) = |x|x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 2x + 1$, $x \geq 0$ τότε η $h \circ f$ ορίζεται όταν:

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ |x|x^2 \geq 0 \end{cases} \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ άρα για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ είναι } (h \circ f)(x) = h(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2|x|x^2 + 1 = \begin{cases} -2x^3 + 1, & x < 0 \\ 2x^3 + 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Θέμα Γ

Γ1. Η f ορίζεται όταν $x > 0$ και $x - \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \ln x$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $\ln x \leq x - 1 < x \Leftrightarrow x - \ln x > 0$, οπότε η f έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{x - \ln x - x \left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{\cancel{x} - \ln x - \cancel{x} + 1}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}.$$

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e$. Για κάθε

$x \in (0, e)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(0, e]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x \in (e, +\infty)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[e, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{e}{e-1}$.

$$\begin{aligned} \text{Γ3. } \int_1^e \frac{1}{f(x)} dx &= \int_1^e \frac{x - \ln x}{x} dx = \int_1^e \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) dx = \int_1^e dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \\ &= e - 1 - \frac{1}{2} \int_1^e 2(\ln x)' \ln x dx = e - 1 - \frac{1}{2} [\ln^2 x]_1^e = e - 1 - \frac{1}{2} = e - \frac{3}{2} = \frac{2e-3}{2}. \end{aligned}$$

Γ4. Είναι $f(1) = \frac{1}{1 - \ln 1} = 1$. Αρχικά η ε διέρχεται από το σημείο A οπότε $1 = \alpha + \beta$ (1). Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο A , είναι $f'(1) = \lambda_\varepsilon = \alpha \Leftrightarrow 1 = \alpha$, τότε από τη σχέση (1) προκύπτει $\beta = 0$.

Γ5. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \frac{1}{x - \ln x}\right) = 0 \cdot 0 = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta = (0, e)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(\Delta) = \left(0, \frac{e}{e-1}\right)$. Είναι $\frac{2}{3} < \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow 2e - 2 < 3e \Leftrightarrow e > -2$ ισχύει. Επειδή το

$\frac{2}{3}$ περιέχεται στο σύνολο τιμών της f , η εξίσωση $f(x) = \frac{2}{3}$ έχει ακριβώς μια

λύση στο διάστημα $(0, e)$.

Θέμα Δ

Είναι $f(x) = 1 - x^{-x} = 1 - e^{\ln x \cdot (-x)} = 1 - e^{-x \ln x}$, $x > 0$

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x) = e^{-x \ln x} (\ln x + 1).$$

Είναι $e^{-x \ln x} > 0$ για κάθε $x > 0$ και $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$.

Άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$, $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ άρα $f \searrow \left(0, \frac{1}{e}\right]$ και

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ άρα $f \nearrow \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο για $x = \frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{e}}$.

Δ2. Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση και πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f''(x) = -e^{-x \ln x} (\ln x + 1)^2 + \frac{e^{-x \ln x}}{x} = -e^{-x \ln x} \left((\ln x + 1)^2 - \frac{1}{x} \right).$$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = (\ln x + 1)^2 - \frac{1}{x}$, $x > 0$, η οποία είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη ως πράξεις και σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με παράγωγο $g'(x) = \frac{2(\ln x + 1)}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2x \ln x + 2x + 1}{x^2}$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = 2x \ln x + 2x + 1$, $x > 0$, η οποία είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη ως πράξεις και σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων

συναρτήσεων με παράγωγο $h'(x) = 2 \ln x + 4$.

Είναι $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \ln x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e^2}$.

Άρα $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$, $h'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right)$ άρα $h \searrow \left(0, \frac{1}{e^2}\right]$ και

$h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ άρα $h \nearrow \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$. Η h παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο για $x = \frac{1}{e^2}$ το $h\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{4}{e^2} + \frac{2}{e^2} + 1 = 1 - \frac{2}{e^2} > 0$ (Πράγματι

$1 > \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow e^2 > 2$). Επομένως $h(x) \geq h\left(\frac{1}{e^2}\right) > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα είναι

$2x \ln x + 2x + 1 > 0$ και $x^2 > 0$ για κάθε $x > 0$ επομένως $g'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και $g \nearrow (0, +\infty)$.

Για $0 < x < 1 \xrightarrow{g'} g(x) < g(1) = 0$ άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ άρα η f είναι

κυρτή στο $(0, 1]$. Για $x > 1 \xrightarrow{g'} g(x) > g(1) = 0$ άρα $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει καμπή για $x = 1$ και έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1)) \equiv A(1, 0)$.

Δ3. Είναι $f(1) = 0$ και $f'(1) = 1$ άρα η εφαπτομένη είναι η $y = x - 1$.

Η f είναι κυρτή στο $(0, 1]$ άρα $f(x) \geq x - 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 1$. Αντίστοιχα η f είναι κοίλη στο $[1, +\infty)$ άρα $f(x) \leq x - 1$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 1$. Άρα $f(x) = x - 1$ μόνον για $x = 1$.

Δ4. α) Από Δ1 ερώτημα είναι $f(x) \geq 1 - e^{\frac{1}{x}}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για

$x = \frac{1}{e}$. Για $x \in [1, 2]$ είναι $f(x) \geq 1 - e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow xf(x) \geq x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$ με την ισότητα να

ισχύει μόνον για $x = \frac{1}{e}$. Άρα

$$\int_1^2 xf(x) dx > \int_1^2 x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)\right]_1^2 = 2\left(1 - e^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - e^1\right) = \frac{3}{2}\left(1 - e^{\frac{1}{2}}\right)$$

β) Η f είναι κοίλη για κάθε $x \geq 1$ άρα είναι $f(x) \leq x - 1$ με την ισότητα να ισχύει

μόνον για $x = 1$ άρα $\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

3ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 1

Θέμα Α

A1. Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.

Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρξει $c \in \mathbb{R}$

τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_a^\alpha f(t) dt + c = c$, οπότε

$c = G(\alpha)$. Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_a^\beta f(t) dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

A2. Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

A3. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

A4. α) Δ β) Δ γ) Σ δ) Δ ε) Δ

Θέμα Β

B1. Για $x < 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x$. Για $x > 0$ η f είναι

παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2$. Στο $x_0 = 0$ είναι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = 0$

και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

B2. Παρατηρούμε ότι $f(-1) = (-1)^2 = 1$ και $f(1) = 1^3 = 1$, δηλαδή $f(-1) = f(1)$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και
παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$, οπότε εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο
 $[-1, 1]$.

B3. Επειδή $f(-1) = f(1)$ δεν εφαρμόζεται ο ορισμός του 1-1, οπότε η f δεν
είναι αντιστρέψιμη.

B4. Έστω $M(x_1, f(x_1))$. Αν $x_1 < 0$, τότε η εφαπτομένη της C_f στο x_1 έχει
εξίσωση ε_1 : $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1) \Leftrightarrow y = 2x_1x - x_1^2$
Η ε_1 διέρχεται από το A , όταν: $-1 = 2x_1 \cdot 0 - x_1^2 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$. Επειδή $x_1 < 0$ είναι
 $x_1 = -1$ και ε_1 : $y = -2x - 1$. Αν $x_1 \geq 0$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο x_1 έχει
εξίσωση

$$\varepsilon_2: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - x_1^3 = 3x_1^2(x - x_1) \Leftrightarrow y = 3x_1^2x - 2x_1^3$$

Η ε_2 διέρχεται από το A , όταν: $-1 = 3x_1^2 \cdot 0 - 2x_1^3 \Leftrightarrow x_1^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Τότε

$$\varepsilon_2: y = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 x - 2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}x - 1.$$

B5. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [-1, 2]$, το ζητούμενο

$$\text{εμβαδόν είναι: } E = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{1}{3} + 4 = \frac{13}{3}.$$

Θέμα Γ

Γ1. α) Είναι $\sin x + 2f(\pi) \leq f'(x) \leq \sin x + 3f(\pi) \quad (1) \Rightarrow$

$$\int_0^\pi (\sin x + 2f(\pi)) dx \leq \int_0^\pi f'(x) dx \leq \int_0^\pi (\sin x + 3f(\pi)) dx \Leftrightarrow$$

$$[\eta \mu x + 2f(\pi)x]_0^\pi \leq [f(x)]_0^\pi \leq [\eta \mu x + 3f(\pi)x]_0^\pi \Leftrightarrow$$

$$2\pi f(\pi) \leq f(\pi) - f(0) \leq 3\pi f(\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi f(\pi) - f(\pi) \leq 0 \\ 3\pi f(\pi) - f(\pi) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (2\pi - 1)f(\pi) \leq 0 & 2\pi - 1 \geq 0 \\ (3\pi - 1)f(\pi) \geq 0 & 3\pi - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\pi) \leq 0 \\ f(\pi) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(\pi) = 0. \text{ Τότε η (1) γίνεται:}$$

$$\sin x \leq f'(x) \leq \sin x \Leftrightarrow f'(x) = \sin x = (\eta \mu x)' \Leftrightarrow f(x) = \eta \mu x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(0) = 0$ είναι $c = 0$, οπότε $f(x) = \eta\mu x$.

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\lambda} \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \eta\mu \frac{1}{x} = 0 \text{ γιατί}$$

$$\left| x \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0,$$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} x \eta\mu \frac{1}{x} = 0$. Άρα

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = 0 \text{ και η } g \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 0. \text{ Επειδή}$$

$g(0) = 0$ και $g'(0) = 0$ η C_g εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο O .

γ) Για τα κοινά σημεία της C_f με τον $x'x$ έχουμε: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή

$$x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \kappa\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{\kappa\pi}, \kappa \in \mathbb{Z}^*. \text{ Άρα κοινά σημεία είναι}$$

το $O(0,0)$ και τα άπειρα σημεία της μορφής $\left(\frac{1}{\kappa\pi}, 0 \right), \kappa \in \mathbb{Z}^*$.

$$\delta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\lambda} \eta\mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 = \lambda \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} - x \right) \stackrel{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu u}{u^2} - \frac{1}{u} \right) =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u - u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{2u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = 0 = \beta, \text{ άρα η ευθεία } y = x \text{ είναι}$$

ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. Όμοια στο $-\infty$.

Γ2. α) Η εφαπτομένη της C_f στο O είναι η ευθεία

$$\varepsilon_1 : y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x \text{ και η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } A$$

$$\text{είναι η ευθεία } \varepsilon_2 : y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow y - \pi = -x \Leftrightarrow y = -x + \pi$$

β) Έστω B το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, τότε:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x + \pi \\ y = -x + \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ y = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ άρα } B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Το τρίγωνο OAB έχει εμβαδόν:

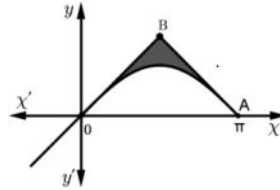
$$(OAB) = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον $x'x$

έχει εμβαδόν: $E_1 = \int_0^{\pi} \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_0^{\pi} = 2$, άρα το

ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = (OAB) - E_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$



Θέμα Δ

Δ1. Έστω ότι η πολωνυμική έχει βαθμό n . Τότε η f' θα είναι $n-1$ βαθμού και το άθροισμα $f + f'$ θα είναι n βαθμού. Όμως το άθροισμα $f + f'$ είναι 4ου βαθμού, άρα $n = 4$.

Έστω $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, $\alpha \neq 0$. Είναι

$$f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta \text{ και}$$

$$f(x) + f'(x) = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon + 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x + \delta = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^4 + (\beta + 4\alpha)x^3 + (\gamma + 3\beta)x^2 + (\delta + 2\gamma)x + \varepsilon + \delta = 5x^4 + 20x^3 - 30x^2 - 40x + 25$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta + 4\alpha = 20 \\ \gamma + 3\beta = -30 \\ \delta + 2\gamma = -40 \\ \varepsilon + \delta = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 0 \\ \gamma = -30 \\ \delta = 20 \\ \varepsilon = 5 \end{cases} \text{ Άρα } f(x) = 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5.$$

Δ2. Είναι $f'(x) = 20x^3 - 60x + 20 = 20(x^3 - 3x + 1)$ και

$$f''(x) = 20(3x^2 - 3) = 60(x^2 - 1).$$

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ είναι $f''(x) > 0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$. Για

κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f''(x) < 0 \Rightarrow f' \searrow [-1, 1]$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (20x^3 - 60x + 20) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 20x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 20x^3 = +\infty,$$

$$f'(-1) = 60 \text{ και } f'(1) = -20. \text{ Τα}$$

παραπάνω παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f''(x)$		+	0	-	0	+	
f'	$-\infty$	$\nearrow$	TM	$\searrow$	TE	$\nearrow$	$+\infty$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως

αύξουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f'(\Delta_1) = (-\infty, 60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f'(\Delta_1)$ υπάρχει

μοναδικό x_1 στο εσωτερικό του Δ_1 τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [-1, 1]$, οπότε έχει

αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_2) = [-20, 60]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο

εσωτερικό του $f'(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο,

ώστε $f'(x_2) = 0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_3 = [-1, +\infty)$, οπότε έχει

αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta_3) = [-20, +\infty)$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο

εσωτερικό του $f'(\Delta_3)$ υπάρχει μοναδικό x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο,

ώστε $f'(x_3) = 0$. Για κάθε $x < x_1 \xRightarrow{f': \nearrow} f'(x) < f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \searrow (-\infty, x_1]$. Για

κάθε $x_1 < x < -1 \xRightarrow{f': \nearrow} f'(x) > f'(x_1) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [x_1, -1]$. Η f έχει τοπικό

ελάχιστο το $f(x_1)$. Για κάθε $-1 < x < x_2 \xRightarrow{f': \searrow} f'(x) > f'(x_2) = 0 \Rightarrow f' \nearrow [-1, x_2]$

. Για κάθε $x_2 < x < 1 \xRightarrow{f': \searrow} f'(x) < f'(x_2) = 0 \Rightarrow f' \searrow [x_2, 1]$. Η f έχει τοπικό

μέγιστο το $f(x_2)$. Για κάθε $1 < x < x_3 \xRightarrow{f': \nearrow} f'(x) < f'(x_3) = 0 \Rightarrow f' \searrow [1, x_3]$ και

για κάθε

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$				
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
f	$+\infty$		TE		TM		TE		$+\infty$

$x > x_3 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_3) = 0 \Rightarrow f \nearrow [x_3, +\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(x_3)$. Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$$\Delta 3. x^4 + 4x + 1 = 6x^2 \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty.$$

Είναι $x_1 < -1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(-1) = -40 < 0$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (-\infty, x_1)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1) = (f(x_1), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_1)$ υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in A_1$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = 0$.

Είναι $x_2 < 1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(1) = 0 > 0$. Η f είναι συνεχής στο -1 , οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [x_1, x_2]$ και έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_2) = [f(x_1), f(x_2)]$. Επειδή το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(A_2)$, υπάρχει μοναδικό ρ_2 στο εσωτερικό του A_2 τέτοιο, ώστε $f(\rho_2) = 0$.

Επειδή $f(1) = 0$, η εξίσωση έχει ρίζα το 1 . Η f είναι συνεχής στο $x = 1$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_3 = [x_2, x_3]$ και η $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

Είναι $x_3 > 1 \Leftrightarrow f(x_3) < f(1) = 0$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_4 = [x_3, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(A_4) = [f(x_3), +\infty)$. Επειδή $0 \in f(A_4)$, η f έχει ρίζα ρ_3 στο A_4 . Τελικά η f έχει τέσσερις ρίζες.

Ακέραια ρίζα της f είναι το 1 . Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης είναι οι διαιρέτες του 1 , δηλαδή ± 1 . Είναι $f(-1) = -40 \neq 0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα.

$\Delta 4$. Τα κοινά σημεία των C_h, C_g είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ άρα τα $\{\rho_1, \rho_2, 1, \rho_3\}$. Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $x = \rho_1$ πρέπει

$h'(\rho_1) = g'(\rho_1) \Leftrightarrow h'(\rho_1) - g'(\rho_1) = 0 \Leftrightarrow f'(\rho_1) = 0$, που είναι άτοπο. Όμοια για τις $x = \rho_2, x = 1$ και $x = \rho_3$. Άρα δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στα κοινά τους σημεία.

4	0	-30	16	10	$\rho=1$
↓	4	4	-26	-10	
4	4	-26	-10	0	

Δ5. Έχουμε $f(x) = g(x) - 6 \Leftrightarrow f(x) - g(x) + 6 = 0$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 30x^2 + 20x + 5 - x^4 - 4x - 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 30x^2 + 16x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^3 + 4x^2 - 26x - 10) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 - 26x - 10 = 0.$$

Έστω $t(x) = 4x^3 + 4x^2 - 26x - 10$, $x \in [1, 3]$. Είναι

$t(1) = -28 < 0$, $t(3) = 108 + 36 - 78 - 10 = 56 > 0$, δηλαδή $t(1)t(3) < 0$ και επειδή η t είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ως πολυωνυμική, λόγω του Θ. Bolzano, η εξίσωση $t(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x^2 - 26x - 10 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 3)$.

4ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 2

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Επομένως,}$$

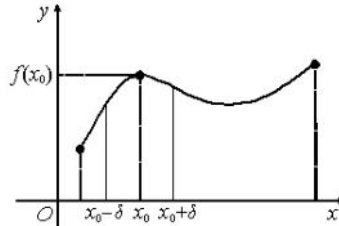
— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα

$$\text{έχουμε } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα

$$\text{έχουμε } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3). \text{ Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε}$$

$f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.



A2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

A3. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

A4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

Θέμα Β

B1.α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Η ε έχει εξίσωση:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y - \frac{1}{\xi} = -\frac{1}{\xi^2}(x - \xi) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\xi^2}x + \frac{2}{\xi}$$

Για $y = 0$ είναι $0 = -\frac{1}{\xi^2}x + \frac{2}{\xi} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2}x = \frac{2}{\xi} \Leftrightarrow x = 2\xi$ και για $x = 0$ είναι

$y = \frac{2}{\xi}$, άρα $A(2\xi, 0)$ και $B\left(0, \frac{2}{\xi}\right)$. Για να είναι το M μέσο του AB πρέπει

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Leftrightarrow 2\xi = 2\xi + 0 \text{ ισχύει και } y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 2\frac{1}{\xi} = 0 + \frac{2}{\xi} \text{ ισχύει.}$$

β) Το εμβαδόν E του τριγώνου OAB είναι:

$$E = \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\left|2\xi\right|\left|\frac{2}{\xi}\right| = \frac{1}{2}\left|2\xi \cdot \frac{2}{\xi}\right| = 2$$

B2. Αρχικά παρατηρούμε ότι $f(1) = g(1) = 1$, δηλαδή το A είναι κοινό σημείο των C_f, C_g . Είναι $f'(1) = -1$ και $g'(x) = 2x - 3$, άρα $g'(1) = -1$. Επειδή $f'(1) = g'(1)$ οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο A .

B3. Έστω $\varphi(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - x^2 + 3x - 3 = \frac{1 - x^3 + 3x^2 - 3x}{x} = -\frac{(x-1)^3}{x}$

Όταν $x < 0$ ή $x > 1$ είναι

$$\varphi(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x),$$

οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από

τη C_g . Όταν $0 < x < 1$ είναι

$$\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x),$$

οπότε

η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g . Τέλος για $x = 1$ οι C_f, C_g τέμνονται.

B4. $h(x) = \alpha x^3 + g(x) + 2x^2 + 4x - 2 = \alpha x^3 + x^2 - 3x + 3 + 2x^2 + 4x - 2 \Leftrightarrow$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-(x-1)^3$	+	+	-	
x	-	+	+	
$\varphi(x)$	-	+	-	

$h(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$h'(x) = 3\alpha x^2 + 6x + 1$. Η h' είναι 2ου βαθμού με $\Delta = 36 - 12\alpha = 12(3 - \alpha)$.

Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 12(3 - \alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha < 3$, τότε η h' έχει δύο ρίζες και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν τους, οπότε η h δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow 12(3 - \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$, τότε $h'(x) = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 > 0$ για

κάθε $x \neq -\frac{1}{3}$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 12(3 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha > 3$, τότε $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Τελικά η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $\alpha \geq 3$.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{x} - 2 = \frac{2 \ln x + 2 - 2x}{x} = \frac{2(\ln x - x + 1)}{x}.$$

Επειδή $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Γ2. $\ln x (\ln x + 2) = 2(x + 2) \Leftrightarrow \ln^2 x + 2 \ln x = 2x + 4 \Leftrightarrow$

$$\ln^2 x + 2 \ln x - 2x + 2 = 6 \Leftrightarrow f(x) = 6 \quad (1). \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln^2 x + 2 \ln x - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x (\ln x + 2) - 2x + 2] = +\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x} - 2 + \frac{2}{x} \right) \right] = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x} - 2 + \frac{2}{x} \right) = -2 \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 2}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$, έχει σύνολο

τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Επειδή $6 \in f(A)$

υπάρχει μοναδικός $x_1 \in A$ τέτοιος ώστε $f(x_1) = 6$, άρα η (1) έχει μοναδική ρίζα.

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = 2 \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)x - (\ln x - x + 1)}{x^2} = 2 \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - \ln x + \cancel{x} - \cancel{x}}{x^2} = -\frac{2 \ln x}{x^2}.$$

Είναι $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ και επειδή η f' είναι συνεχής, είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Είναι $1 < x < x+1 \xRightarrow{f' \searrow} f'(x) > f'(x+1)$ (2),

$1 < x^2 < x^2 + 1 \xRightarrow{f' \searrow} f'(x^2) > f'(x^2 + 1)$ (3). Με πρόσθεση κατά μέλη των (2), (3)

προκύπτει: $f'(x) + f'(x^2) > f'(x+1) + f'(x^2 + 1)$

Γ4. Έστω $g(x) = 2xf(x) + f(x^2) + 3\ln^2 2 + 6\ln 2 - 2xf(x+1) - f(x^2 + 1) - 6, x \geq 1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με

$$g'(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + 2xf'(x^2) - 2f(x+1) - 2xf'(x+1) - 2xf'(x^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = 2[f(x) - f(x+1)] + 2x[f'(x) + f'(x^2) - f'(x+1) - f'(x^2 + 1)].$$

Είναι $1 < x < x+1 \xRightarrow{f' \searrow} f(x) > f(x+1) \Leftrightarrow f(x) - f(x+1) > 0$ και

$$f'(x) + f'(x^2) > f'(x+1) + f'(x^2 + 1) \Leftrightarrow f'(x) + f'(x^2) - f'(x+1) - f'(x^2 + 1) > 0$$
 για

κάθε $x > 1$, άρα $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Για κάθε $x > 1$ είναι $g(x) > g(1)$, όμως

$$g(1) = 2f(\cancel{1})^0 + \cancel{f(1)}^0 + 3\ln^2 2 + 6\ln 2 - 2f(2) - f(2) - 6 \Leftrightarrow$$

$$g(1) = -3f(2) + 3(\ln^2 2 + 2\ln 2 - 2) = -3f(2) + 3f(2) = 0, \text{ άρα}$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow 2xf(x) + f(x^2) + 3\ln^2 2 + 6\ln 2 > 2xf(x+1) + f(x^2 + 1) + 6$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $\int_0^\pi f(x) dx = \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = 2x - \eta\mu x + \lambda + 2 - \pi^2$ και

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi (2x - \eta\mu x + \lambda + 2 - \pi^2) dx \Leftrightarrow \lambda = \left[x^2 + \sigma\upsilon\nu x + (\lambda + 2 - \pi^2)x \right]_0^\pi \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \pi^2 - 1 + \lambda\pi + 2\pi - \pi^3 - 1 \Leftrightarrow \pi^3 - \pi^2 - 2\pi + 2 = \lambda\pi - \lambda \Leftrightarrow$$

$$\pi^2(\pi-1)-2(\pi-1)=\lambda(\pi-1) \Leftrightarrow \frac{(\pi-1)(\pi^2-2)}{\pi-1}=\lambda \Leftrightarrow \lambda=\pi^2-2. \text{ Άρα}$$

$$\int_0^\pi f(x)dx = \pi^2 - 2.$$

$$\Delta 2. \text{ Είναι } f(x) = 2x - \eta\mu x + \cancel{\pi^2} - \cancel{2} + \cancel{2} - \cancel{\pi^2} = 2x - \eta\mu x.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2 - \sigma\upsilon\nu x$. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$, έχουμε: $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

$$\Delta 3. \eta\mu x = 2x - 1821 \Leftrightarrow 1821 = 2x - \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) = 1821.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) \right] = -\infty(2-0) = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\text{για } x < 0 \text{ είναι } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{-x} \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq -\frac{1}{x}. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0, \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \eta\mu x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) \right] = +\infty(2-0) = +\infty$$

$$(\text{με την προηγούμενη διαδικασία } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0).$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$.

Επειδή $1821 \in f(A)$ υπάρχει μοναδικός $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = 1821$.

$$\Delta 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x - 2\eta\mu x - \eta\mu(2x - \eta\mu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(2x - \eta\mu x) - \eta\mu(2x - \eta\mu x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2f(x) - \eta\mu f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(f(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x}}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2 - 1 = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{f(x)=u \\ x \rightarrow 0}} \frac{f(u)}{u} = 1, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1.$$

Δ5. Η g άρτια οπότε $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (2x - \eta \mu x) \cdot g(x) dx = - \int_{-\pi}^{\pi} (-2x - \eta \mu(-x)) \cdot g(-x) dx =$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} (-2x - \eta \mu(-x)) \cdot g(-x) dx \stackrel{\substack{u=-x \\ du=-dx \\ x=-\pi \rightarrow u=\pi \\ x=\pi \rightarrow u=-\pi}}{=} - \int_{-\pi}^{\pi} (2u - \eta \mu(u)) \cdot g(u) du \Leftrightarrow$$

$$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx = 0$$

5ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 2

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Α2. Επειδή η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, η f' είναι παραγωγίσιμη αλλά δεν

γνωρίζουμε αν η f'' είναι συνεχής στο x_0 .

A3. α) Ψευδής

β) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ παρατηρούμε ότι $f(x) \geq -2$ και γενικά από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό στη θέση του -2 , όμως το -2 δεν είναι ελάχιστο της f γιατί δεν υπάρχει σημείο της C_f με αυτή την τεταγμένη (δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = -2$)

2ο αντιπαράδειγμα

Έστω $f(x) = x^2 + (x-1)^2, x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0, (x-1)^2 \geq 0$, άρα και $f(x) = x^2 + (x-1)^2 \geq 0$, όμως δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία $f(x) = 0$ αφού

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } (x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1) \text{ άτοπο.}$$

A4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

Θέμα Β

B1. Θέτουμε $x^3 = \omega, \omega \in \mathbb{R}$ οπότε έχουμε:

$$f(x^3) = x^5 |x| = x^3 \cdot x^2 |x| = x^3 \cdot |x|^2 |x| = x^3 |x^3| \Leftrightarrow f(\omega) = \omega |\omega|$$

άρα $f(x) = x|x|, x \in \mathbb{R}$.

$$\text{B2. Είναι } f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}. \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \mathbb{R}, \text{ για κάθε } x \neq 0 \text{ είναι}$$

$$f'(x) > 0 \text{ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται. Για κάθε $x < 0$

$$\text{είναι } y = -x^2 \Leftrightarrow x^2 = -y > 0 \stackrel{y < 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{-y} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y}.$$

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $y = x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$.

$$\text{Άρα } f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{-y}, & y < 0 \\ \sqrt{y}, & y \geq 0 \end{cases}, \text{ οπότε } f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

B3. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη

στο 0 με παράγωγο $f'(0) = 0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\text{παράγωγο } f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

B4. Για να εφάπτεται η f' της f πρέπει να έχουν κοινό σημείο με θετική τετμημένη. Για $x > 0$ είναι

$$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Η $C_{f'}$ εφάπτεται της C_f στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 2, αν και μόνο αν $f'(2) = \lambda_{f'}$ $\Leftrightarrow 2 \cdot 2 = 2 \Leftrightarrow 4 = 2$ που είναι αδύνατο.

Επομένως δεν υπάρχει σημείο της C_f με θετική τετμημένη στο οποίο να εφάπτεται η f' .

B5. Είναι $f(x) = 1 - x^5 \Leftrightarrow x|x| = 1 - x^5 \Leftrightarrow x^5 + x|x| - 1 = 0$.

Έστω $g(x) = x^5 + x|x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0) = -1$, $g(1) = 1$, δηλαδή $g(0)g(1) < 0$. Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 - x^5$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Επομένως το ζητούμενο διάστημα είναι το $(0, 1)$ για $a = 0$.

Θέμα Γ

Γ1. Στο σχήμα βλέπουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει ακρότατα. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$, ενώ για $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$ οπότε έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))$.

Γ2. 1ος τρόπος: Έστω το σημείο $M(x_1, f(x_1))$.

Η εφαπτομένη της C_f στο M , έχει εξίσωση:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1).$$

Η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ οπότε βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα

$$f(x) \geq f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1) \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Επειδή $f'(x_1) > 0$, είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x_1)x + f(x_1) - x_1 f'(x_1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x_1)x = +\infty$,

οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Έστω $K(x_2, f(x_2))$, $x_2 < 0$. Η εφαπτομένη στο K έχει

εξίσωση $y = f'(x_2)x + f(x_2) - x_2 f'(x_2)$. Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ οπότε βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα $f(x) \leq f'(x_2)x + f(x_2) - x_2 f'(x_2)$ για κάθε $x \leq 0$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f'(x_2)x + f(x_2) - x_2 f'(x_2)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x_2)x = -\infty$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

2ος τρόπος: Η f'' είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα $f''(x) = \lambda x$. Επειδή η f'' σχηματίζει οξεία γωνία με τον x' , είναι $\lambda = \varepsilon\varphi\omega > 0$.

$$\text{Είναι } f''(x) = \lambda x = \left(\lambda \frac{x^2}{2} \right)' \Leftrightarrow f'(x) = \lambda \frac{x^2}{2} + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \left(\lambda \frac{x^3}{6} + c_1 x \right)' \Leftrightarrow f(x) = \lambda \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lambda \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda \frac{x^3}{6} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\lambda \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda \frac{x^3}{6} = -\infty$$

Γ3. 1ος τρόπος: Η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, οπότε δεν έχει ασύμπτωτες.

2ος τρόπος: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, η f δεν έχει οριζόντιες

ασύμπτωτες. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{1} = +\infty$ (σχήμα) και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = +\infty \text{ (σχήμα)}, \text{ οπότε η } f \text{ δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.}$$

3ος τρόπος: Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, η f δεν έχει οριζόντιες

ασύμπτωτες.

Από τον 2^ο τρόπο του Γ2 έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda \frac{x^{\frac{3}{\beta}}}{6}}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\lambda}{6} \cdot x^2 \right) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \frac{x^3}{6}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{6} \cdot x^2 \right) = +\infty \text{ οπότε η } f \text{ δεν}$$

έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Γ4. α) Επειδή η $C_{f''}$ είναι ευθεία, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{6-0}{1-0} = 6$ και

εξίσωση $y = 6x$. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f''(x) = 6x \Leftrightarrow f'(x) = (3x^2)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Είναι $f'(0) = 3 \Leftrightarrow c_1 = 3$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 3 \Leftrightarrow$

$$f'(x) = (x^3 + 3x + c_2)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 + 3x + c_2, c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } f(0) = -4 \Leftrightarrow$$

$$c_2 = -4, \text{ άρα } f(x) = x^3 + 3x - 4, x \in \mathbb{R}.$$

β) Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$ οπότε η C_f τέμνει

τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(1, 0)$. Από τα δεδομένα του Γ1

και του Γ4 έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα για $x > 0$ έχουμε:

$$f(\eta\mu x) < f(x) \Leftrightarrow f(\eta\mu x) - f(x) < 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(\eta\mu x) - f(x)) = 0 \text{ γιατί η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0 \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(\eta\mu x) - f(x)} = -\infty.$$

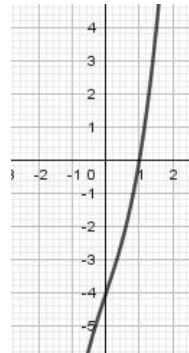
$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''\left(\frac{1}{x^2}\right)}{f(\eta\mu x) - f(x)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{6}{x^2} \cdot \frac{1}{f(\eta\mu x) - f(x)} \right) = +\infty(-\infty) = -\infty \quad (1).$$

Για $x < 0$ είναι $|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα για $x < 0$ έχουμε:

$$f(x) < f(\eta\mu x) \Leftrightarrow f(\eta\mu x) - f(x) > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} (f(\eta\mu x) - f(x)) = 0 \text{ γιατί η } f$$

είναι συνεχής στο 0 οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(\eta\mu x) - f(x)} = +\infty$. Επομένως



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''\left(\frac{1}{x^2}\right)}{f(\eta\mu x) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6}{x^2} \frac{1}{f(\eta\mu x) - f(x)} = +\infty(+\infty) = +\infty \quad (2).$$

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

Θέμα Δ

$$\Delta 1. \text{ Είναι } f(x) = \frac{(3x+1)(e^x+1)+1}{e^x+1} = \frac{(3x+1)(\cancel{e^x+1})}{\cancel{e^x+1}} + \frac{1}{e^x+1} = 3x+1 + \frac{1}{e^x+1}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = 3 - \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3(e^x+1)^2 - e^x}{(e^x+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{3e^{2x} + 6e^x + 3 - e^x}{(e^x+1)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3e^{2x} + 5e^x + 3}{(e^x+1)^2}.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x+1 + \frac{1}{e^x+1} \right) = -\infty + 1 + 1 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x+1 + \frac{1}{e^x+1} \right) = +\infty + 1 + 0 = +\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως

αύξουσα οπότε υπάρχει μοναδικό $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$.

$$\Delta 2. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{2}, \text{ οπότε } f((-\infty, 0)) = \left(-\infty, \frac{3}{2} \right). \text{ Επειδή το } 0 \text{ περιέχεται}$$

στο $f((-\infty, 0))$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-\infty, 0)$. Όμως η f έχει μοναδική ρίζα το ρ , άρα $\rho < 0$.

$$\Delta 3. \text{ Η } h \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ ως σύνθεση και γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με } h'(x) = 2xf^2(x) + x^2 \cdot 2f(x)f'(x) = 2xf(x)(f(x) + xf'(x)).$$

Η h' έχει ρίζες το 0 και το ρ . Θα αναζητήσουμε άλλη μία ρίζα.

Είναι $h(0) = 0 = h(\rho)$. Η h συνεχής στο $[\rho, 0]$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του

θεωρήματος Rolle οπότε υπάρχει $x_0 \in (\rho, 0)$ τέτοιο, ώστε $h'(x_0) = 0$. Όμως το

$2x$ έχει μοναδική ρίζα το 0, η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα το ρ , οπότε το x_0 είναι ρίζα της συνάρτησης $g(x) = f(x) + xf'(x)$.

- Για κάθε $x < \rho$ είναι $x < 0$, $f(x) < f(\rho) = 0$, $f'(x) > 0$, άρα $f(x) + xf'(x) < 0$, οπότε $h'(x) < 0$.

Η h συνεχής στο $(-\infty, \rho]$ άρα η h γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

- Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) > 0$, $f'(x) > 0$, άρα $f(x) + xf'(x) > 0$, οπότε $h'(x) > 0$.

Η h συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = f'(x) + f'(x) + xf''(x) = 2f'(x) + xf''(x).$$

$$\text{Είναι } f''(x) = \frac{(6e^{2x} + 5e^x) \cdot (e^x + 1)^2 - (3e^{2x} + 5e^x + 3) \cdot 2(e^x + 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^4} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{6e^{3x}} + 6e^{2x} + 5e^{2x} + 5e^x - \cancel{6e^{3x}} - 10e^{2x} - 6e^x}{(e^x + 1)^3} \Leftrightarrow f''(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)^3} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}.$$

Α τρόπος

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3} \text{ οπότε } xf''(x) = x \frac{e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3} \text{ όμως } x, (e^x - 1) \text{ για } x \neq 0$$

είναι ομόσημοι οπότε $xf''(x) \geq 0$ η ισότητα μόνον για $x = 0$. Τότε

$$g'(x) = 2f'(x) + xf''(x) > 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα.}$$

Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Για κάθε $x < x_0 \Rightarrow g(x) < g(x_0) = 0$. Για κάθε $x > x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) = 0$

Β τρόπος

Για κάθε $x \in (\rho, 0)$ είναι $e^x < e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$, οπότε $f''(x) < 0$, άρα

$$g'(x) = 2f'(x) + xf''(x) > 0 \text{ επομένως η } g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (\rho, 0).$$

Άρα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

Για κάθε $\rho < x < x_0 \Rightarrow g(x) < g(x_0) = 0$. Είναι $x < 0$, $f(x) > 0$ οπότε $h'(x) > 0$. Η h είναι συνεχής στο $[\rho, x_0]$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[\rho, x_0]$. Για κάθε $x_0 < x < 0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) = 0$ οπότε $h'(x) < 0$ αφού $x < 0$, $f(x) > 0$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_0, 0]$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, 0]$.

Επομένως η h έχει τοπικά ελάχιστο στο $x = \rho$, τοπικό μέγιστο στο $x = x_0$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$.

Τα συμπεράσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	ρ	x_0	0	$+\infty$
2x	-	-	-	0	+
f(x)	-	0	+	+	+
g(x)	-	-	0	+	+
h'(x)	-	+	-	+	+
f(x)	↘ T.E. ↗ T.M. ↘ T.E. ↗				

Δ4. Είναι $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq f(x) \leq 7 + \frac{1}{e^2 + 1}$.

Επειδή στη τελευταία σχέση η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0, 2]$, είναι

$$\int_0^2 \frac{3}{2} dx < \int_0^2 f(x) dx < \int_0^2 \left(7 + \frac{1}{e^2 + 1}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2}(2-0) < \int_0^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{e^x + 1}\right) dx < \left(7 + \frac{1}{e^2 + 1}\right)(2-0) \Leftrightarrow$$

$$3 < \left[3 \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{7e^2 + 8}{e^2 + 1} \cdot 2 \Leftrightarrow 3 < 8 + \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{7e^2 + 8}{e^2 + 1} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$-5 < \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{14e^2 + 16}{e^2 + 1} - 8 \text{ άρα } \int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{14e^2 + 16 - 8e^2 - 8}{e^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 \frac{1}{e^x + 1} dx < \frac{6e^2 + 8}{e^2 + 1}.$$

6ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα
Επιπέδου 2

Θέμα Α

A1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το

θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$,
οπότε $f(x_0) = \eta$.

A2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

A3. α) Ψευδής

β) Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής συνάρτηση, έχει σύνολο τιμών μονοσύνολο και όχι διάστημα. Για παράδειγμα $f(x) = 1$, $x \in (2, 3)$.

A4. ΣΛΛΣΛ

Θέμα Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

Τα εσωτερικά σημεία $-1, 1$ είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων, η f είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά οπότε ισχύει το θεώρημα Fermat άρα :

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - 2\beta + \gamma = 0(1) \text{ και } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0(2)$$

Με αφαίρεση της σχέσης (1) από την (2) έχουμε $4\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$.

B2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = 6\alpha x + 2\beta \stackrel{\beta=0}{=} 6\alpha x.$$

$$\text{Έχουμε: } f(0) = 2 \Leftrightarrow \delta = 2, f''(1) = 6 \Leftrightarrow 6\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Από τη σχέση (1) έχουμε $3 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -3$ οπότε : $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Για κάθε $x < -1$ ή $x > 1$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

Η f έχει τοπικό μέγιστο για $x = -1$ το $f(-1) = 4$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 1$

το $f(1) = 0$.

$$\mathbf{B3.} \text{ Είναι } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3 \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4} - \frac{6}{4} + \frac{8}{4} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbf{B4.} \text{ Είναι } \int_{-1}^0 h(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{x-1}{x^3 - 3x + 2} dx = \int_{-1}^0 \frac{\cancel{x}-1}{(x-1)^2 (x+2)} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^0 h(x) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx. \text{ Είναι } h(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}, \quad x \in [-1, 0].$$

Αναζητούμε αριθμούς A, B τέτοιους ώστε :

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \Leftrightarrow 1 = A(x+2) + B(x-1) \Leftrightarrow$$

$$1 = Ax + 2A + Bx - B \Leftrightarrow 1 = (A+B)x + 2A - B \quad (1) \text{ για κάθε } x \in [-1, 0].$$

$$\text{Από τη σχέση (1) προκύπτει το σύστημα : } \begin{cases} A+B=0 \quad (2) \\ 2A-B=1 \quad (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση των σχέσεων (2) και (3) έχουμε $3A=1 \Leftrightarrow A=\frac{1}{3}$ οπότε από τη

σχέση (2) προκύπτει $\frac{1}{3} + B = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{1}{3}$. Επομένως

$$\int_{-1}^0 h(x) dx = \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \left[\frac{1}{3} \cdot \ln|x-1| - \frac{1}{3} \cdot \ln|x+2| \right]_{-1}^0 \Leftrightarrow$$

$$\int_{-1}^0 h(x) dx = -\frac{2}{3} \cdot \ln 2$$

Θέμα Γ

Γ1. α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$f'(x) = \frac{1}{x} - e^x$ και δεύτερη παράγωγο $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - e^x < 0$ οπότε η f είναι κοίλη $(0, +\infty)$.

Γ2. Έστω (ε) η ζητούμενη εφαπτομένη και $(\alpha, f(\alpha))$ το σημείο επαφής της με τη C_f .

Η (ε) έχει εξίσωση

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y - \ln \alpha + e^\alpha = \left(\frac{1}{\alpha} - e^\alpha\right)(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$y = \left(\frac{1}{\alpha} - e^\alpha\right) \cdot x - 1 + \alpha e^\alpha + \ln \alpha - e^\alpha. \text{ Το σημείο } A(0, -1) \text{ ανήκει στην (ε) οπότε}$$

$$-1 = -1 + \alpha e^\alpha + \ln \alpha - e^\alpha \Leftrightarrow (\alpha - 1)e^\alpha + \ln \alpha = 0. (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = (x-1)e^x + \ln x, x > 0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$\varphi'(x) = e^x + (x-1)e^x + \frac{1}{x} = xe^x + \frac{1}{x} > 0. \text{ Η } \varphi \text{ είναι συνεχής στο } (0, +\infty) \text{ οπότε}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Από τη σχέση (1) έχουμε $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \varphi(1) \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Για $\alpha=1$ η (ε) έχει εξίσωση $y = (1-e)x - 1$.

Η f είναι κοίλη άρα η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την (ε) εκτός από το σημείο επαφής οπότε $f(x) \leq (1-e)x - 1 \Leftrightarrow \ln x - e^x \leq x - ex - 1 \Leftrightarrow$

$$\ln x \leq e^x + x - ex - 1.$$

Γ3. Είναι $f''(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Το x_0 είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως για $0 < x < x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ και για $x > x_0$ είναι $f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, +\infty)$. Άρα έχει μέγιστο στο x_0 , το $f(x_0)$.

$$\text{Είναι } f'(1) = 1 - e < 0, f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \sqrt{e} > 0 \text{ οπότε } f'(1) \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0.$$

Η f' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων οπότε

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ τέτοιο

ώστε $f'(\xi) = 0$.

Όμως η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το x_0 οπότε το ξ ταυτίζεται με

το x_0 . Άρα $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Γ4. 1ος τρόπος: Είναι $\frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{2} < \ln x_0 < \ln 1 \Leftrightarrow -\ln 2 < \ln x_0 < 0$ (1)

$\frac{1}{2} < x_0 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{e} < e^{x_0} < e \Leftrightarrow -e < -e^{x_0} < -\sqrt{e}$ (2). Με πρόσθεση των σχέσεων

(1) και (2) έχουμε $-\ln 2 - e < \ln x_0 - e^{x_0} < -\sqrt{e} \Leftrightarrow -\ln 2 - e < f(x_0) < -\sqrt{e}$
οπότε $f(x_0) < 0$.

Η f έχει μέγιστο το $f(x_0)$ άρα $f(x) \leq f(x_0) < 0$ οπότε $f(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$.

2ος τρόπος: Για $x > 0$ ισχύει: $\ln x \leq x - 1 < x + 1 \leq e^x$ άρα $f(x) = \ln x - e^x < 0$.

Γ5. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - e^x) = -\infty$ άρα έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη
τον άξονα $x'x$. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(\frac{\ln x}{e^x} - 1 \right) \right] = -\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} 0$. Άρα δεν έχει οριζόντιες

ασύμπτωτες. Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = 0 - \infty = -\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Άρα δεν έχει ούτε πλάγιες ασύμπτωτες. Δεν τέμνει τους άξονες.

Επομένως έχει την παρακάτω γραφική παράσταση.

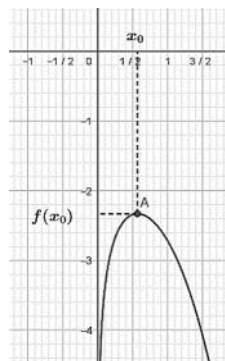
Θέμα Δ

Δ1. Μας δίνεται η σχέση: $|f(x) - xe^x - f(y) + ye^y| \leq |x - y|^{2024}$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση (1) έχουμε

$$\text{για } x \neq y: |h(x) - h(y)| \leq |x - y|^{2024} \Leftrightarrow \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|} \leq |x - y|^{2023} \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{2023} \Leftrightarrow -|x - y|^{2023} \leq \frac{h(x) - h(y)}{x - y} \leq |x - y|^{2023}.$$



Για $y=x_0 \in \mathbb{R}$ και για $x \neq x_0$ έχουμε $-|x-x_0|^{2023} \leq \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} \leq |x-x_0|^{2023}$.

Όμως $\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x-x_0|^{2023}) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (|x-x_0|^{2023})$ οπότε από το Κριτήριο

Παρεμβολής είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = 0$. Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = 0$ οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$h'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η h είναι σταθερή άρα

$h(x) = c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) - xe^x = c \Leftrightarrow f(x) = xe^x + c, c \in \mathbb{R}$.

Για $x = 1$ έχουμε : $f(1) = e + c \Leftrightarrow e = e + c \Leftrightarrow c = 0$ οπότε $f(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$

Δ2. Μας δίνεται : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = (x+2)e^x \Leftrightarrow$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) + g'(x) - g'(x-h)}{2h} = (x+2)e^x \Leftrightarrow$

$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g'(x+h) - g'(x)}{2h} - \frac{g'(x-h) - g'(x)}{2h} \right) = (x+2)e^x \Leftrightarrow (2).$

$\frac{g''(x)}{2} - \left(-\frac{g''(x)}{2} \right) = (x+2)e^x \Leftrightarrow \frac{g''(x) + g''(x)}{2} = (x+2)e^x \Leftrightarrow$

$\frac{2g''(x)}{2} = ((x+1)e^x)' \Leftrightarrow g''(x) = ((x+1)e^x)' \Leftrightarrow g'(x) = (x+1)e^x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$

. Για $x = 1$ έχουμε : $g'(1) = 2e + c_1 \Leftrightarrow 2e = 2e + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$ οπότε

$g'(x) = (x+1)e^x \Leftrightarrow g'(x) = (xe^x)'$

$g(x) = xe^x + c_2$. Για $x = 1$ έχουμε : $g(1) = e + c_2 \Leftrightarrow e = e + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$.

Επομένως $g(x) = xe^x, x \in \mathbb{R}$ άρα οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

Δ3. Είναι $h(x) = f(x^2) = x^2 e^{x^2} \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ άρα: $E(\Omega) =$

$$\int_0^1 f(x^2) dx = \int_0^1 x^2 e^{x^2} dx = \int_0^1 x \cdot (xe^{x^2}) dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{e^{x^2}}{2} \right)' dx =$$

$$\left[x \cdot \frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{2} dx = \frac{e}{2} - \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{2} dx.$$

Όμως $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{e^{x^2}}{2} \leq \frac{e}{2}$. Η ισότητα δεν ισχύει για όλες

τιμές του x οπότε $\int_0^1 \frac{1}{2} dx < \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{2} dx < \int_0^1 \frac{e}{2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{2} dx < \frac{e}{2} \Leftrightarrow$

$$-\frac{e}{2} < -\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{2} dx < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{e}{2} - \int_0^1 e^{x^2} dx < \frac{e}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2}.$$

Δ4. Για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\beta e^\beta - \alpha e^\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{\beta e^\beta - \beta e^\alpha + \beta e^\alpha - \alpha e^\alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi) = \frac{\beta(e^\beta - e^\alpha) + e^\alpha(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \beta \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} + e^\alpha. (3)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^x$ με παράγωγο $\varphi'(x) = e^x$. Για την φ ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$\varphi'(x_0) = \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{e^\beta - e^\alpha}{\beta - \alpha} (4).$$

Από τις σχέσεις (3), (4) έχουμε το ζητούμενο $f'(\xi) = \beta \cdot e^{x_0} + e^\alpha$.

Δ5. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$n(x) = x + e^{-x^2} \cdot \int_1^2 \left(2 \frac{f(x^2)}{x^2} \cdot n(x) \right) dx = x + e^{-x^2} \cdot \int_1^2 \left(2 \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2} \cdot n(x) \right) dx \Leftrightarrow$$

$$n(x) = x + e^{-x^2} \cdot \int_1^2 (2e^{x^2} \cdot n(x)) dx.$$

Θέτουμε $c = \int_1^2 (2e^{x^2} \cdot n(x)) dx$ (5) οπότε $n(x) = x + e^{-x^2} \cdot c$ (6).

Από τις σχέσεις (5), (6) έχουμε :

$$c = \int_1^2 2e^{x^2} (x + e^{-x^2} \cdot c) dx = \left[\int_1^2 2xe^{x^2} + 2c \right] dx \Leftrightarrow$$

$$c = \left[e^{x^2} + 2cx \right]_1^2 \Leftrightarrow c = e^4 + 4c - e - 2c \Leftrightarrow c = e - e^4 \text{ οπότε από τη σχέση (6)}$$

έχουμε $n(x) = x + e^{-x^2} \cdot (e - e^4) \Leftrightarrow n(x) = x + (e - e^4) \cdot e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

7ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 2

Θέμα Α

A1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$f(x_1) = f(x_2). \text{ Πράγματι}$$

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης

τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

A3. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και το θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε εφαρμόζεται σε ένα διάστημα Δ και όχι σε ένωση διαστημάτων. Το σωστό θα ήταν να γραφεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

A4. α) Σ β) Σ γ) Λ **A5.** δ)

Θέμα Β

B1. Είναι $f(x) = \lambda x^2 \left(\lambda - \frac{x}{4} \right) = \lambda^2 x^2 - \frac{\lambda x^3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 2\lambda^2 x - \frac{3\lambda x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$f''(x) = 2\lambda^2 - \frac{3\lambda x}{2}, x \in \mathbb{R}. \text{ Η κλίση της } f \text{ είναι η } f' \text{ άρα η } f' \text{ παρουσιάζει}$$

μέγιστο στο $x_0 = \frac{4}{3}$ (εσωτερικό σημείο) οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat

$$\text{είναι } f''\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - \frac{3\lambda \cdot \frac{4}{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

απορρίπτεται ή $\lambda = 1$.

Για $\lambda=1$ είναι $f(x) = x^2 - \frac{x^3}{4}$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - \frac{3x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$f''(x) = 2 - \frac{3x}{2}, x \in \mathbb{R}.$$

Η f' είναι τριώνυμο με ρίζες το 0 και το

$$\frac{8}{3} \text{ άρα είναι}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty\right).$$

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f	2		1		2

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{8}{3}\right]$. Παρουσιάζει τοπικό

ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$ και τοπικό μέγιστο στο $x=\frac{8}{3}$ το

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{9} - \frac{512}{27 \cdot 4} = \frac{64}{9} - \frac{512}{108} = \frac{768-512}{108} = \frac{256}{108} = \frac{64}{27}.$$

B2. Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$ και

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η f είναι κυρτή στο

$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right]$ και κοίλη στο $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει καμπή στο $x = \frac{4}{3}$ και έχει

σημείο καμπής το $K\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)$.

B3. Η f ως πολυωνμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες. Είναι $f(0)=0$ άρα διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Είναι

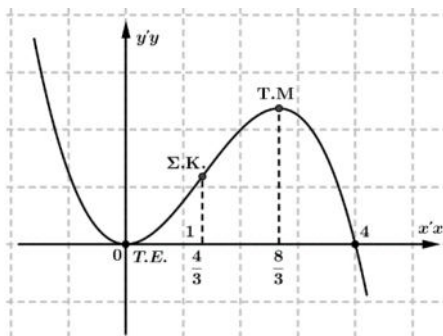
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^3}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 \left(1 - \frac{x}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ ή } \frac{x}{4} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4 \text{ άρα τέμνει τον άξονα } x'x \text{ στο σημείο}$$

$A(4,0)$ και εφάπτεται στον $x'x$ στο σημείο $O(0,0)$.

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών.

Τ.Ε.	Σ.Κ.	0	Τ.Μ.	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	+	-		
$f''(x)^\circ$	+	+	-	-		
f						



B4. Για $x \in [3, 4]$ είναι $f(x) \geq 0$ και για $x > 4$ είναι $f(x) < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Το ζητούμενο εμβαδόν είναι } E &= \int_0^5 |f(x)| dx = \int_0^4 |f(x)| dx + \int_4^5 |f(x)| dx = \\ &= \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4} \right) dx - \int_4^5 \left(x^2 - \frac{x^3}{4} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16} \right]_0^4 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{16} \right]_4^5 = \\ &= \frac{64}{3} - \frac{256}{16} - \frac{125}{3} + \frac{625}{16} + \frac{64}{3} - \frac{256}{16} = \frac{3}{3} + \frac{113}{16} = 1 + \frac{113}{16} = \frac{129}{16} \text{ τετραγωνικές} \\ &\text{μονάδες.} \end{aligned}$$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $\varphi(-2) = \frac{1}{e^2} > 0$, $\varphi(-1) = \frac{1}{e} + 1 - 2 = \frac{1}{e} - 1 < 0$, $\varphi(1) = e - 3 < 0$ και $\varphi(2) = e^2 - 4 > 0$. Η φ είναι συνεχής στα διαστήματα $[-2, -1]$, $[1, 2]$ σαν πράξεις συνεχών συναρτήσεων άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχουν $x_1 \in (-2, -1)$ και $x_2 \in (1, 2)$ τέτοια ώστε $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Η φ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $\varphi'(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Για κάθε $x < 0$ είναι άρα $\varphi'(x) < 0$ και για

κάθε $x > 0$ είναι $\varphi'(x) > 0$, επειδή η φ είναι συνεχής, είναι $\varphi \searrow (-\infty, 0]$ και $\varphi \nearrow [0, +\infty)$, επομένως τα x_1, x_2 είναι μοναδικά.

Γ2. Είναι $f(x) = |\ln(\varphi(x)+1)| = |\ln(e^x - x - 1)|$, $x \neq 0$.

Πρέπει και αρκεί $e^x - x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > x + 1$, αληθής $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Είναι $\ln(e^x - x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \geq 0$ (2)

Για κάθε $x < x_1 \stackrel{\varphi \searrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) > \varphi(x_1) = 0$. Για κάθε $x_1 < x \leq 0 \stackrel{\varphi \searrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) < \varphi(x_1) = 0$.

Για κάθε $0 \leq x < x_2 \stackrel{\varphi \nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) < \varphi(x_2) = 0$. Για κάθε

$x > x_2 \stackrel{\varphi \nearrow}{\Leftrightarrow} \varphi(x) > \varphi(x_2) = 0$.

Άρα (2) $\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty)$ οπότε

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e^x - x - 1), & x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) \\ -\ln(e^x - x - 1), & x \in (x_1, x_2) \end{cases}$$

Είναι $f(x_2) = \varphi(x_2) = 0$ οπότε $e^{x_2} - x_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_2} - x_2 = 2$ άρα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{-\ln(e^x - x - 1) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}}{x - x_2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{-\frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}}{1} =$$

$$-\frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} - x_2 - 1} = -\frac{e^{x_2} - 1}{2 - 1} = 1 - e^{x_2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{\ln(e^x - x - 1) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}}{x - x_2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}}{1} =$$

$$\frac{e^{x_2} - 1}{e^{x_2} - x_2 - 1} = \frac{e^{x_2} - 1}{2 - 1} = e^{x_2} - 1.$$

Είναι $1 - e^{x_2} \neq e^{x_2} - 1 \Leftrightarrow 2e^{x_2} \neq 2 \Leftrightarrow e^{x_2} \neq 1 \Leftrightarrow x_2 \neq 0$ ισχύει οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_2^-} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \neq \lim_{x \rightarrow x_2^+} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \text{ άρα η } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } x_2.$$

Γ3. Είναι $g(x) = f(x) = \ln(e^x - x - 1)$, $x \geq x_2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(x_2, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}$ οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο $(x_2, +\infty)$ με παράγωγο

$g'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}$, $x > x_2$. Είναι:

- $x > x_2 > 0$ οπότε $e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$,
- $e^x > x + 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 > 0$ για $x > 0$ (από γνωστή ανισότητα)

Άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \geq x_2$, η g συνεχής σαν πράξεις συνεχών

συναρτήσεων στο $[x_2, +\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_2, +\infty)$ άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Άρα έχει σύνολο τιμών το $g([x_2, +\infty)) = [g(x_2), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)) = [0, +\infty)$, το

οποίο είναι το πεδίο ορισμού της g^{-1} .

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - e^{-x} \right) \right] = +\infty, \text{ εφόσον} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \stackrel{\text{DLH}}{=} 0 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - x - 1)] \stackrel{e^x - x - 1 = u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} (\ln u) = +\infty.$$

Γ4. Είναι $g'(x) = f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x - 1}$.

Θέτω $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = g(y) \Rightarrow dx = g'(y)dy = \frac{e^y - 1}{e^y - y - 1} dy$.

Για $x=0$ είναι $g(y) = 0 = g(x_2) \Leftrightarrow y = x_2$ και για $x = \alpha$ είναι $y = g^{-1}(\alpha)$.

Είναι $\int_0^\alpha \left(1 - \frac{g^{-1}(x)}{e^{g^{-1}(x)} - 1} \right) dx = \int_{x_2}^{g^{-1}(\alpha)} \left(1 - \frac{y}{e^y - 1} \right) \frac{e^y - 1}{e^y - y - 1} dy =$

$$\int_{x_1}^{g^{-1}(\alpha)} \frac{\cancel{e^y} - 1 - y}{\cancel{e^y} - 1} \cdot \frac{\cancel{e^y} - 1}{\cancel{e^y} - y - 1} dy = \int_{x_2}^{g^{-1}(\alpha)} dy = g^{-1}(\alpha) - x_2$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω h το ύψος του κυλίνδρου με ακτίνα βάσης x . Πρέπει $x > 0$ και $h > 0$. Το εμβαδόν κάθε βάσης είναι πx^2 άρα το εμβαδόν των βάσεων είναι $2\pi x^2$, ενώ το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι $2\pi x h$.

Για τον όγκο του κυλίνδρου ισχύει $V = 628 \Leftrightarrow \pi x^2 h = 628 \Leftrightarrow h = \frac{628}{\pi x^2} > 0$.

Άρα το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι

$$2\pi x h = 2\pi x \cdot \frac{628}{\pi x^2} = \frac{1256}{x}$$

Το κόστος του υλικού των βάσεων είναι $K_1(x) = 2\pi x^2 \cdot 4 = 8\pi x^2$ λεπτά του ευρώ, ενώ το κόστος του υλικού της παράπλευρης επιφάνειας είναι

$$K_2(x) = \frac{1256}{x} \cdot 1,25 = \frac{1570}{x}$$

Άρα το συνολικό κόστος είναι $K(x) = K_1(x) + K_2(x) = 8\pi x^2 + \frac{1570}{x}$, $x > 0$

Ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5 κοστίζει $K(5) = 8\pi \cdot 25 + \frac{1570}{5} = 200\pi + 314$ λεπτά του ευρώ.

Δ2. Η συνάρτηση K είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\text{πaráγωγο } K'(x) = 16\pi x - \frac{1570}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$K'(x) = \frac{16\pi x^3 - 1570}{x^2} \Leftrightarrow K'(x) = \frac{2(8\pi x^3 - 785)}{x^2}$$

$$K'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(8\pi x^3 - 785)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 8\pi x^3 - 785 \geq 0 \Leftrightarrow 8\pi x^3 \geq 785 \Leftrightarrow$$

$$x^3 \geq \frac{785}{8\pi} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{785}{\pi}}. \text{ Είναι } K'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{785}{\pi}}\right) \text{ και}$$

$$K'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{785}{\pi}}, +\infty\right) \text{ άρα } K \searrow \left(0, \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{785}{\pi}}\right) \text{ και}$$

$$K \nearrow \left[\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{785}{\pi}}, +\infty\right) \text{ ως συνεχής. Η } K \text{ παρουσιάζει ελάχιστο για } x = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{785}{\pi}}.$$

Άρα έχουμε το ελάχιστο κόστος όταν το εμβαδόν των βάσεων του κυλίνδρου

$$\text{ισούται με } 2\pi \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{785}{\pi}}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{785}{\pi}}\right)^2.$$

Δ3. Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την K στο $[a, b]$ οπότε υπάρχει $\xi_1 \in (a, b)$ τέτοιο

$$\begin{aligned}\text{ώστε } K'(\xi_1) &= \frac{K(\beta) - K(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{8\pi\beta^2 + \frac{1570}{\beta} - 8\pi\alpha^2 - \frac{1570}{\alpha}}{\beta - \alpha} = \\ &= \frac{8\pi(\cancel{\beta - \alpha})(\beta + \alpha)}{\cancel{\beta - \alpha}} + 1570 \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} = 8\pi(\alpha + \beta) + 1570 \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} \quad (A)\end{aligned}$$

Ισχύουν οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. για την $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ στο $[\alpha, \beta]$ οπότε

$$\text{υπάρχει } \xi_2 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi_2) = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow -\frac{1}{\xi_2^2} = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\beta - \alpha}$$

Άρα η (A) γίνεται $K'(\xi_1) = 8\pi(\alpha + \beta) - 1570 \cdot \frac{1}{\xi_2^2}$.

Δ4. 1^{ος} τρόπος: Η G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο $G'(x) = K(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η G συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ άρα $G([1, 2]) = [G(1), G(2)]$

$$\text{Για } 1 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow G(1) \leq G(t) \leq G(2) \Leftrightarrow 2tG(1) \leq 2tG(t) \leq 2tG(2) \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 2tG(1) dt \leq \int_1^2 2tG(t) dt \leq \int_1^2 2tG(2) dt \Leftrightarrow$$

$$G(1) \left[t^2 \right]_1^2 \leq \int_1^2 2tG(t) dt \leq G(2) \left[t^2 \right]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3G(1) \leq \int_1^2 2tG(t) dt \leq 3G(2) \Leftrightarrow G(1) \leq \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \leq G(2)$$

Το $\left(\int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \right) \in G([1, 2])$ άρα υπάρχει μοναδικό (αφού G γνησίως

αύξουσα στο $[1, 2]$) $x_1 \in [1, 2]$ τέτοιο ώστε $G(x_1) = \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt$.

2^{ος} τρόπος: Έστω η συνάρτηση $\varphi(x) = G(x) - \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt$, $x \in [1, 2]$ η οποία

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $\varphi'(x) = G'(x) = K(x) > 0$ για

κάθε $x \in (1, 2)$ άρα η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$. Είναι :

$$- \varphi(1) = G(1) - \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \leq 0 \text{ γιατί για}$$

$$t \geq 1 \stackrel{G'}{\Leftrightarrow} G(t) \geq G(1) \stackrel{t \in [1,2]}{\Leftrightarrow} 2tG(t) \geq 2tG(1) \text{ οπότε}$$

$$\int_1^2 2tG(t) dt \geq \int_1^2 2tG(1) dt \Leftrightarrow \int_1^2 2tG(t) dt \geq G(1) [t^2]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 2tG(t) dt \geq 3G(1) \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \geq G(1)$$

$$- \varphi(2) = G(2) - \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \geq 0 \text{ γιατί για}$$

$$t \leq 2 \stackrel{G'}{\Leftrightarrow} G(t) \leq G(2) \stackrel{t \in [1,2]}{\Leftrightarrow} 2tG(t) \leq 2tG(2) \text{ οπότε}$$

$$\int_1^2 2tG(t) dt \leq \int_1^2 2tG(2) dt \Leftrightarrow \int_1^2 2tG(t) dt \leq G(2) [t^2]_1^2 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 2tG(t) dt \leq 3G(2) \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt \leq G(2). \text{ Άρα } \varphi(1)\varphi(2) \leq 0.$$

Αν $\varphi(1)\varphi(2) = 0$ τότε το 1 ή το 2 είναι ρίζες της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$.

Αν $\varphi(1)\varphi(2) < 0$, η φ συνεχής στο $[1, 2]$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει $x_1 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow G(x_1) = \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt.$$

Άρα υπάρχει μοναδικό (αφού G γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$) $x_1 \in [1, 2]$ τέτοιο

$$\text{ώστε } \varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow G(x_1) = \int_1^2 \frac{2tG(t)}{3} dt.$$

8ο Επαναληπτικό Διαγώνισμα Επιπέδου 2

Θέμα Α

A1. Έστω $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) +$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v +$$

$$\alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 = \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0)$$

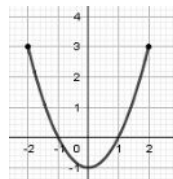
A2. Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση **1-1**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

α	β	γ	δ
E	A	B	Δ

A3.

A4. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [-2, 2]$. Η f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες τις $-1, 1$ στο $(-2, 2)$ όμως $f(-2) = 3$, $f(2) = 3$ οπότε $f(-2)f(2) > 0$



A5. α) Σ **β)** i. Λ **ii.** Σ **γ)** Λ

Θέμα Β

B1. Η συνάρτηση $f(x) = \ln(2e^x + 1) - 2$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + 1} > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε

θα είναι και 1-1, συνεπώς αντιστρέφεται. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x + 1) = 0 + 1 = 1$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 1) = +\infty$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(2e^x + 1) - 2] \stackrel{u=2e^x+1}{x \rightarrow -\infty, u \rightarrow 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0 - 2 = -2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2e^x + 1) - 2] \stackrel{k=2e^x+1}{x \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty. \text{ Άρα το σύνολο τιμών}$$

της f είναι

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-2, +\infty). \text{ Για τον τύπο της συνάρτησης } f^{-1}$$

έχουμε: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $y > -2$ είναι

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln(2e^x + 1) - 2 = y \Leftrightarrow \ln(2e^x + 1) = y + 2 \Leftrightarrow$$

$$2e^x + 1 = e^{y+2} \Leftrightarrow e^x = \frac{e^{y+2} - 1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{e^{y+2} - 1}{2}. \text{ Άρα}$$

$$f^{-1}(x) = \ln \frac{e^{x+2} - 1}{2}, x \in (-2, +\infty)$$

$$\textbf{B2. i)} \text{ Είναι } f^{-1}(\ln 7 - 2) = \ln \frac{e^{\ln 7 - 2 + 2} - 1}{2} = \ln \frac{e^{\ln 7} - 1}{2} \ln \frac{7-1}{2} = \ln 3 \text{ οπότε}$$

$$f(x) < f^{-1}(\ln 7 - 2) - 2 \Leftrightarrow f(x) < \ln 3 - 2 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} x < 0$$

ii) Η ανίσωση έχει έννοια όταν $x > 0$. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε $f(\ln x + x) < f(1) \Leftrightarrow \ln x + x < 1 \Leftrightarrow \ln x + x - 1 < 0$ (1).

Έστω $g(x) = \ln x + x - 1, x > 0$. Είναι $g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Είναι $g(1) = 0$, συνεπώς από την (1) έχουμε $g(x) < g(1) \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

B3. Η εξίσωση $f^{-1}\left(\frac{x}{\sin x}\right) - f^{-1}\left(\frac{e^x}{\eta \mu x}\right) = 0$ ισοδύναμα γίνεται

$$f^{-1}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = f^{-1}\left(\frac{e^x}{\eta \mu x}\right) \stackrel{f}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right) = f\left(f^{-1}\left(\frac{e^x}{\eta \mu x}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{e^x}{\eta \mu x} \Leftrightarrow x \eta \mu x = e^x \sin x \Leftrightarrow x \eta \mu x - e^x \sin x = 0 \quad (2)$$

Έστω $h(x) = x \eta \mu x - e^x \sin x$, η οποία είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών

συναρτήσεων, $h(0) = -1 < 0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$. Άρα $h(0)h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα

$\rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : h(\rho) = 0$. Επομένως, το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (2) και αφού

$\rho \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ θα είναι ρίζα και της ισοδύναμης εξίσωσης

$$f^{-1}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = f^{-1}\left(\frac{e^x}{\eta \mu x}\right).$$

B4. Η $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + 1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \frac{2e^x}{(2e^x + 1)^2} > 0$,

άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο εκτός του σημείου επαφής.

B5. Είναι $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε

$$E(\Omega) = \int_0^{\ln 2} f'(x) dx = [f(x)]_0^{\ln 2} = f(\ln 2) - f(0) = (\ln 5 - 2) - (\ln 3 - 2) = \ln \frac{5}{3}$$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $x^2 - 4x + 5 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta = -4 < 0$ και $\alpha = 1 > 0$, οπότε

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5} > 0, \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}. \text{ Η } f \text{ είναι}$$

παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right). \text{ Συνεπώς δεν μπορεί να είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

.Επίσης, αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha < 0$

ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ γιατί τότε θα υπάρχει $\beta < 0$ τέτοιο, ώστε $f(\beta) < 0$ (άτοπο). Αν

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \gamma > 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} [xf(x)] = -\infty \cdot \gamma \text{ (άτοπο).}$$

Συνεπώς, επειδή το όριο υπάρχει είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Γ2. Η $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f''(x) = -\frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

Είναι $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 5)^2} > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, οπότε η f είναι

κυρτή στο $(-\infty, 2]$ και κοίλη στο $[2, +\infty)$. Η εξίσωση εφαπτομένης της της C_f

στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι $y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{\pi}{8}$.

Γ3. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 2]$ οπότε η C_f θα είναι πάνω από κάθε εφαπτομένη

σε οποδήποτε σημείο. Άρα $f(x) \geq \frac{x}{5} + \frac{\pi}{8}$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο

για $x = 0$.

Επίσης για $x \leq 0$ είναι $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5} = \frac{1}{(x-2)^2 + 1} < \frac{1}{(x-2)^2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) < \frac{1}{(x-2)^2} \Leftrightarrow f'(x) - \frac{1}{(x-2)^2} < 0. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση}$$

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{x-2} \text{ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο } (-\infty, 0] \text{ με παράγωγο}$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{(x-2)^2} < 0, \text{ οπότε η } g \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο}$$

$$A_1 = (-\infty, 0] \text{ με σύνολο τιμών } g(A_1) = \left[g(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right) = \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ γιατί}$$

$$\text{είναι συνεχής και } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{1}{x-2} \right) = 0, \text{ άρα } g(x) < 0 \text{ στο}$$

$$(-\infty, 0] \text{ δηλαδή } f(x) + \frac{1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow f(x) < -\frac{1}{x-2} \Leftrightarrow f(x) < \frac{1}{2-x} \quad (2). \text{ Από}$$

$$(1), (2) \text{ προκύπτει } \frac{x}{5} + \frac{\pi}{8} \leq f(x) < \frac{1}{2-x}.$$

$$\mathbf{\Gamma 4.} \text{ Είναι } \frac{x}{5} + \frac{\pi}{8} \leq f(x) < \frac{1}{2-x} \text{ και η αριστερή ισότητα ισχύει μόνο για } x = 0$$

$$\text{οπότε } \int_{-1}^0 \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{8} \right) dx < \int_{-1}^0 f(x) dx < \int_{-1}^0 \frac{1}{2-x} dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{5} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \frac{\pi}{8} < \int_{-1}^0 f(x) dx < - \left[\ln(2-x) \right]_{-1}^0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} - \frac{1}{10} < \int_{-1}^0 f(x) dx < \ln \frac{3}{2}.$$

$$\mathbf{\Gamma 5.} \text{ Αφού } f(x) > 0 \text{ τότε}$$

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x)' f(x) dx = \left[x f(x) \right]_0^2 - \int_0^2 x \frac{1}{x^2 - 4x + 5} dx = \\ &= 2f(2) - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x - 4 + 4}{x^2 - 4x + 5} dx = 2f(2) - \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} + \frac{4}{x^2 - 4x + 5} \right) dx = \\ &= 2f(2) - \frac{1}{2} \left[\ln |x^2 - 4x + 5| \right]_0^2 - 2 \int_0^2 f'(x) dx = 2f(2) - \frac{1}{2} (\ln 1 - \ln 5) - 2 \left[f(x) \right]_0^2 \\ &= 2f(2) + \frac{1}{2} \ln 5 - 2f(2) + 2f(0) = \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Θέμα Δ

$$\mathbf{\Delta 1.} \text{ Η συνάρτηση } f(x) = e^x - \ln(x+1) \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (-1, +\infty) \text{ με}$$

$$\text{παράγωγο } f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}. \text{ Επίσης, η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (-1, +\infty) \text{ με}$$

παράγωγο $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$. Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ οπότε η

f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.

- Για $-1 < x < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$.

- Για $x > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 1$.

Δ2. Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [e^x - \ln(x+1)] = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow -1^+} e^x = e^{-1}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty, \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - \ln(x+1)] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{e^x} \right) \right] = +\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)e^x} = 0$$

Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (-1, 0]$ με σύνολο τιμών σε αυτό

το διάστημα $f(A_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = [1, +\infty)$. Ενώ η f είναι γνησίως

αύξουσα στο $A_2 = [0, +\infty)$ με σύνολο τιμών σε αυτό το διάστημα

$f(A_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, +\infty)$. Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [1, +\infty).$$

- ο Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, τότε η ευθεία $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .
- ο Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.
- ο Θα εξετάσουμε αν η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x - \ln(x+1)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x} \right] = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ οπότε η } C_f \text{ δεν έχει}$$

πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Δ3. Είναι $f(x) - e + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = e - \ln 2 \Leftrightarrow f(x) = f(1)$ (1).

Προφανής λύση το $x = 1$ στο διάστημα A_2 . Η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 οπότε το 1 μοναδική λύση της εξίσωσης (2) στο διάστημα αυτό.

Επίσης το $e - \ln 2 \in f(A_1) = [1, +\infty)$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα υπάρχει μοναδικό $\rho_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho_1) = e - \ln 2$.

Συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = e - \ln 2$ έχει ακριβώς δυο ρίζες $\rho_1, \rho_2 = 1$ στο $(-1, +\infty)$ με $-1 < \rho_1 < 0 < \rho_2$.

Δ4. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f'(x) + f(x) - e + \ln 2$ η οποία είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$

ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$h(\rho_1) = f'(\rho_1) + f(\rho_1) - e + \ln 2 = f'(\rho_1) + 0 = f'(\rho_1) < 0 \text{ γιατί } \rho_1 \in (-1, 0) \text{ και}$$

$$h(\rho_2) = h(1) = f'(1) + f(1) - e + \ln 2 = f'(1) = e - \frac{1}{2} > 0.$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει

$$x_0 \in (\rho_1, \rho_2) \text{ τέτοιο, ώστε } h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) + \ln 2 = e - f(x_0)$$

$$\text{Όμως } h'(x) = f''(x) + f'(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} + e^x - \frac{1}{x+1} = 2e^x - \frac{x}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Αν } x \in (-1, 0) \text{ τότε } -\frac{x}{(x+1)^2} > 0 \text{ οπότε } h'(x) > 0.$$

$$\text{Αν } x \in (0, +\infty) \text{ τότε } f''(x) > 0, f'(x) > 0 \text{ οπότε } h'(x) > 0.$$

$$\text{Αν } x = 0, \text{ τότε } h'(0) = f'(0) + f''(0) = f''(0) > 0.$$

Άρα $h'(x) > 0$, για κάθε $x \in (-1, +\infty)$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

β) Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)f'(\rho_1) - f'(\rho_2)}{f(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{f(x) - 1} ((x+1)f'(\rho_1) - f'(\rho_2)) \right] = -\infty \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 1) = f(0) - 1 = 0 \text{ και } f(x) > 1 \text{ για } x \text{ κοντά στο } 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 1} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} ((x+1)f'(\rho_1) - f'(\rho_2)) = f'(\rho_1) - f'(1) < 0$$

Γιατί $\rho_1 < 1 \Leftrightarrow f'(\rho_1) < f'(1) \Leftrightarrow f'(\rho_1) - f'(1) < 0$

Δ5. Η συνάρτησή g είναι συνεχής στο $[0,1]$, οπότε από ΘΜΕΤ θα έχει μέγιστη M και ελάχιστη τιμή m , δηλαδή $m \leq g(x) \leq M$ (3). Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε για

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow f(0) \leq f(\sqrt{x}) \leq f(1) \Leftrightarrow 1 \leq f(\sqrt{x}) \leq e - \ln 2, \text{ οπότε}$$

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx > 0. \text{ Από την (3) έχουμε } mf(\sqrt{x}) \leq g(x)f(\sqrt{x}) \leq Mf(\sqrt{x}) \text{ οπότε}$$

$$\int_0^1 mf(\sqrt{x}) dx \leq \int_0^1 g(x)f(\sqrt{x}) dx \leq \int_0^1 Mf(\sqrt{x}) dx \Leftrightarrow$$

$$m \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq \int_0^1 g(x)f(\sqrt{x}) dx \leq M \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \quad \Leftrightarrow \quad \div \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx > 0$$

$$m \leq \frac{\int_0^1 g(x)f(\sqrt{x}) dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx} \leq M.$$

Το $\frac{\int_0^1 g(x)f(\sqrt{x}) dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx} \in [m, M]$ οπότε υπάρχει $\theta \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε

$$g(\theta) = \frac{\int_0^1 g(x)f(\sqrt{x}) dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx} \Leftrightarrow \int_0^1 g(x)f(\sqrt{x}) dx = g(\theta) \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$